全析丛书

高等数学

「(同济·第四版·下册)」

全析精解

符丽珍 刘克轩 主编

西北工業大學出版社

全析丛书

高等数学

（同济·第四版）

全析精解

（下册）

符丽珍　刘克轩　主编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过对大量有代表性的典型题目的分析和解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。

本书可作为高等院校理工科和经济学科本、专科生学习高等数学的学习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全析精解：同济．第四版/符丽珍，刘克轩主编．西安：西北工业大学出版社，2004.9

（全析丛书）

ISBN 7-5612-1813-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①符…　②刘…　Ⅲ．高等数学—高等学校—解题

Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 071241 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072

电　　话：(029)88493844，88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西东江印务有限公司

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张：21.875

字　　数：789 千字

版　　次：2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

定　　价：全书：30.00 元　本册：14.00 元

前言

高等数学是变量数学，它是研究运动、无限过程、高维空间和多因素作用的科学。高等数学课程是理工科院校本、专科生的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好高等数学课程，满足读者学习和考研的需要，我们根据多年的教学经验编写了这套书。

本书按同济大学编的《高等数学》的章节顺序，分为十二章，每章均设计了四个板块。

1. 内容点睛　列出了基本概念、重要定理和公式，突出考点的核心知识。

2. 常考题型　从历年本科生期末试题和全国硕士研究生入学试题中精选出典型题目，并进行了解答。

3. 习题精解　对同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第四版)的课后习题做了详细解答。因篇幅所限，对超出教学基本要求标“*”号的内容，仅对欧拉方程一节的习题做了解答。

4. 练习题及答案　为读者检查学习效果和应试能力所设计，并给出了答案。

最后的附录分上、下册共给出了四套高等数学期末考试真题及两套考研模拟试题，并附有答案。

本书通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和

解题技巧。这对于提高读者分析问题的能力、理解基本概念和理论、开拓解题思路、全面增强数学素质，会起到良好的效果。

全书共分上、下两册。参加编写的有符丽珍、刘克轩、肖亚兰、王雪芳、杨月茜、陆全，由符丽珍、刘克轩统稿并担任主编。

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2004 年 5 月

于西北工业大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

下 册

第8章 多元函数微分法及其应用

8.1 内容点睛

(一) 基本概念

1. 二元函数

定义域和对应关系是二元函数 $z=f(x,y)$ 的两要素．其定义域为平面上的点集．

2. 极限

函数 $z=f(x,y)$ 的极限为 A，是指点 (x,y) 以任何方式，沿任意路径趋于点 (x_0,y_0) 时，均有 $f(x,y)$ 趋于常数 A，记做 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$.

3. 连续

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续必须满足：(1) 在 $U(x_0,y_0)$ 内有定义；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 存在；(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$．三个条件缺一不可．否则，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续．

(二) 偏导数

1. 定义与计算

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，只要把 $z=f(x,y)$ 中的 y 暂时看做常量，而对 x 求导；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时，暂时把 x 看做常量，而对 y 求导．

2. 高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

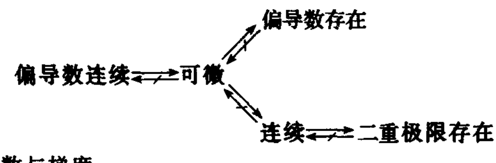
如果二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续，则在 D 内恒有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

（三）全微分

1. 定义与计算

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与 (x_0,y_0) 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的全微分 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y$. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$.

2. 二元函数连续、偏导数存在与可微的关系



3. 方向导数与梯度

(1) 方向导数：函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处沿方向 L 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α,β,γ 为方向 L 的方向角 .

(2) 梯度：函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处的梯度为

$$\mathbf{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

(四) 多元复合函数的导数

1. 多元复合函数的求导法则(链式法则)

若 $z=f(u,v), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 几种推广情形

(1) 若 $z=f(u,v,w)$,而 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y), w=w(x,y)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(2) 若 $z=f(u,x,y)$,而 $u=\varphi(x,y)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

注意:这里$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$不同,$\frac{\partial z}{\partial x}$是把复合函数 $f[\varphi(x,y),x,y]$ 中的 y 看做不变,而对 x 求偏导数;而$\frac{\partial f}{\partial x}$是把 $f(u,x,y)$ 中的 u,y 看做不变,而对 x 求偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$也有类似的区别.

(3) 设 $z=f(u,v,w)$,而 $u=\varphi(t), v=\psi(t), w=w(t)$,则复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$ 对 t 的导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$称做全导数,且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

(五) 隐函数求导法

通常有以下三种方法:

(1) 方程两边同时对自变量求导,然后解出所需的导数或偏导数. 由于因变量是自变量的函数,在此法中一定会用到链式法则.

(2) 公式法. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数,且

$F_z \neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

(3) 微分法．利用一阶全微分形式的不变性，方程两边同时求全微分，可以求出所需偏导数或导数．

(六) 微分法在几何上的应用

1. 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$，则曲线 Γ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

其中 $x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$.

2. 空间曲面的切平面与法线

(1) 设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，则曲面 Σ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

(2) 设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$，则 Σ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

(七) 多元函数极值问题

1. 二元函数 $z=f(x,y)$ 取得极值的必要条件

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$.

2. 二元函数极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(x_0,y_0)$ 内有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A,f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

(1) $AC-B^2>0$ 时有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，$A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能无极值.

3. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下极值的求法

(1) 降元法：从条件方程 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=y(x)$，代入 $z=f(x,y)$，即化为一元函数的极值问题.

(2) 拉格朗日乘数法：作 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$（$\lambda$ 为参数），再从方程组 $F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0$，$F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\varphi(x,y)=0$ 中解出 x,y，就是可能极值点.

8.2 常考题型

例 8-1 (1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试问在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 是否连续？偏导数是否存在？

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试问在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 的偏导数是否存在？是否可微？

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，其值随 k 而变，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

但
$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$，同理 $f_y(0,0)=0$.

但是 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\mathrm{d}y]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的偏导数存在，但不可微.

例 8-2 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 处的切线与 y 轴的夹角余弦.

解 令
$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$$
$$G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4$$

$$J=\begin{vmatrix}2y & 2z\\2y & -2z\end{vmatrix}=-8yz,\qquad J|_{(2,1,1)}=-8$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2x & 2z\\2x & -2z\end{vmatrix}_{(2,1,1)}=-\frac{1}{J}(-8xz)|_{(2,1,1)}=-2$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2y & 2x\\2y & 2x\end{vmatrix}=0$$

故切线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,-2,0\}$.

又 y 轴的方向向量为 $\boldsymbol{k}=\{0,1,0\}$，$\|\boldsymbol{s}\|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$，则切线与 y 轴的夹角余弦 $\cos\beta=\dfrac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{s}\|\,\|\boldsymbol{k}\|}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

例 8-3 求曲线 $x=t^2,y=\dfrac{8}{\sqrt{t}},z=4\sqrt{t}$ 在点 $(16,4,8)$ 处的法平面方程和切线方程.

解
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{8}{2}t^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\sqrt{t}}$$

在点 $(16,4,8)$ 处对应的参数 $t=4$，故法向量为 $\{8,-\dfrac{1}{2},1\}$，可取法向量为 $\{16,-1,2\}$，则法平面方程为

$$16(x-16)-(y-4)+2(z-8)=0$$

即
$$16x-y+2z=268$$

切线方程为
$$\frac{x-16}{16}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-8}{2}$$

例 8-4(1999 考研) 设 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\frac{dz}{dx}$.

解法 1 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导数得

$$\frac{dz}{dx}=f+xf'(1+\frac{dy}{dx}) \tag{1}$$

由 $F_x+F_y\frac{dy}{dx}+F_z\frac{dz}{dx}=0$ 解出 $\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x-F_z\frac{dz}{dx}}{F_y}$,代入式(1)有

$$\frac{dz}{dx}=f+xf'(1-\frac{F_x+F_z\frac{dz}{dx}}{F_y})$$

由此式解出
$$\frac{dz}{dx}=\frac{fF_y+xf'F_y-xF_xf'}{F_y+xf'F_z}$$

解法 2
$$dz=fdx+xdf=fdx+xf'(dx+dy) \tag{2}$$

由
$$dF=F_xdx+F_ydy+F_zdz=0$$

解出
$$dy=\frac{-F_zdz-F_xdx}{F_y}$$

代入式(2)得
$$dz=fdx+xf'(dx+\frac{-F_zdz-F_xdx}{F_y})$$

由此得
$$\frac{dz}{dx}=\frac{fF_y+xF_yf'-F_xxf'}{F_y+xf'F_z}$$

例 8-5(2000 考研) 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有连续二阶导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''(-\frac{x}{y^2})]+(-\frac{1}{y^2}f_2')+$$

$$\frac{1}{y}(f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2}))-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x}=$$

$$f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

例 8-6(2001 考研) 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微,且 $f(1,1)=1$,

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) = f(x, f(x,x))$，求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x))\mid_{x=1}$.

解
$$\varphi(1) = f(1, f(1,1)) = f(1,1) = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x)) = 3\varphi^2(x)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = 3\varphi^2(x)\{f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))\cdot[f_1'(x,x) + f_2'(x,x)]\}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x))\mid_{(1,1)} = 3\{f_1'(1, f(1,1)) + f_2'(1, f(1,1))\cdot[f_1'(1,1) + f_2'(1,1)]\} = 3\{f_1'(1,1) + f_2'(1,1)\cdot[f_1'(1,1) + f_2'(1,1)]\} = 3\{2 + 3[2+3]\} = 51$$

例 8-7(2003考研) 设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，又$g(x, y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 设$u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}$$

故
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

所以
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = x^2 + y^2$$

例 8-8 在曲面$z^2 = 2(x-1)^2 + (y-1)^2 (z > 0)$上求点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，使点$P_1$到原点$O$的距离为最短，并且证明该曲面在点$P_1$处的法线与向量$\overrightarrow{OP_1}$平行.

解 目标函数为$f = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$，约束条件为$z^2 = 2(x-1)^2 + (y-1)^2$，化为无条件极值为
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2(x-1)^2 + (y-1)^2, \quad (x,y) \in R^2$$
$$\begin{cases} f_x = 2x + 4(x-1) = 0 \\ f_y = 2y + 2(y-1) = 0 \end{cases} \text{解出惟一驻点} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

代入曲面方程得 $z_1 = \dfrac{\sqrt{17}}{6}$(舍去负值).

$A = f_{xx}(x_1, y_1) = 6, B = f_{xy}(x_1, y_1) = 0, C = f_{yy}(x_1, y_1) = 4$,因为 $AC - B^2 = 24 > 0$,且 $A > 0$,所以在点 $P_1\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{17}}{6}\right)$ 处取得最短距离 $d = \dfrac{\sqrt{42}}{6}$.

或由题意,原点 O 到上半椭圆 $z^2 = 2(x-1)^2 + (y-1)^2 (z > 0)$ 存在最小距离,所以 $f(x,y)$ 在惟一驻点处达到最小值.

令
$$F(x,y,z) = 2(x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2$$
所以
$$F_x(P_1) = -\frac{4}{3}, \quad F_y(P_1) = -1$$
$$F_z(P_1) = \frac{-\sqrt{17}}{3}, \quad \overrightarrow{OP_1} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{17}}{6}\right\}$$
曲面在点 P_1 处法向量 $\boldsymbol{n} = -2\left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{17}}{6}\right\} /\!/ \overrightarrow{OP_1}$.

例 8-9 在椭球面 $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$ 的第一卦限上求一点,使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小.

解 设(x_0, y_0, z_0)是椭球面第一卦限部分上的点,则切平面方程为
$$x_0 x + y_0 y + \frac{1}{4} z_0 z = 1$$
设目标函数为
$$f = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{16}{z_0^2}$$
约束条件为
$$x_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{4} z_0^2 - 1 = 0$$
令
$$F = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{16}{z_0^2} + \lambda\left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{4} z_0^2 - 1\right)$$
由
$$\begin{cases} F_{x_0} = -\dfrac{2}{x_0^3} + 2\lambda x_0 = 0 \\ F_{y_0} = -\dfrac{2}{y_0^3} + 2\lambda y_0 = 0 \\ F_{z_0} = -\dfrac{32}{z_0^3} + \dfrac{\lambda}{2} z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + \dfrac{1}{4} z_0^2 = 1 \end{cases}$$

解之得
$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \sqrt{2}$$

由实际问题知$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$为所求点.

例 8-10(2000 考研) 假定某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数分别为 $P_1 = 18 - 2Q_1$, $P_2 = 12 - Q_2$,其中 P_1 和 P_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨),Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量,单位:吨),并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C = 2Q + 5$,其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量,即
$$Q = Q_1 + Q_2$$

(1) 如果该企业实行价格差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量和价格,使该企业获得最大利润.

(2) 如果该企业实行价格无差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量及其统一价格,使该企业的总利润最大化;并比较两种价格策略下的总利润大小.

解 (1) 总利润函数
$$L = R - C = P_1Q_1 + P_2Q_2 - (2Q + 5) =$$
$$-2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5$$
令 $L'_{Q_1} = -4Q_1 + 16 = 0$, $L'_{Q_2} = -2Q_2 + 10 = 0$,解得 $Q_1 = 4$, $Q_2 = 5$,则 $P_1 = 10$(万元/吨),$P_2 = 7$(万元/吨). 由于驻点惟一,根据问题的实际意义,故最大值必在驻点达到,最大利润为 $L = 52$(万元).

(2) 若实行价格无差别策略,则 $P_1 = P_2$,于是有约束条件:$2Q_1 - Q_2 = 6$. 构造拉格朗日函数
$$F(Q_1, Q_2) = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5 + \lambda(2Q_1 - Q_2 - 6)$$
令
$$\begin{cases} F_{Q_1} = -4Q_1 + 16 + 2\lambda = 0 \\ F_{Q_2} = -2Q_2 + 10 - \lambda = 0 \\ 2Q_1 - Q_2 - 6 = 0 \end{cases}$$
解得 $Q_1 = 5$, $Q_2 = 4$, $\lambda = 2$,则 $P_1 = P_2 = 8$,最大利润
$$L = -2 \times 5^2 - 4^2 + 16 \times 5 + 10 \times 4 - 5 = 49(\text{万元})$$
由上述可知,企业实行差别定价所得总利润要大于统一价格的总利润.

例 8-11(2002 考研) 设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 平面,其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leqslant 75\}$,小山的高度函数为

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com