上海市大学教材

高等数学

（理科用）

下册

上海人民出版社

上海市大学教材

高等数学

(理科用)

下册

《高等数学》编写组

上海市大学教材
高等数学
(理科用)
下册
《高等数学》编写组
上海人民出版社出版
(上海绍兴路5号)
新华书店上海发行所发行　上海中华印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32　印张 8 5/8　字数 209,000
1973年12月第1版　1974年9月第2次印刷
印数：30,001—55,000
统一书号：13171·72　　定价：0.65元

毛主席语录

　　教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

　　教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

出 版 说 明

这套《高等数学》以微积分为主要内容，共分三册．上册包括一元函数微积分和常微分方程，中册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、场论、级数和广义积分，下册包括复变函数、偏微分方程、矩阵、概率论和算法语言．这套书作为上海市大学理科各专业(包括数学专业)基础课教材，也可作为工科各专业参考书．

考虑到教材的通用性，未选用专业典型课题．各专业在使用中可结合实际情况选编典型课题进行教学，更好地做到理论与实践相结合；并可按各专业要求，对内容加以取舍或更动次序．

由于我们的马列主义水平不高，对毛主席的教育革命思想学习得不够，实践经验也不足，时间又较匆促，因而教材中存在的缺点和错误一定不少，恳切地希望工农兵学员、广大教师和读者提出批评和意见．

参加本书编写的单位有复旦大学、上海科学技术大学和上海师范大学．

目　录

第十一章　复变函数

微积分是研究变数的数学.前几章所讨论的变数都是实变数,所讨论的函数也是实变数与实变数之间的依赖关系.随着生产实践的发展,人们对于数的认识逐渐扩展了.在引进虚数 $i=\sqrt{-1}$ 以后,对实变数的研究也就扩展到对复变数的研究,而复变数与复变数之间的依赖关系就是复变函数.

在复变数的领域内,微积分的基本方法如同在实变数的领域内一样,微分仍旧是把事物运动过程无限细分到零,从而反映出过程每个瞬间的变化状况,而复的积分是微分的反面,它是无限细分同时又无限累积的结果.微分和积分这一对矛盾及其转化,构成复变函数中的非常丰富的内容.

十九世纪上半期,复变函数论已成为高等数学的一个新的重要分支.它不仅对数学本身有巨大意义,而且在工程技术、流体力学、天体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等方面都有重要应用.例如,机翼绕流问题、堤坝渗水问题、弹性理论中的平面应力分析等等,都可以用复变函数的方法研究解决.正如恩格斯所深刻指出的:"**$\sqrt{-1}$ 在许多情况下毕竟是正确的数学运算的必然结果;不仅如此,如果不准用 $\sqrt{-1}$ 来运算,那末数学,无论是初等数学或高等数学,将怎么办呢?**"①

第一节　复数及复变函数

一、复数的表示及其运算

在初等数学里已对复数作过较详细的讨论,现在作扼要的复

① 恩格斯:《反杜林论》,人民出版社 1970 年版,第 119 页。

习与少量的补充.

称 $z=x+iy$ 为复数，其中 $i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，x、y 都是实数，并分别称它们为复数 z 的实部、虚部，记为

$$x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z.$$

当 $x=0$ 时，$z=iy$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，复数 z 成了实数 x. 所以，实数是复数的特殊情况.

两个复数只有它们的实部、虚部分别相等时才相等.

复数的表示法

复数 $z=x+iy$ 还有下面几种表示法.

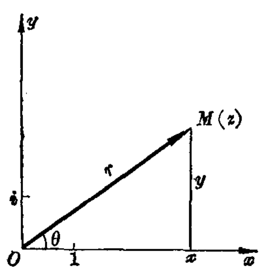

图 11-1

(1) 向量表示法

在 z 平面(复平面)上建立直角坐标系 $O\text{-}xy$，并以 x 轴表示实轴(单位为 1)，y 轴表示虚轴（单位为 i）. 如果我们把 x 与 y 看作向量 $\overrightarrow{OM}$ 分别在实轴与虚轴上的投影(图 11-1)，那末向量 $\overrightarrow{OM}$ 可以表示复数 $z=x+iy$；反过来，任一复数 z 都可用向量来表示. 这就是说，复数 z 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 之间建立了一一对应关系. 复数 0 与零向量对应.

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的长度 r 称为 z 的模，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为 z 的幅角，记作

$$\operatorname{Arg} z=\theta.$$

由于复数 $z(\neq 0)$ 有无穷多个幅角，而其中任两个之差为 2π 的整数倍. 我们把满足

$$0\leqslant\theta<2\pi$$

的幅角 θ，称作 z 的主幅角，记作 $\arg z$. 因而 θ 的一般值为

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数}).$$

复数 $z=0$ 对应于零向量，它没有确定的方向，其幅角 θ 是不

确定的，这是需要注意的.

有了复数的模 r 和幅角 θ 的概念以后，就可以利用 r 和 θ 将复数表示出来. 表示方法如下.

(2) 三角表示法和指数表示法

由于 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ (图 11-1)，因此

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

其中 r 是 z 的模，θ 是 z 的幅角，这就是复数 z 的三角表示法.

利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

就可得复数 z 的指数表示式

$$z=re^{i\theta}.$$

复数的各种表示形式可以相互转换，以适应不同问题的实际需要.

复数的运算

(1) 加、减法

对复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$，有

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

(2) 乘、除法

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+i^2y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1);\end{aligned}$$

为了方便，常用复数的指数式或三角式:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

由此可知两复数相乘，就是它们的模相乘 (r_1r_2)，而幅角相加 $(\theta_1+\theta_2)$. 很明显，两复数的乘积公式可推广到任意多个复数的乘积，因而，积的模等于各复数模的乘积，积的幅角等于各复数幅角的和。

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0).$$

为方便起见，常用指数式或三角式：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

由此可知复数相除，就是它们的模相除$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$，而幅角相减$(\theta_1-\theta_2)$.

(3) 乘方与方根

对 z 的 n 次乘方 z^n 与 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ (n 为整数)，用指数式或三角式进行计算较为方便.

$$z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),$$

由此可知，复数的 n 次乘方的模等于复数模的 n 次方(r^n)，而复数的 n 次乘方的幅角等于复数幅角的 n 倍.

由于 $e^{2k\pi i}=1$ (k 为任意整数)，故

$$z=re^{i\theta}=re^{i\theta}\cdot e^{2k\pi i}=re^{i(\theta+2k\pi)}.$$

这是复数的一般指数表示式.

对 $z=re^{i(\theta+2k\pi)}$ 开 n 次方，应有

$$z^{\frac{1}{n}}=[re^{i(\theta+2k\pi)}]^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}\quad (k\text{ 为任意整数}).$$

因当 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时，$z^{\frac{1}{n}}$ 取 n 个不同的值

$$r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}},\ r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}},\ \cdots,\ r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}};$$

而当 k 取其他值时，所得 $z^{\frac{1}{n}}$ 的值必与这 n 个值中的某一个重合，所以 $z^{\frac{1}{n}}$ 只有 n 个值，即

$$z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad (k=0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

称 $z=x+iy$ 与 $\bar{z}=x-iy$ 互为共轭复数. 在复平面上，点 z 与 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的.

容易验证

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;　　(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0)$;　　(4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$;

(5) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$;　　(6) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

(7) $\bar{\bar{z}} = z$.

因而，$z+\bar{z}$ 是一实数；$z-\bar{z}$ 是一纯虚数，只要 $\mathrm{Im}\, z \neq 0$.

要注意的是，z^2 与 $|z|^2$ 一般是不相等的，因为 $z^2 = z \cdot z$，而 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

利用复数的向量表示容易看出下面的两个不等式成立：

(1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;　　(2) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

这两不等式在几何上分别表示：三角形的两边之和大于第三边；三角形的两边之差小于第三边（当三角形蜕化为一线段时，等号才成立）（图 11-2）.

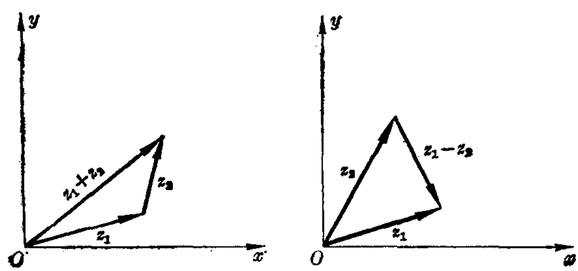

图 11-2

二、复变函数　连续性

在生产技术、科学实验中有许多物理量，往往与复变函数 $f(z)$ 有关. 例如，在雷达站和电视中转站中用的波导管，在分析其电力线与等位线的分布情况时，就出现函数

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad (z = x + iy).$$

又如，流动的水面上不同的点，流速的大小和方向一般都是不相同的. 因此，流速 v 是平面上变动的向量，它的两个分量都是 x、y 的

函数 $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$. 按照复数的向量表示法,有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(z)=v_x(x, y)+iv_y(x, y) \quad (z=x+iy).$$

当 $z=x+iy$ 变动时, $\boldsymbol{v}$ 也跟着变动, $\boldsymbol{v}(z)$ 就是一个复变函数. 再如,垂直于均匀带电的无限长直导线的一个平面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$, 它的两个分量也是 x、y 的函数 $E_x(x, y)$ 和 $E_y(x, y)$. 因此,同样可以用复变函数来表示

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(z)=E_x(x, y)+iE_y(x, y) \quad (z=x+iy).$$

一般地,如果对复平面上某个区域 D 内的任一点 $z=x+iy$, 按照一定的规律有复数 w 与它相对应, 则称 w 是复变数 z 的复函数(简称复变函数),记作

$$w=f(z).$$

区域 D 称为函数 w 的定义域.

由于 w 是复数,即 $w=u+iv$, 因此 u、v 都是随 (x, y) 的变动而变动的,它们都是 x、y 的二元函数,即

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y).$$

可见,复变函数是两个二元实变函数的组合.

如果对于 z 的每一个值, w 有不止一个值相对应, 就称 w 为多值函数. 我们所讨论的大多是单值函数.

例如,多项式

$$w=f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中 a_k 均为已知复数,它的定义域是整个 z 平面.

分式函数

$$w=f(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},$$

除了使分母等于零的那些 z 之外,都是有意义的.

对于复指数函数、复三角函数等,由于它们都失去了原来实变数函数的意义,必须另给定义.

复指数函数定义为

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

由此可定义复三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz});$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i2z}-1}{e^{i2z}+1};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{i2z}+1}{e^{i2z}-1}.$$

必须注意，$|\sin z| \leqslant 1$ 与 $|\cos z| \leqslant 1$ 在复平面上不再有效. 例如，

$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{-1} + e) > \frac{e}{2} > 1.$$

另外，对数函数定义为

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

复变函数的极限和连续

由于复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 事实上是两个二元实变函数 u 和 v 的一种组合，所以，如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 分别在点 (x_0, y_0) 有极限 A_1 和 A_2，就称 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点有极限 $A = A_1 + iA_2$. 即

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\{u(x, y) + iv(x, y)\} = A_1 + iA_2 = A.$$

特别，当 $A_1 = u(x_0, y_0)$，$A_2 = v(x_0, y_0)$ 时，即当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 为连续时，就称 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点连续. 即

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} f(z) &= \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\{u(x, y) + iv(x, y)\}\\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0).\end{aligned}$$

因此，有关实变函数的极限、连续的所有性质、法则，都可以相应地搬到复变函数中来. 其中连续函数在闭区域上的最大(小)值定理，应该理解为连续的复变函数模的最大(小)值定理.

习　　题

1. 证明:

(1) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

(2) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, 并说明它的几何意义;

(3) 实系数 n 次方程的复根必以共轭形式成对出现.

2. 讨论在哪些情形下 $z^2=|z|^2$, 在哪些情形下 $z^2\neq|z|^2$.

3. 写出下列不等式所确定的区域:

(1) $\operatorname{Re} z>0$;　　(2) $0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 2$;　　(3) $|z-1|\leqslant 4$;

(4) $3\leqslant|z|\leqslant 5$;　　(5) $|z-1|\leqslant|z+1|$.

4. 作出下列方程所表示的曲线:

(1) $|z-1|=2$;　　(2) $\operatorname{Re}(z^2)=a$;

(3) $|z-a|+|z-b|=c\quad(c>0)$.

第二节　解 析 函 数

一、解析函数的概念　柯西-黎曼方程

在电场、磁场及流体力学等的计算中,我们遇到的是一类具有特殊性质的复变函数,就是所谓解析函数.这类函数在解实际问题中起着重要的作用,也是复变函数论的主要研究对象.

解析函数的定义　设 $w=f(z)$ 是区域 D 上的一个函数,当自变量在点 $z(\in D)$ 有一个改变量 Δz 时,函数 w 相应地有一改变量 Δw, 如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在,则称函数 $f(z)$ 在点 z 可导,并称此极限为 $f(z)$ 在点 z 的导数 $f'(z)\left(或\ \frac{dw}{dz}\right)$. 如果 $f(z)$ 在 D 内每一点都可导,称 $f(z)$ 是 D 上的一个解析函数.

复变函数可导的定义与实变函数可导的定义在形式上是完全一样的.因此,在微积分中讨论过的有关导数的一些法则、公式,如