

上海市大学教材

高等数学

(理科用)

下册

上海人民出版社

上海市大学教材

高等数学

(理科用)

下册

《高等数学》编写组

上海市大学教材

高等数学

(理科用)

下册

《高等数学》编写组

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8 5/8 字数 209,000

1973年12月第1版 1974年9月第2次印刷

印数: 30,001—55,000

统一书号: 13171·72 定价: 0.65 元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，
有的首先删繁就简。

A497/02

出版说明

这套《高等数学》以微积分为主要内容,共分三册。上册包括一元函数微积分和常微分方程,中册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、场论、级数和广义积分,下册包括复变函数、偏微分方程、矩阵、概率论和算法语言。这套书作为上海市大学理科各专业(包括数学专业)基础课教材,也可作为工科各专业参考书。

考虑到教材的通用性,未选用专业典型课题。各专业在使用中可结合实际情况选编典型课题进行教学,更好地做到理论与实践相结合;并可按各专业要求,对内容加以取舍或更动次序。

由于我们的马列主义水平不高,对毛主席的教育革命思想学习得不够,实践经验也不足,时间又较匆促,因而教材中存在的缺点和错误一定不少,恳切地希望工农兵学员、广大教师和读者提出批评和意见。

参加本书编写的单位有复旦大学、上海科学技术大学和上海师范大学。

目 录

第十一章 复变函数	1
第一节 复数及复变函数	1
一、复数的表示及其运算	1
二、复变函数 连续性	5
第二节 解析函数	8
一、解析函数的概念 柯西-黎曼方程	8
二、调和函数	12
三、在电磁场中的应用 复电位	13
第三节 保角变换(共形映照)	22
第四节 积分	28
第五节 级数	38
一、幂级数的概念	38
二、解析函数的幂级数展开	39
三、解析函数的零点与极点	42
第六节 留数及其应用	47
一、留数的概念	47
二、留数的计算	49
三、应用留数计算积分	51
第十二章 偏微分方程	58
第一节 弦振动方程	59
一、问题的提出	59
二、初值问题的解	65
三、波的传播 决定区域和影响区域	67
四、分离变量法	69
五、齐次化原理 非齐次方程的求解	74
第二节 热传导方程	78
一、方程与定解条件的导出	78
二、热传导方程初值问题的解	84

三、半无界边值问题的解	87
第三节 调和方程	91
一、方程和边界条件	91
二、圆的第一边值问题	93
三、调和方程的基本解	96
四、三类方程的比较	100
第四节 差分法	103
一、差商与截断误差	103
二、用差分法求热传导方程的解	107
三、用差分法求调和方程的解	111
第十三章 矩阵	115
第一节 n 阶行列式和 n 阶线性方程组	116
第二节 n 维向量	127
一、 n 维向量及其运算法则	127
二、向量的线性相关和线性无关	130
第三节 线性变换和矩阵	135
第四节 矩阵的运算	142
一、矩阵乘矩阵	142
二、矩阵的加减法 数与矩阵相乘	148
三、单位阵和逆阵	148
第五节 二次型 矩阵的特征值	155
一、二次型及其标准型	156
二、正交变换	157
三、化二次型为标准型 矩阵的特征值	160
第六节 矩阵的应用	163
一、在线性四端网络中的应用	163
二、在光学中的一个应用	169
第十四章 概率论	175
第一节 概率论的研究对象和应用	175
第二节 随机事件和概率	177
一、随机事件的概念及其运算	177
二、概率论的基本概念——概率	180
三、条件概率和独立事件	184
第三节 随机变量和概率分布	188

一、离散随机变量的分布列	189
二、二项分布和普阿松分布	190
三、连续随机变量的分布密度和分布函数	193
四、正态分布和均匀分布	195
五、二元随机变量	198
六、随机变量的函数的概率分布	199
第四节 随机变量的数字表征	203
一、平均数	203
二、方差	208
三、统计线性相关和相关系数	215
第五节 大数定律和中心极限定理	222
一、大数定律	222
二、中心极限定理	227
第六节 平稳过程	230
一、平稳过程的概念 相关函数	230
二、各态历经性质	233
三、频谱分析	235
第十五章 算法语言	239
第一节 电子数字计算机简介	240
第二节 基本符号与程序结构	241
一、基本符号	241
二、一些基本概念	242
三、程序的结构	243
第三节 说明部分	245
一、简单变量说明	245
二、数组说明	245
第四节 语句部分	246
一、输入语句	247
二、输出语句	248
三、赋值语句	248
四、循环语句	250
五、条件语句	253
六、转向语句	255
第五节 过程	257

一、过程说明	258
二、过程语句	259
附 录 函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 数值表 ($x > 0$)	265

第十一章 复变函数

微积分是研究变数的数学. 前几章所讨论的变数都是实变数, 所讨论的函数也是实变数与实变数之间的依赖关系. 随着生产实践的发展, 人们对于数的认识逐渐扩展了. 在引进虚数 $i = \sqrt{-1}$ 以后, 对实变数的研究也就扩展到对复变数的研究, 而复变数与复变数之间的依赖关系就是复变函数.

在复变数的领域内, 微积分的基本方法如同在实变数的领域内一样, 微分仍旧是把事物运动过程无限细分到零, 从而反映出过程每个瞬间的变化状况, 而复的积分是微分的反面, 它是无限细分同时又无限累积的结果. 微分和积分这一对矛盾及其转化, 构成复变函数中的非常丰富的内容.

十九世纪上半期, 复变函数论已成为高等数学的一个新的重要分支. 它不仅对数学本身有巨大意义, 而且在工程技术、流体力学、天体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等方面都有重要应用. 例如, 机翼绕流问题、堤坝渗水问题、弹性理论中的平面应力分析等等, 都可以用复变函数的方法研究解决. 正如恩格斯所深刻指出的: “ $\sqrt{-1}$ 在许多情况下毕竟是正确的数学运算的必然结果; 不仅如此, 如果不用 $\sqrt{-1}$ 来运算, 那末数学, 无论是初等数学或高等数学, 将怎么办呢?”^①

第一节 复数及复变函数

一、复数的表示及其运算

在初等数学里已对复数作过较详细的讨论, 现在作扼要的复

^① 恩格斯: 《反杜林论》, 人民出版社 1970 年版, 第 119 页.

习与少量的补充.

称 $z = x + iy$ 为复数, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位, x, y 都是实数, 并分别称它们为复数 z 的实部、虚部, 记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

当 $x=0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数; 当 $y=0$ 时, 复数 z 成了实数 x . 所以, 实数是复数的特殊情况.

两个复数只有它们的实部、虚部分别相等时才相等.

复数的表示法

复数 $z = x + iy$ 还有下面几种表示法.

(1) 向量表示法

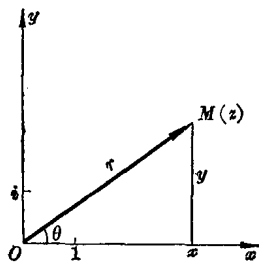


图 11-1

在 z 平面(复平面)上建立直角坐标系 $O-xy$, 并以 x 轴表示实轴(单位为 1), y 轴表示虚轴(单位为 i). 如果我们把 x 与 y 看作向量 $\overrightarrow{OM}$ 分别在实轴与虚轴上的投影(图 11-1), 那末向量 $\overrightarrow{OM}$ 可以表示复数 $z = x + iy$; 反过来, 任一复数 z 都可用向量来表示. 这就是说, 复数

z 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 之间建立了一一对应关系. 复数 0 与零向量对应.

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的长度 r 称为 z 的模, 记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为 z 的幅角, 记作

$$\operatorname{Arg} z = \theta.$$

由于复数 $z (\neq 0)$ 有无穷多个幅角, 而其中任两个之差为 2π 的整数倍. 我们把满足

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

的幅角 θ , 称作 z 的主幅角, 记作 $\arg z$. 因而 θ 的一般值为

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数}).$$

复数 $z=0$ 对应于零向量, 它没有确定的方向, 其幅角 θ 是不

确定的,这是需要注意的.

有了复数的模 r 和幅角 θ 的概念以后, 就可以利用 r 和 θ 将复数表示出来. 表示方法如下.

(2) 三角表示法和指数表示法

由于 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (图 11-1), 因此

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

其中 r 是 z 的模, θ 是 z 的幅角, 这就是复数 z 的三角表示法.

利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

就可得复数 z 的指数表示式

$$z = r e^{i\theta}.$$

复数的各种表示形式可以相互转换, 以适应不同问题的实际需要.

复数的运算

(1) 加、减法

对复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 有

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

(2) 乘、除法

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \end{aligned}$$

为了方便, 常用复数的指数式或三角式:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \end{aligned}$$

由此可知两复数相乘, 就是它们的模相乘 ($r_1 r_2$), 而幅角相加 ($\theta_1 + \theta_2$). 很明显, 两复数的乘积公式可推广到任意多个复数的乘积, 因而, 积的模等于各复数模的乘积, 积的幅角等于各复数幅角的和.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).\end{aligned}$$

为方便起见, 常用指数式或三角式:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

由此可知复数相除, 就是它们的模相除 $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$, 而幅角相减 $(\theta_1 - \theta_2)$.

(3) 乘方与方根

对 z 的 n 次乘方 z^n 与 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ (n 为整数), 用指数式或三角式进行计算较为方便.

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

由此可知, 复数的 n 次乘方的模等于复数模的 n 次方 (r^n), 而复数的 n 次乘方的幅角等于复数幅角的 n 倍.

由于 $e^{2k\pi i} = 1$ (k 为任意整数), 故

$$z = re^{i\theta} = re^{i\theta} \cdot e^{2k\pi i} = re^{i(\theta + 2k\pi)}.$$

这是复数的一般指数表示式.

对 $z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$ 开 n 次方, 应有

$$z^{\frac{1}{n}} = [re^{i(\theta + 2k\pi)}]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \text{ 为任意整数}).$$

因当 $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ 时, $z^{\frac{1}{n}}$ 取 n 个不同的值

$$r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}, \quad r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2\pi}{n}}, \quad \dots, \quad r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}};$$

而当 k 取其他值时, 所得 $z^{\frac{1}{n}}$ 的值必与这 n 个值中的某一个重合, 所以 $z^{\frac{1}{n}}$ 只有 n 个值, 即

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

称 $z = x + iy$ 与 $\bar{z} = x - iy$ 互为共轭复数. 在复平面上, 点 z 与 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的.

容易验证

- (1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; (2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
 (3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$; (4) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$;
 (5) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$; (6) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
 (7) $\bar{\bar{z}} = z$.

因而, $z + \bar{z}$ 是一实数; $z - \bar{z}$ 是一纯虚数, 只要 $\operatorname{Im} z \neq 0$.

要注意的是, z^2 与 $|z|^2$ 一般是不相等的, 因为 $z^2 = z \cdot z$, 而 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

利用复数的向量表示容易看出下面的两个不等式成立:

- (1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; (2) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

这两不等式在几何上分别表示: 三角形的两边之和大于第三边; 三角形的两边之差小于第三边 (当三角形蜕化为一线段时, 等号才成立) (图 11-2).

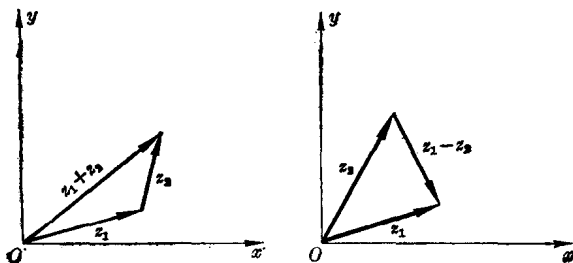


图 11-2

二、复变函数 连续性

在生产技术、科学实验中有许多物理量, 往往与复变函数 $f(z)$ 有关. 例如, 在雷达站和电视中转站中用的波导管, 在分析其电力线与等位线的分布情况时, 就出现函数

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad (z = x + iy).$$

又如, 流动的水面上不同的点, 流速的大小和方向一般都是不相同的. 因此, 流速 v 是平面上变动的向量, 它的两个分量都是 x, y 的

函数 $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$. 按照复数的向量表示法, 有

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(z) = v_x(x, y) + i v_y(x, y) \quad (z = x + iy).$$

当 $z = x + iy$ 变动时, $\mathbf{v}$ 也跟着变动, $\mathbf{v}(z)$ 就是一个复变函数. 再如, 垂直于均匀带电的无限长直导线的一个平面上的电场强度 $\mathbf{E}$, 它的两个分量也是 x, y 的函数 $E_x(x, y)$ 和 $E_y(x, y)$. 因此, 同样可以用复变函数来表示

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z) = E_x(x, y) + i E_y(x, y) \quad (z = x + iy).$$

一般地, 如果对复平面上某个区域 D 内的任一点 $z = x + iy$, 按照一定的规律有复数 w 与它相对应, 则称 w 是复变数 z 的复函数 (简称复变函数), 记作

$$w = f(z).$$

区域 D 称为函数 w 的定义域.

由于 w 是复数, 即 $w = u + iv$, 因此 u, v 都是随 (x, y) 的变动而变动的, 它们都是 x, y 的二元函数, 即

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y).$$

可见, 复变函数是两个二元实变函数的组合.

如果对于 z 的每一个值, w 有不只一个值相对应, 就称 w 为多值函数. 我们所讨论的大多是单值函数.

例如, 多项式

$$w = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

其中 a_k 均为已知复数, 它的定义域是整个 z 平面.

分式函数

$$w = f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m},$$

除了使分母等于零的那些 z 之外, 都是有意义的.

对于复指数函数、复三角函数等, 由于它们都失去了原来实变函数的意义, 必须另给定义.

复指数函数定义为

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

由此可定义复三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz});$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}.$$

必须注意, $|\sin z| \leq 1$ 与 $|\cos z| \leq 1$ 在复平面上不再有效. 例如,

$$\cos i = \frac{1}{2} (e^{-1} + e) > \frac{e}{2} > 1.$$

另外, 对数函数定义为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

复变函数的极限和连续

由于复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 事实上是两个二元实变函数 u 和 v 的一种组合, 所以, 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 分别在点 (x_0, y_0) 有极限 A_1 和 A_2 , 就称 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点有极限 $A = A_1 + iA_2$. 即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \{u(x, y) + iv(x, y)\} = A_1 + iA_2 = A.$$

特别, 当 $A_1 = u(x_0, y_0)$, $A_2 = v(x_0, y_0)$ 时, 即当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 为连续时, 就称 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点连续. 即

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \{u(x, y) + iv(x, y)\} \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0). \end{aligned}$$

因此, 有关实变函数的极限、连续的所有性质、法则, 都可以相应地搬到复变函数中来. 其中连续函数在闭区域上的最大(小)值定理, 应该理解为连续的复变函数模的最大(小)值定理.

习 题

1. 证明:

(1) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明它的几何意义;

(3) 实系数 n 次方程的复根必以共轭形式成对出现.

2. 讨论在哪些情形下 $z^* = |z|^2$, 在哪些情形下 $z^* \neq |z|^2$.

3. 写出下列不等式所确定的区域:

(1) $\operatorname{Re} z > 0$; (2) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$; (3) $|z-1| \leq 4$;

(4) $3 \leq |z| \leq 5$; (5) $|z-1| \leq |z+1|$.

4. 作出下列方程所表示的曲线:

(1) $|z-1|=2$; (2) $\operatorname{Re}(z^2)=a$;

(3) $|z-a| + |z-b| = c \quad (c > 0)$.

第二节 解析函数

一、解析函数的概念 柯西-黎曼方程

在电场、磁场及流体力学等的计算中, 我们遇到的是一类具有特殊性质的复变函数, 就是所谓解析函数. 这类函数在解实际问题中起着重要的作用, 也是复变函数论的主要研究对象.

解析函数的定义 设 $w=f(z)$ 是区域 D 上的一个函数, 当自变量在点 $z(\in D)$ 有一个改变量 Δz 时, 函数 w 相应地有一改变量 Δw , 如果极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在, 则称函数 $f(z)$ 在点 z 可导, 并称此极限为 $f(z)$ 在点 z 的导数 $f'(z)$ (或 $\frac{dw}{dz}$). 如果 $f(z)$ 在 D 内每一点都可导, 称 $f(z)$ 是 D 上的一个解析函数.

复变函数可导的定义与实变函数可导的定义在形式上是完全一样的, 因此, 在微积分中讨论过的有关导数的一些法则、公式, 如