高等院校成人教育系列教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

黄振耀 编著

上海财经大学出版社

高等院校成人教育系列教材

概率论与数理统计

黄淑耀 编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/黄振耀编著．—上海：上海财经大学出版社，2004.8

（高等院校成人教育系列教材）

ISBN 7-81098-160-9/O·003

Ⅰ.概…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.①概率论-高等教育：成人教育-教材 ②数理统计-高等教育：成人教育-教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 050837 号

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

黄振耀　编著

责任编辑　王　芳　　封面设计　优典工作室

上海财经大学出版社出版发行

（上海市武东路 321 号乙　邮编 200434）

网　　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

上海市印刷十厂印刷

上海商印装订厂装订

2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

890mm×1240mm　1/32　8 印张　230 千字

印数：0 001—4 000　　定价：15.00 元

总 序

成人教育是我国高等教育的重要组成部分,是传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度。大力发展成人教育是提高劳动者素质、振兴经济和推进教育现代化的重要环节。国家实行成人教育制度,鼓励发展多种形式的成人教育,建立与完善终身教育体系,培养大批贴近社会、服务社会的各类应用型人才,对于加强社会主义精神文明,促进社会进步和经济建设,都将起到重要作用。

按照教育部关于成人教育人才的培养目标,构建适用的教材体系,是成人教育在新形势下继续发展不可缺少的一环。经过编辑委员会、作者和出版社的共同努力,《高等院校成人教育系列教材》将陆续出版,我向他们表示诚挚的祝贺和感谢。

综观这套系列教材,具有以下特点:

1. 体现了高等院校成人教育的新思想和新观念,注重提高学生的思想道德素质、文化素质、业务素质和社会责任感。在我国高等教育发展与人力资源开发中,成人教育作为继续教育的一种重要形式和特殊层次,将发挥日趋重要的作用。

2. 体现学术性与应用性的统一。教学内容既有基础知识、基本理论,又有基本技能;既加强基本原理与应用知识的传授,又帮助学生在掌握一定知识理论的基础上,获得相应的技能。

3. 体现了系统性与针对性的统一。在学历教育中,应重视学科知识的系统性。同时,在兼顾学科知识内在逻辑性的基础上,选择最基

本、最有针对性和适用性的部分，进行合理的组织编排，使学生能在比较短的时间内，学到急需有用的知识。

4. 体现了理论和实践的统一。成人学习的目的是解决实践中存在的问题，改变自己现有的处境或状态，他们不仅需要知识，而且需要能立即付诸实施的能力。所以，本系列教材充分体现实践能力训练的要求，针对成人在职学习与就业需求的特点，加强职业就业与创业指导。

本系列教材涵盖会计、金融、财政、工商管理、法学等多个学科，由上海财经大学相关学科的教授、副教授与成人教育学院的骨干教师承担编写任务，注意吸收本校近年来的教学改革成果，普遍更新了教学内容，既以学历教育为主，又兼顾非学历职业培训。因此，本系列教材不仅能提供校内外各相关专业本、专科学历教育使用，也适合社会各界进行专业培训和自学参考。

当然，成人教育是一项系统工程，要真正抓好教学工作，还必须在运用教材过程中辅之以其他配套措施。我们为本系列教材确定的目标以及教材所要达到的各项要求，很可能超过了我们的学识和教学经验所容许的范围，因此，本系列教材可能存在考虑不周到以及安排和表达不妥当的地方，甚至某些失误恐亦难以避免，我们欢迎读者批评指正。

储敏伟

2004 年 2 月

前　言

概率论与数理统计是从数量方面研究随机现象的统计规律的一门课程，它是高等院校经济管理类专业的基础课之一。它是在经济管理、质量控制、数量经济学、信息论、预测理论和最优理论中有着广泛应用的基础课程。

本书是为了适应成人教育中的经济管理类专业本科段学生的实际学习需要而编写的经济数学系列教材之一。根据成人教育的特点，本书在编写中力求内容完整，做到重点突出、联系实际、由浅入深、通俗易懂，充分体现概率论与数理统计学科的系统性、科学性和实用性的要求。

本书可以作为高等院校经济管理类概率论与数理统计课程的教材或教学参考书，也可以作为高等教育自学考试中高等数学(二)课程的自学参考书。

本书在编写过程中，得到了学院领导和兄弟部门的大力支持和关心，在此谨表谢意。书中难免有错误和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004年6月

目　录

第一章

事件与概率

在社会活动和生产活动中，存在着大量的随机现象，概率论就是以随机现象为研究对象的。本章首先提出了概率论研究的对象、方法和目的，讨论概率论中的几个基本概念——样本空间、样本点、随机事件、必然事件和不可能事件以及事件与事件之间的关系，给出概率的定义和性质，重点讨论在古典概型下概率的计算以及概率的一些计算公式，最后推导出一种最常见的试验——贝努里试验下的二项概率公式。通过本章的学习，为以后的学习奠定良好的基础。

第一节　随机事件

一、随机现象

在自然界和人类社会中，存在两类不同的现象。

例如，在标准大气压下，水加热到 100℃时必然会沸腾；又如，在直角三角形中，勾 a、股 b、弦 c 之间的关系一定满足 $a^2+b^2=c^2$；等等。这类在一定条件下必然发生或必然不发生某一结果的现象，称为**决定性现象**。概率论以外的数学分支研究的就是决定性现象的数量规律。

另一类现象是在一定的条件下，可能出现这个结果，也可能出现那个结果，这种具有多种可能结果的现象称为**随机现象**。例如，在相同的条件下，抛掷 1 枚均匀硬币，可能是正面向上，也可能是反面向上；又

如，从某生产线上用同种工艺生产出来的灯泡寿命不尽相同；等等，都属于随机现象。

概率论是研究随机现象的数量规律性的一门数学分支。

二、随机试验

为了研究随机现象的数量规律性，必须对随机现象进行观察或做试验，在这里，我们将此观察或试验统称为**试验**。如果这个试验满足以下三个特点：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)每次试验的结果不止一个，且事先能明确知道试验的所有可能结果；

(3)在某次试验之前，不能确定这次试验会出现哪一个结果。

则称这类试验为随机试验，记为 E.

三、样本空间

随机试验 E 的每一个基本结果称为一个**基本事件**或称为**样本点**，记为 ω. 随机试验 E 的所有基本结果的全体称为**样本空间**，记为 Ω.

由随机试验的特点(2)可知，对每个随机试验，其样本空间是已知的。例如，抛掷 1 枚均匀硬币，其样本空间为 $\Omega=\{H,T\}$，其中，H 表示正面，T 表示反面；抛掷 2 枚均匀硬币，其样本空间为 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$. 又如，抛掷 1 颗骰子，其样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

四、事件

在随机试验中，我们感兴趣的是随机试验的结果。将试验的结果称为**事件**。例如，抛掷 1 颗骰子，“1 点”、“奇数点”、“大于 3 的点”、“点数大于 6”、“点数小于 7”等都是事件，它们都是样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个子集。

有些事件在每次试验中可能发生，也可能不发生，我们把这些事件

称为**随机事件**,记为 $A,B,C,\cdots,A_1,A_2,\cdots$. 例如,上例中的"1 点"、"奇数点"、"大于 3 的点"就是随机事件。基本事件是最简单的随机事件。

每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**,记为 Ω 或 U,如上例中的"点数小于 7"。

每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$或 V,如上例中的"点数大于 6"。

应该指出的是,无论是必然事件、不可能事件还是随机事件,都是相对于一定的随机试验而言的,如果试验条件变了,事件的性质也会发生改变。例如,掷 2 颗骰子时,"点数之和小于 7"是随机事件;而掷 10 颗骰子时,"点数之和小于 7"就是不可能事件。为讨论问题方便,将必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形,由此,将随机事件简称为**事件**。

因此,我们可以把事件定义为样本点的某个集合,称**某事件发生**当且仅当它所包含的某个样本点在试验中出现。

五、事件之间的关系

在一个样本空间中,显然有不止一个事件。概率论的任务之一就是由简单事件的概率推算出复杂事件的概率。因此,分析事件之间的关系,不仅可以帮助我们认识事件的本质,而且可以大大简化一些复杂事件的概率计算。

下面就讨论事件的关系和运算。

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即属于 A 的每一个样本点也都属于 B,则称事件 B **包含**事件 A,或称事件 A **含于**事件 B. 记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

显然,对任何事件 A,有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B,并且事件 B 包含事件 A,则称事件 A 与事

件 B **相等**,即事件 A 与事件 B 中所含的样本点完全相同。记为 $A=B$.

3. 事件的并

"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生",这一事件称为事件 A 与事件 B 的**并**。记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

显然,$A\cup B$ 含有事件 A 与事件 B 的所有样本点。

可将此推广为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并。即:"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生",称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并。记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

4. 事件的交

"事件 A 与事件 B 同时发生",这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**。记为 $A\cap B$ 或 AB.

显然,$A\cap B$ 含有同时属于事件 A 与事件 B 的所有样本点。

"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生",这一事件称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**交**。记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

5. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生",这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**。记为 $A-B$.

显然,$A-B$ 是由在事件 A 中但不在事件 B 中的样本点构成的。

6. 互斥事件

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生,即:

$$AB=\varnothing \tag{1.1}$$

则称事件 A 与事件 B 为**互斥的**或**互不相容的**。

互斥事件没有公共的样本点。显然,基本事件之间是互斥的。

7. 对立事件

如果事件 A 与事件 B 互斥,并且事件 A 与事件 B 中至少有一个一定发生,即 A 与 B 满足:

$$\begin{cases} AB=\varnothing \\ A\cup B=\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

则称事件 A 与事件 B 是**对立的**，或**互逆的**。此时，称事件 B 为事件 A 的对立事件，记为 $B=\overline{A}$. 同样，事件 A 也是事件 B 的对立事件，即 $A=\overline{B}$.

显然，以下等式成立：

$$\overline{\overline{A}}=A,\overline{A}=\Omega-A$$

$$A\overline{B}=A-B=A-AB$$

［**例 1.1**］ 抛掷 1 颗骰子的试验，观察出现的点数。设 A 表示“奇数点”，B 表示“点数小于 5”，C 表示“小于 5 的偶数点”。用集合的列举表示法表示下列事件：$\Omega,A,B,C,A\cup B,AB,A-B,B-A,\overline{A}$.

解：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$　$A=\{1,3,5\}$

$B=\{1,2,3,4\}$　$C=\{2,4\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$　$AB=\{1,3\}$

$A-B=\{5\}$　$B-A=\{2,4\}=C$　$\overline{A}=\{2,4,6\}$

注意　事件 A 与事件 C 是互斥的。

为了能更好地理解以上事件之间的关系和运算，一般可采用英国逻辑学家维恩(Venn)提供的表示关系的图示法，如图 1—1 所示。

可以证明，事件的运算满足以下运算规律：

(1)交换律。

$$A\cup B=B\cup A,AB=BA \tag{1.3}$$

(2)结合律。

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \tag{1.4}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \tag{1.5}$$

(3)分配律。

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C) \tag{1.6}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \tag{1.7}$$

(4)德摩根(De Morgan)定理。

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{1.8}$$

并且，可以推广为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形：

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n \tag{1.9}$$

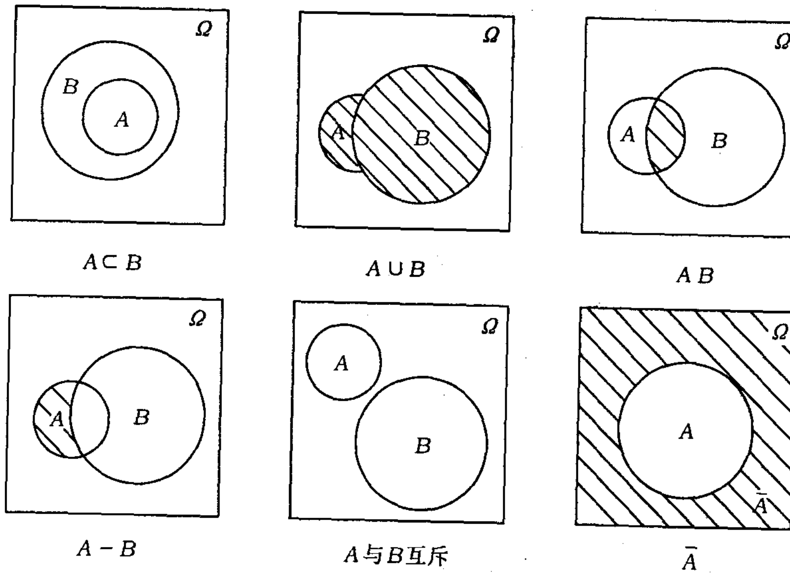

图 1—1　事件之间的关系

$$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n \tag{1.10}$$

由上述讨论可知，事件之间的关系和运算与集合论中的集合之间的关系和运算是完全一致的。但是，在概率论中，重要的是掌握用事件的语言来解释这些关系及运算，并会用这些关系及运算来表示各种事件。

[例 1.2]　设A,B,C是三个事件，一些事件的表示方法为：

(1)A发生而B,C都不发生：

$$A\overline{B}\,\overline{C}\text{ 或 }A-(B\cup C)\text{ 或 }A-B-C$$

(2)三个事件都发生：

$$ABC$$

(3)三个事件只发生一个：

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$$

(4)三个事件恰好发生两个：

$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$$

(5)三个事件中至少发生一个：

$A\cup B\cup C$或$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$

[例 1.3]　设$A_i(i=1,2,3)$表示第i个射手命中目标，试描述事件：$A_1A_2A_3$，$A_1\cup A_2\cup A_3$，$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，$\overline{A_1A_2A_3}$.

解　$A_1A_2A_3$表示三个射手都命中目标，$A_1\cup A_2\cup A_3$表示三个射手至少有一个命中目标，$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$表示三个射手都没有命中目标，$\overline{A_1A_2A_3}$表示三个射手中至少有一个没有命中目标。

第二节　概　率

一、频率与概率

我们虽然不能预先知道某一个随机事件在某次试验中是否发生，但是，我们知道，不同随机事件发生的可能性大小一般是不相同的。概率论就是研究某个具体事件发生的可能性大小。直观地讲，所谓"事件概率"，就是事件发生的可能性大小的一个度量。应该指出的是，这一度量——概率，是一个客观的、确定的值。

掌握事件发生的可能性大小，即事件概率的大小，应当在相同的条件下做大量试验去掌握其规律性。例如，在抛掷均匀硬币的试验中，历史上一些著名的统计学家曾经做过大量的试验，其结果如表 1－1 所示。

从表 1－1 中可以看到，"正面向上"发生的频率几乎接近于 0.5，并且抛掷的次数越多，频率越接近于 0.5.

一般来说，在相同的条件下，在所做的大量重复试验中，随机事件的频率具有一种稳定性，即一个随机事件A发生的频率k/n经常在某个固定的常数p附近摆动，一般随着试验次数的增多，这种摆动的幅度就越来越小。因此，频率的稳定性是随机事件本身固有的特性，说明了随机事件发生的可能性大小。我们称这个常数p为随机事件发生