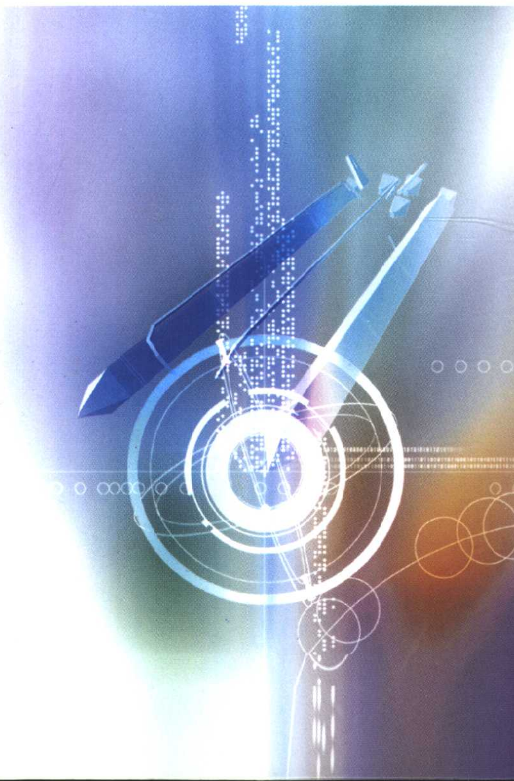
大学数学学习指南

概率论与数理统计

刘建亚 总主编
吴 臻 主编



山东大学出版社
Shandong University Press

大学数学学习指南
——概率论与数理统计

总主编　刘建亚

主　编　吴　臻

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习指南.概率论与数理统计/刘建亚总主编.吴臻分册主编.
—济南:山东大学出版社,2004.8
ISBN 7-5607-2841-3

Ⅰ.大...
Ⅱ.①刘...②吴...
Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料
②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 083905 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
安丘市意中印务有限责任公司印刷
787×980 毫米　1/16　13 印张　244 千字
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
印数:1-3000 册
定价:19.00 元

《大学数学学习指南》编委会

《概率论与数理统计》

主　编　吴　臻
编　者　胡发胜　宿　洁　史敬涛

前　言

大学数学是大学教育中重要的基础理论课，它不仅是学好其他专业课的重要工具，同时也能使学生通过数学知识和方法的学习，获得理性思维的训练和美的享受，对提高学生的综合素质具有重要意义。学好大学数学，要有一套好教材，也需要有与之配套的教学指导书，以帮助学生掌握大学数学的教学要求，更好地理解基本概念，掌握系统的基本理论，体会数学的思维方法，提高利用基本知识分析和解决问题的能力。"大学数学学习指南"丛书可与山东大学数学学院编写的国家"十五"规划教材"大学数学教程"微积分、线性代数、概率统计(高等教育出版社 2002 年版)配套使用，同时亦可作为读者学习大学数学课程的参考书，备考硕士研究生入学考试的辅导用书。

"大学数学学习指南"丛书按"大学数学教程"各分册的体系编写。概率统计分册分为三篇。第一篇为概率统计的基本内容，按章编写，包括"基本要求"、"内容提要"、"例题分析和难点解析"和"练习题"四部分。第一部分"基本要求"给出了对该章内容的具体要求；第二部分"内容提要"扼要整理和归纳了该章的概念、定理和公式，方便读者复习查阅；第三部分"例题分析和难点分析"，通过典型例题系统全面地介绍了概率统计的解题与证题的方法和技巧，给出了求解同类题目的一般方法及注意事项，并对这些方法和技巧进行了归纳和总结，以帮助学生认识掌握重点，提高解决难度较高、综合性较强的问题的能力。这部分是本丛书的特色之一，充分体现学习指南的作用；第四部分"练习题"除有计算、应用、证明题外，参照研究生入学考试，每章均选编了一定数量的选择题和填空题，供读者练习使用，所选习题难度层次分明，既有基本习题也有一些较难的题目。第二篇为试题汇编，包括 3 套概率统计课程模拟试卷及 2000～2004 年全国研究生入学考试中概率统计试题汇编；第三篇为练习题及课程模拟试卷试题和研究生入学考试试题的详细解答与答案，这是本丛书的又一特色，读者可在独立做完练习题和课程模拟试题之后对照查阅，再一次充分体现"大学数学学习指南"的作用。

"大学数学学习指南"丛书由山东大学数学与系统科学学院刘建亚教授任总主编，负责丛书总策划，吴臻教授任丛书主编，通稿定稿。各分册的编者是：微积

分——蒋晓芸、许闻天、崔玉泉；线性代数——秦静、金辉；概率统计——胡发胜、宿洁、史敬涛。

本书编写过程中，得到山东大学教务处、山东大学数学与系统科学学院领导及同行教师们的关心和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平，加上经验不足，时间仓促，书中的不足与疏漏之处在所难免，恳请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

2004 年 7 日

目　录

第一篇　基本内容

第二篇 试题汇编

第三篇 解答与答案

第一篇　基本内容

第一章　随机事件及其概率

一、基本要求

1. 理解随机事件及样本空间的概念，掌握事件间的关系及运算.
2. 理解事件频率的概念，了解概率的统计定义.
3. 理解概率的古典定义，了解概率的公理化定义.
4. 掌握古典概型及几何概率的计算方法.
5. 掌握概率的基本性质及概率的加法公式.
6. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式.
7. 理解事件独立性的概念，会计算相互独立事件的有关概率.
8. 掌握全概率公式和贝叶斯公式.
9. 掌握伯努利概型的计算公式.
10. 重点与难点：

重点　随机事件、样本空间的概念；事件的关系；概率的概念、性质；条件概率；独立性的概念；加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的应用.

难点　事件的关系及其基本运算；古典概型下事件的概率计算；全概率公式及贝叶斯公式应用.

二、内容提要

(一) 重要概念

1. 随机事件及其运算

(1) 随机试验　概率论中的随机试验，简称试验，它具有下列三个特征：

① 试验可在相同的条件下重复进行；

② 试验的结果不止一个;

③ 每次试验之前,不能判定哪一个结果将会出现.

(2) 基本事件、样本空间　试验 E 中的每一个可能结果称为基本事件,或称为样本点.所有基本事件的集合称为试验 E 的样本空间,记为 Ω.

(3) 随机事件　试验 E 的样本空间 Ω 中的子集称为试验 E 的随机事件,简称为事件.基本事件是最简单的随机事件.样本空间 Ω 中的所有元素组成的集合称为必然事件,仍用 Ω 来表示,它在每一次试验中都发生.不含任何样本空间 Ω 中元素的空集称为不可能事件,用 $\varnothing$ 表示,它在每一次试验中都不会发生.

(4) 事件的包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B 中,记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.显然必然事件 Ω 包含任何事件 A,事件 A 包含不可能事件 $\varnothing$,即 $\Omega\supset A\supset\varnothing$.特别地,若事件 A 包含事件 B,且事件 B 也包含条件 A,即 $A\supset B$ 且 $A\subset B$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

(5) 事件的并　若事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的并事件,或称为 A 与 B 的和事件,记为 $A\cup B$.一般地,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

(6) 事件的交　由事件 A 与事件 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与事件 B 的交事件,或称为 A 与 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB.一般地,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

(7) 事件的差　若事件 A 发生而事件 B 不发生,这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A-B$.

(8) 互不相容事件　在一次试验中,若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互不相容事件,或称为互斥事件.一般地,对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若它们之间两两互不相容,则称这 n 个事件是互不相容的,并记

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

(9) 对立事件　在一次试验中,若事件 A 与事件 B 二者必有一个发生且仅有一个发生,则称 A 与 B 为对立事件,或称为互逆事件.通常记 A 的对立事件(或逆事件)为 $\overline{A}$.显然,$A\overline{A}=\varnothing$,$A\cup\overline{A}=\Omega$.

2. 随机事件的概率

(1) 频率　设在相同的条件下进行了 n 次试验,在这 n 次试验中事件 A 出现了 m 次($m\leqslant n$),则称 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 出现的次数}}{\text{试验总次数}}$为随机事件 A 在 n

次试验中出现的频率,m 称为频数.

(2) 概率的统计定义　在大量重复试验中,若事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称该常数 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

(3) 概率的公理化定义　设试验 E 的样本空间为 Ω,若对于 E 中的每一个事件 A,都有一实数 $P(A)$ 与之对应,并且满足下列三条公理:

公理 1　非负性:对于任意一个事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

公理 2　规范性:$P(\Omega)=1$;

公理 3　可列可加性:对于两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(4) 古典概型　具有如下特点的随机试验称为古典概型:

① 试验的样本空间中的基本事件只有有限个;

② 每次试验中基本事件发生的可能性相等.

(5) 古典概率　设试验结果共有 n 个基本事件 $w_1,w_2,\cdots,w_n$,而且这些基本事件发生的可能性相等.事件 A 由其中的 m 个基本事件构成,则称

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

为事件 A 的概率.

(6) 几何概率　如果试验 E 的可能结果可以几何地表示为某区域 Ω 中的一个点(区域 Ω 可以是一维的、二维的……),并且点落在 Ω 中某区域 A 的概率与 A 的测度(长度、面积、体积等)成正比,而与 A 的位置与形状无关,则随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A \text{ 的测度}}{\Omega \text{ 的测度}}$$

称之为几何概率.

3. 条件概率与事件的独立性

(1) 条件概率　设 A,B 是两事件且 $P(A)>0$,称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 已发生的条件下事件 B 的条件概率.

(2) 两个事件相互独立　设 A,B 是两事件,若有 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(3) n 个事件相互独立　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,若对其中任意 k 个事件 $(2\leqslant k\leqslant n)A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n)$,成立等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

4. 伯努利试验

若试验 E 只有两种可能结果,A 与 $\overline{A}$,设 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p=q$,这种试验称为伯努利试验.若将试验 E 重复进行 n 次,并且每次试验结果互不影响,则称为 n 重伯努利试验.

(二) 重要定理及运算公式

1. 概率的加法公式

定理 1 若事件 A,B 互不相容,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.一般地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个两两互不相容事件,则 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

推论 1 设 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件,则 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

推论 2 设事件 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

定理 2 若 A,B 为两事件,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.若 A,B,C 为三个事件,则 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.一般地,对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).\end{aligned}$$

2. 概率的乘法公式

设 A,B 为两事件,且 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.一般地,对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则对任一事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)(B\mid A_i).$$

4. 贝叶斯公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,则对任一事件 $B(P(B)>0)$,成立

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},k=1,2,\cdots,n.$$

5. 伯努利概型的计算公式

设伯努利试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n.$$

三、例题分析和难点解析

(一) 随机事件的运算及其概率的性质

学习本部分内容,要注意区分互不相容事件与对立事件这两个容易混淆的概念.事件 A 与事件 B 互不相容是指一次试验中 A 和 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$ 而 A 与 B 对立事件是指一次试验中 A 与 B 必有一个发生且仅有一个发生,即 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$.

由定义易知,若事件 A 与事件 B 为对立事件,则 A 与 B 必为互不相容事件,反之则不然.例如掷一枚骰子出现 1 点、2 点,这两个事件显然是互不相容事件,但它们不是对立事件.

例 1　设 A,B,C 是任意三个随机事件,则以下命题中正确的是(　　).

(A) $(A\cup B)-B=A-B$;　　(B) $(A-B)\cup B=A$;

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$;　　(D) $A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$.

分析　本题主要考查事件的关系及运算.

解　由于 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}=A-B$,故选(A).其余三个不对,因为

$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B$,

$(A\cup B)-C=(A\cup B)\overline{C}=(A\overline{C})\cup(B\overline{C})=A\overline{C}\cup(B-C)$,

$A\cup B=A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B$.

例 2　设 A,B,C 是三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

分析　本题主要考查事件概率的性质.

解　A,B,C 三事件至少发生一个可表示为 $A\cup B\cup C$.而 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0$,从而 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

(二) 古典概型与几何概率

例 3　在分别写有 2,3,4,5,7,8 的 6 张卡片中任取 2 张,把卡片上的数字

组成一个分数,求所得分数是既约分数的概率.

分析 本题主要考查古典概率的计算,因此要熟悉排列与组合数的运算,还要注意运用对立事件求概率来简化运算.

解法 1 以 A 表示"所得分数是既约分数",则样本点总数为 $P_6^2=30$. 所得分数是既约分数,分子、分母必须为 3,5,7 中的两个或 2,4,8 中的一个与 3,5,7 中的一个组成,从而事件 A 中包含的基本事件个数为 $P_3^2+2P_3^1P_3^1=24$,于是所求

$$P(A)=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}.$$

解法 2 仍以 A 表示"所得分数是既约分数",它相当于"所取两个数中至少有一个是奇数",而 A 的对立事件 $\overline{A}$ 是"所取两个数都不是奇数",易见求 $P(\overline{A})$较容易,即 $P(\overline{A})=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,从而所求 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{4}{5}$.

例 4 从 1～2000 中随机取一整数,问取到的整数不能被 6 或 8 整除的概率是多少?

分析 本题主要考查概率的运算性质及古典概率的运算.

解 设事件 A,B,C 分别表示"取到被 6 整除的数","取到被 8 整除的数"及"取到不能被 6 或被 8 整除的数",则 $C=\overline{A\cup B}$,从而所求 $P(C)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$,下面分别求$P(A),P(B),P(AB)$.

由于 $333<\frac{2000}{6}<334$,故 A 包含样本点数为 333,于是 $P(A)=\frac{333}{2000}$,由于 $\frac{2000}{8}=250$,故 B 包含样本点个数为 250,于是 $P(B)=\frac{250}{2000}$. 又因为一个数同时被 6,8 整除,就相当于被它们的最小公倍数 24 整除,注意到 $83<\frac{2000}{24}<84$,故 AB 包含样本点个数为 83,于是 $P(AB)=\frac{83}{2000}$,从而所求

$$P(C)=1-\left[\frac{333}{2000}+\frac{25}{2000}-\frac{83}{2000}\right]=\frac{3}{4}.$$

例 5 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,这 4 只鞋子中至少 2 只配成一双的概率是多少?

解 由题意,样本空间所包含样本点总数为 C_{10}^4,用 A 表示"4 只鞋中至少 2 只配成一双",则 $\overline{A}$ 表示"4 只鞋中没有任何 2 只能配成一双",$\overline{A}$ 的样本点数为 $C_5^4\cdot 2^4$(先从 5 双鞋中任取 4 双,从每双中任取 1 只),则所求

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

例6　袋中有 a 个黑球，b 个白球，现在把球随机地一个一个摸出来，求第 k 次摸出的一个球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

分析　本题对样本空间的不同构造可有多种解法.

解法1　把 $a+b$ 个球分别编号，把摸出的球依次排列在 $a+b$ 个位置上，则所有可能的排列相当于对 $a+b$ 个相异元素进行全排列，所以样本点总数为 $(a+b)!$ 有利场合数可这样考虑：第 k 个位置放一个黑球有 a 种放法，而另外 $a+b-1$ 个位置上相当于对 $a+b-1$ 个球进行全排列，有 $(a+b-1)!$ 种放法，故所求

$$P_k=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法2　把黑球与白球看作没有区别，将摸出的球依次放在 $a+b$ 个位置上，则样本点总数为 $C_{a+b}^{a}C_b^b=\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$，有利场合数可这样考虑：第 k 个位置上必须放黑球，剩下的 $a-1$ 个黑球和 b 个白球放在 $a+b-1$ 个位置上，共有 $C_b^1C_{a+b-1}^{a-1}C_b^b$ 种方法，于是所求 $P_k=\frac{C_a^1C_{a+b-1}^{a-1}C_b^b}{C_{a+b}^aC_b^b}=\frac{a}{a+b}$.

解法3　把 a 个黑球和 b 个白球看作各不相同，且样本空间只考虑前 k 次摸球，那么样本点总数就是从 $a+b$ 个球中任取 k 个的排列数，即 P_{a+b}^k，而其中第 k 个位置上放置黑球的放法数就是从 a 个黑球中任取一个放在第 k 个位置上，再从余下的 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 个放在其余 $k-1$ 个位置上，这种放法总共有 $C_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$ 种，于是所求 $P_k=\frac{C_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}$.

注：本题表明，摸得黑球的概率与摸球的先后次序无关，这个结论与我们日常的生活经验是一致的.例如体育比赛中抽签，对各队机会均等，与抽签的先后次序无关.

例7　任取两个正的真分数，求它们的乘积不大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

分析　本题考查几何概率的计算.

解　设 x,y 为所取的真分数，则 $0<x<1,0<y<1$.把 (x,y) 表示为平面上一点的坐标，则点 (x,y) 位于边长为 1 的正方形区域内，如图 1-1 所示.为使 $xy<\frac{1}{4}$，则点 (x,y) 应位于图中阴影部分区域内，从而所求

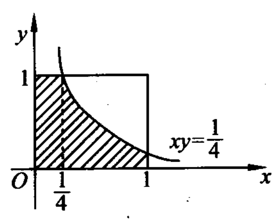


图 1-1

$$P=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(1+\ln 4)\approx 0.597.$$

例 8 设 k 等可能地在区间$[0,5]$内取值,求方程 $4x^2+4kx+k+2=0$ 有实根的概率.

解 样本空间对应区域就是$[0,5]$,而方程有实根的充要条件是其判别式 $\Delta=(4k)^2-4\cdot 4(k+2)=16(k^2-k-2)\geqslant 0$,即 $k\geqslant 2$(舍去 $k\leqslant -1$),从而有利场会所对应区间为$[2,5]$,故所求 $P=\frac{3}{5}$.

例 9 (1991 年高数一)随机地向 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}(a>0)$内掷一点,点落在半圆内任何区域内的概率与该区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为________.

解 设事件 A 表示"掷的点和原点连线与 x 轴夹角小于$\frac{\pi}{4}$"(如图 1-2 所示),由几何概率公式 $P(A)=\frac{S_D}{S_{半圆}}$,而 $S_{半圆}=\frac{1}{2}\pi a^2$,$S_D=S_{\triangle AOC}+S_{\frac{1}{4}圆}=\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi}{4}a^2$,从而

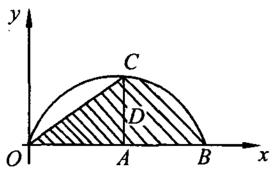


图 1-2

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi}{4}a^2}{\frac{\pi}{2}a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

(三) 条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

学习本部分内容,要着重理解全概率公式和贝叶斯公式的意义.

概率论的重要研究课题之一是希望从已知的简单事件的概率推算出未知的复杂事件的概率.为达到这个目的,经常把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件之和,再通过分别计算这些简单事件的概率,最后利用概率的可加性得到最终结果.这里,全概率公式起着很重要的作用.

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割,即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,并且 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.这样一来,$B=\sum_{i=1}^{n}A_iB$,这里 $A_iB(i=1,2,\cdots,n)$也两两互不相容(如图 1-3 所示).

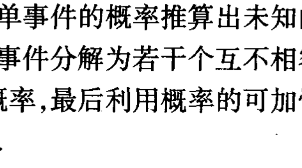


图 1-3