

微积分

复习及解题指导

主 编 方照琴
副主编 张 彤 施晓燕 卢 军

浙江大学出版社

微积分复习及 解题指导

主 编 方照琴

副主编 张 彤 施晓燕 卢 军

浙江大學出版社

内容提要

为了帮助学生总结、梳理微积分主要内容和知识点,进一步理解基本概念、掌握基本计算、提高解题能力和技巧,我们编写了《微积分复习及解题指导》,本书与吴迪光、张彬教授主编的教材《微积分》、《高等数学教程》配套,共分八篇,前七篇每篇包括基本概念、基本计算、综合与证明、应用问题和综合测试五部分内容,第八篇为习题选解,所选习题全部来自上述配套教材,书末附有期中、期末考试模拟试卷共12份,供学生复习自测。

图书在版编目(CIP)数据

微积分复习及解题指导/方照琴主编. —杭州:浙江大学出版社,2004.8

ISBN 7-308-03765-7

I. 微... II. 方... III. 微积分—高等学校—教学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 067673 号

责任编辑 樊晓燕

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

经 销 浙江省新华书店

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 15.75

字 数 380 千

版 印 次 2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次

印 数 0001—3000

书 号 ISBN 7-308-03765-7/O·313

定 价 24.00 元

前 言

微积分是大学本科各专业的主要基础课程之一。在学习微积分的过程中,面对越来越多的定义、定理和计算公式,你需要及时地进行梳理和总结;在解题时如果碰到困难,你需要参考一些范例以获得解题思路;期末时在全面复习的基础上你一定很希望做一套模拟试卷,试试你的实力。这本篇幅不大的《微积分复习及解题指导》正是为了满足你的上述需求和愿望而编写的。

本书是与吴迪光、张彬教授编著的浙江大学出版社 2003 年版的教材《微积分》(上、下册)(简称教材 I)和《高等数学教程》(简称教材 II)配套的学习指导书,也可与其他大学本科微积分学教材配套。全书共分八篇,前七篇与教材 I 相对应,其内容分别为微积分研究的主要对象与工具、一元函数的微分学、一元函数的积分学、常微分方程、多元函数的微分学、多元函数的积分学和无穷级数,第八篇为习题选解。

本书的编写有如下特点:

1. 每篇均以基本内容一览表开头,使得该篇的主要内容和知识点一目了然,便于读者在复习时梳理和记忆。

2. 每篇主要内容均分基本概念、基本计算、综合证明和应用四个栏目。

基本概念——叙述定义、定理和性质,配有相关的选择题、填充题。

基本计算——列出计算公式和法则,分类型按方法选取典型例题,并注意基本技巧和一题多解,拓宽学生思路。

综合证明——分析解题思路,注重综合能力。

应用——注重数学概念的实际意义,注重数学建模的思想方法和应用能力。

3. 本书第八篇为习题选解,题目全部选自配套教材 I 和教材 II,所选题目难度适中,解答规范,可供学生作为仿照之模型。

4. 本书每篇结尾有一份综合测验题,供读者练习之用。为了配合学生期中、期末复习考试和自我检查,本书附有微积分 A(理工类)、微积分 B(经管类)期中、期末模拟试卷共 12 份。

本书的编写人员有:浙江工业大学方照琴(第二篇,第五篇的第一部分,第六篇的第二部分),张彤(第五篇的第二部分,微积分期末模拟试卷 8 份),施晓燕(第三篇,微积分 B 期中模拟试卷 2 份),卢军(第四篇,微积分 A 期中模拟试卷 2 份),邱巨岳(第一篇),陆建芳(第六篇的第一部分),王勤(第七篇),第八篇习题选解由浙江大学城市学院赵雅困、黄外斌完成。全书由方照琴负责统稿。

本书的编写得到了浙江工业大学之江学院和浙江大学城市学院领导的大力支持。本书是在丁善瑞教授和张彬教授倡议下组织编写的,他们对本书的整体构想和具体内容提出了许多宝贵的意见,对他们的关心、鼓励和帮助我们表示衷心的感谢。本书书稿 2003—2004 学年在浙江工业大学之江学院理工类、经管类各专业中试用,得到之江学院数学教研室老师和试用班级学生的热情支持,楼敏老师对部分书稿作了认真仔细的校对,在此一并表示感谢。

方照琴

2004 年 6 月 18 日

目 录

第一篇 微积分研究的主要对象与工具

——函数、极限与连续

基本内容一览表	1
一、基本概念	2
1. 映射与函数	2
2. 数列极限	3
3. 函数极限	5
4. 函数连续性	9
二、基本计算	10
1. 极限计算	10
2. 函数间断点求法及类型的判别	19
三、综合题与证明题举例	19
题型一 利用极限表达函数并讨论其性质	19
题型二 利用无穷小比较求极限或确定极限式中的参数	20
题型三 利用连续函数的性质证明命题	22
四、应用	23
综合测试题一	24

第二篇 一元函数微分学

基本内容一览表	26
一、基本概念	27
1. 导数与微分	27
2. 中值定理	28
3. 极值、极值点与驻点关系	30
二、基本计算	31
1. 导数与微分计算	31
2. 单调区间、极值,凹凸区间和拐点,最大最小值的求法	34
3. 利用洛必达法则求极限	36
4. 曲率计算	39
三、综合题、证明题举例	40
1. 中值等式、不等式证明	40
2. 函数性态研究	43
3. 方程根的讨论	43

四、应用	45
1. 变化率与相关变化率	45
2. 最大值最小值应用题举例	47
3. 经济上的应用	48
综合测试题二	49

第三篇 一元函数积分学

基本内容一览表	51
一、基本概念	52
1. 不定积分	52
2. 定积分	53
3. 微积分基本定理	55
4. 广义积分	56
二、基本计算	57
1. 求不定积分	57
2. 定积分计算	64
3. 用定义计算广义积分或判定其敛散性	67
三、综合题与证明题举例	68
1. 变上限积分求导数以及与此有关的极限问题	68
2. 求变上限积分有关的极值或最值	69
3. 利用换元法或分部积分法证明积分等式	69
4. 证明包含积分的不等式	71
四、应用	73
1. 元素法	73
2. 元素法在几何中的应用	74
3. 元素法在物理中的应用	77
综合测试题三	79

第四篇 常微分方程

基本内容一览表	81
一、基本概念	82
1. 微分方程与解	82
2. 微分方程的类型	82
3. 线性微分方程解的结构	82
二、基本计算	83
1. 解一阶微分方程的基本方法	83
2. 高阶微分方程	85

三、综合题与证明题举例	86
1. 一题含多类方程的题型	86
2. 一题多解题型	87
3. 凑微分题型	87
4. 变量代换题型	87
5. 积分方程题型	88
四、应用	88
1. 微分方程的几何应用	88
2. 微分方程的物理应用	89
综合测试题四	90

第五篇 多元函数微分学

第一部分 向量代数与空间解析几何

基本内容一览表	92
一、基本概念	92
1. 向量的概念及运算	92
2. 空间曲面与空间曲线的方程	94
3. 平面与直线	96
二、基本计算	98
1. 向量代数的基本运算	98
2. 各种条件下平面方程的求法	99
3. 各种条件下直线方程的求法	100
三、综合题与证明题举例	101
1. 平面、直线综合题举例	101
2. 空间立体及其在坐标面上的投影	102
综合测试题五(一)	103

第二部分 多元函数微分学及其应用

基本内容一览表	106
一、基本概念	106
1. 函数、极限与连续	106
2. 偏导数与全微分	108
3. 方向导数与梯度	110
4. 极值	111
二、基本计算	112
1. 简单显函数的微分法	112
2. 复合函数微分法	113
3. 隐函数微分法	115
4. 极值的计算	117
三、综合题与证明题举例	118

1. 多元复合函数、隐函数求偏导综合题型	118
2. 全微分与微分方程、变限积分综合题型	120
四、应用	121
1. 微分法在几何上的应用	121
2. 求最大值最小值的应用题	123
综合测试题五(二)	125

第六篇 多元函数的积分学

第一部分 多元实值函数积分

基本内容一览表	127
一、基本概念	127
1. 二重积分	127
2. 三重积分	129
3. 第一类曲线积分	130
4. 第一类曲面积分	131
二、基本计算	131
1. 二重积分的计算	131
2. 三重积分计算	134
3. 第一类曲线积分的计算	137
4. 第一类曲面积分的计算	138
三、综合与证明题举例	139
1. 多元实值函数的各类积分计算	139
2. 二重积分的证明	142
四、应用	142
1. 几何应用	142
2. 物理应用	144
综合测试题六(一)	145

第二部分 多元向量值函数的积分

基本内容一览表	148
一、基本概念	148
1. 第二类曲线积分	148
2. 第二类曲面积分	151
二、基本计算	153
1. 第二类曲线积分的计算	153
2. 原函数求法和全微分方程解法	156
3. 第二类曲面积分的计算	158
三、综合题与证明题举例	162
1. 利用曲线积分计算二重积分和平面图形的面积	162
2. 曲线积分与常微分方程综合题型	163

3. 曲面积分与多元函数微分学综合题型	163
4. 曲面积分与旋转曲面、旋转体的综合题型	164
5. 曲线积分与最大最小值综合题型	164
四、应用	165
第二类曲线积分和曲面积分的应用	165
综合测试题六(二)	167

第七篇 无 穷 级 数

基本内容一览表	169
一、基本概念	170
1. 常数项级数	170
2. 正项级数	170
3. 交错级数	171
4. 任意项级数	172
5. 函数项级数与幂级数	174
6. 傅里叶级数	176
二、基本计算	177
1. 级数收敛性判别方法	177
2. 幂级数收敛半径、收敛域、和函数的求法	180
3. 函数的幂级数展开	182
4. 傅里叶级数展开式	184
三、综合证明	186
1. 级数收敛性综合题	186
2. 级数收敛半径、收敛域、和函数举例	187
四、应用	188
1. 函数值的近似计算	188
2. 级数在积分计算中的应用	189
综合测试题七	189

第八篇 习 题 选 解

选解一 微积分研究的主要对象与工具	191
选解二 一元函数的微分学	194
选解三 一元函数的积分学	197
选解四 常微分方程	200
选解五 多元函数的微分学	202
选解六 多元函数的积分学	205
选解七 无穷级数	209
选解八 教材 II 题目选解	214

附 录 一

微积分 A 第一学期期中考试模拟试卷	216
微积分 A 第一学期期末考试模拟试卷	218
微积分 A 第一学期期末考试全真试卷	220
微积分 B 第一学期期中考试模拟试卷	222
微积分 B 第一学期期末考试模拟试卷	224
微积分 B 第一学期期末考试全真试卷	226

附 录 二

微积分 A 第二学期期中考试模拟试卷	228
微积分 A 第二学期期末考试模拟试卷	230
微积分 A 第二学期期末考试全真试卷	232
微积分 B 第二学期期中考试模拟试卷	234
微积分 B 第二学期期末考试模拟试卷	236
微积分 B 第二学期期末考试全真试卷	238

第一篇 微积分研究的主要对象与工具

——函数、极限与连续

基本内容一览表

基 本 概 念	1. 映射与函数 (1) 映射与函数 (2) 函数特性(有界性、单调性、奇偶性、周期性) (3) 复合函数 (4) 初等函数 (5) 分段函数
	2. 数列极限 (1) 数列极限定义($\epsilon - N$) (2) 收敛数列性质(惟一性、有界性、保号性、子数列收敛性) (3) 数列极限存在的判别准则 I, II (4) 数列极限运算法则 (5) 重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
	3. 函数极限 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的 $\epsilon - \delta$ 定义, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的 $\epsilon - M$ 定义 (2) 函数极限的四则运算法则 (3) 两个重要极限 (4) 无穷小定义、性质、比较和无穷小的阶 (5) 等价无穷小公式
	4. 函数连续性 (1) 连续定义 (2) 间断点类型及判定 (3) 连续函数重要性质(最大最小值定理、介值定理)
基 本 计 算	1. 极限计算的各种方法 (1) 利用极限运算法则、函数的连续性和初等变形 (2) $\frac{0}{0}$ 型的“消零因子法” (3) $\frac{\infty}{\infty}$ 型的“无穷大分离法” (4) 利用等价无穷小替代 (5) 利用两个重要极限 (6) 利用夹逼原理 (7) 利用单调有界数列必有极限 (8) 分段函数极限求法
	2. 间断点求法及类型的判别
综 合 证 明	1. 以极限形式表达函数 2. 确定极限式中所含的参数 3. 与介值定理、最大最小值定理有关的证明
应 用	函数关系式的建立

一、基本概念

1. 映射与函数

(1) 映射与函数定义

设 A, B 是两个非空集合, 如果按照法则 f 使得对每一个元素 $x \in A$, 都有惟一的元素 $y \in B$ 与之对应, 则称 f 是从集合 A 到 B 的映射. 若 A, B 为非零实数集合, 则从 A 到 B 的映射 f 称为一元实值函数, 记为 $y = f(x)$, $x \in A$.

(2) 函数的特征

有界性: $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, $x \in A$ 成立, 称 $f(x)$ 在 A 上有界.

单调性: $\forall x_1, x_2 \in A$, 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 A 上严格单调增加 (或严格单调减少).

奇偶性: 若函数 $f(x)$ 的定义域 A 关于原点对称, 若 $\forall x \in A$, 都有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

周期性: $\forall x \in A$, $x + T \in A$ (T 为非零常数), 使 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数.

(3) 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, $u = g(x)$ 的值域为 $R(g)$, $D(f) \cap R(g)$ 为非空集, 则 y 通过 u 构成 x 的函数称为复合函数 $y = f(g(x))$.

(4) 初等函数

由基本初等函数 (常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数) 经过有限次加、减、乘、除与复合运算所能得到的函数称为初等函数.

(5) 分段函数

在定义域不相重叠的真子集上, 用不同的数学式来表示法则 f 的函数, 称为分段函数.

相关例题

例 1 () 是无界的.

(A) $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内

(B) $\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(C) $\frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$

(D) $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内

解 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, $x \in (0, +\infty)$, $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界;

$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界;

$0 < \frac{1}{x} < 1$, $x \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有界;

因为 $\forall M > 1$, 存在 $0 < x_0 < \frac{1}{M} < 1$, 使得 $\frac{1}{x_0} > M$, 故 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界, 故选 (D).

例 2 将复合函数 $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 分解为基本初等函数 () 是准确的.

(A) $y = e^{u^2}$, $u = \sin w$, $w = \frac{1}{x}$

(B) $y = e^u$, $u = \sin^2 w$, $w = \frac{1}{x}$

$$(C) y = e^u, u = v^2, v = \sin \frac{1}{x} \quad (D) y = e^u, u = v^2, v = \sin w, w = \frac{1}{x}$$

解 (A) 中 $y = e^u$ 不是基本初等函数, 它是由 $y = e^v, v = u^2$ 复合而成的初等函数, 故排除(A).

(B) 中 $u = \sin^2 w$ 不是基本初等函数, 它是由 $u = v^2, v = \sin w$ 复合而成的初等函数, 故排除(B).

(C) 中 $v = \sin \frac{1}{x}$ 不是基本初等函数, 它是由 $v = \sin w, w = \frac{1}{x}$ 复合而成的初等函数, 故排除(C).

所以选(D).

注意: 复合函数的分解是否准确直接影响到第二篇中复合函数求导的准确性.

例3 (1) 图 1-1 中, 表示折线 ABCDE 的函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 在图 1-1 中, 若直线 $l(x=t)$ 从 $t=-2$ 到 $t=2$ 连续平行移动时, 阴影部分的面积是 t 的函数, 则 $S(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解 (1) } f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(2) S(t) = \begin{cases} 0 & -2 \leq t < -1 \\ \frac{1}{2}(1+t)^2 & -1 \leq t < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-t)^2 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

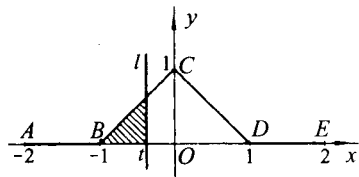


图 1-1

注意: 类似于例 3 的分段函数在后续课程“概率论”中非常有用.

例4 下列函数中()是非奇非偶函数.

$$(A) f(x) = x^3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(B) f(x) = 1 + \sin^3 x$$

$$(C) f(x) = g(\sin x), \text{ 其中 } g(u) \text{ 为偶函数}$$

$$(D) f(x) = \begin{cases} x+1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

解 奇函数图像关于原点对称, 偶函数图像关于 y 轴对称. 作图可知(D)中分段函数 $f(x)$ 的图形关于原点对称, 故(D)中函数 $f(x)$ 为奇函数.

(A) 中 x^3 为奇函数, $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 也为奇函数, 故(A)中 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $f(-x) = g(\sin(-x)) = g(-\sin x) = g(\sin x)$, 故(C)中 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $y = \sin^3 x$ 为奇函数, 但 $y = 1$ 为偶函数, 故(B)中函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 所以选(B).

2. 数列极限

(1) 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$, 恒有 $|u_n - a| < \varepsilon$. 其几何意义是: 对于任意给定的正数 ε , 无论它是多么小, 总有数列 u_n 中的某一项(u_n), 从这项开始, 以后的一切项所表示的点全都落在点 a 的 ε 邻域内, 即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内.

(2) 收敛数列性质

惟一性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$, 则 $a = b$.

有界性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 则存在 $M > 0$, 使 $|u_n| \leq M$, 对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立.

保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a > 0$, 则 $\exists N, \forall n > N$, 恒有 $u_n > 0$.

子数列收敛性: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Leftrightarrow$ 对任一子数列 $\{u_{n_k}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = a$.

注意: 1° 数列有界不一定有极限. 例如 $u_n = (-1)^n$. 因为 $|u_n| = 1 < 2$, 所以 u_n 有界, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 不存在.

2° $\forall n, u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \geq 0$.

(3) 数列极限存在的判定准则

夹逼准则: 若 $u_n \leq v_n \leq w_n (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$.

单调有界准则: 若数列 $\{u_n\}$ 单调增(单调减)且有上界(有下界), 则数列 $\{u_n\}$ 必有极限.

(4) 运算法则

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$ 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = ab$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

(5) 重要极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

相关例题

例 5 填空题

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{10}}{(1-n)^7 (2n-1)^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a + (-1)^n} \quad (a > 1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+1} \right)^n = e^a, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (1) 分子分母除以 n^{10} , 原极限 $= \frac{2^{10}}{(-1)^7 2^3} = -2^7$.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \\ = e \cdot e^{-1} = 1.$$

$$(3) \sqrt[n]{a-1} \leq \sqrt[n]{a+(-1)^n} \leq \sqrt[n]{a+1}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a-1} = 1 \quad (a > 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a+1} = 1,$$

由夹逼准则, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a+(-1)^n} = 1 \quad (a > 1).$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{4}} \right]^{\frac{4n}{n+1}} = e^4,$$

故 $a = 4$.

例 6 下列数列极限不存在的是().

$$(A) u_n = \frac{1}{n^p} \quad (p > 0) \qquad (B) u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ 为奇数} \\ -\frac{1}{3^n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(C) u_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0) \qquad (D) u_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$, 故排除(A),(C).

(B)中当 n 为奇数时 $u_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$; 当 n 为偶数时 $u_n = -\frac{1}{3^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(D)中 $u_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, 令 $n = 2k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin k\pi = 0$; 令 $n = 4k + 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{4k+1}{2}\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$; 令 $n = 4k + 3 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{4k+3}{2}\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ 不存在, 选(D).

例 7 下列叙述中()是准确的.

(A) 如果常数 A 的任意小邻域内都有 u_n 的无穷多个点, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 则 u_n 必有上界

(C) 若 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 都存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 也一定存在

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a > 0$, 则 u_n 必有下界 0

解 (A)不准确. 例如 $u_n = (-1)^n$ 在 1 的任意小邻域内有 u_n 的无穷多个点($u_{2k}, k = 1, 2, \dots$), 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 不存在.

(C)不准确. 夹逼准则条件(1) $x_n \leq y_n \leq z_n$, (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 不但存在而且相等, 才有结论 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在.

例如: 令 $x_n = -\frac{n+1}{n}$, $y_n = (-1)^n$, $z_n = \frac{n+1}{n}$,

显然 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在.

(D)不准确. u_n 有下界 0 的定义是 $\forall n, u_n \geq 0$, 而保号性的意思是若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a > 0$, 则必有某个 N 存在, 使当 $n > N$ 时恒有 $u_n > 0$, 并非 $\forall n, u_n > 0$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 必有 u_n 有界, 即 u_n 既有上界又有下界, 故(B)准确, 选(B).

3. 函数极限

(1) 函数极限定义

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的 $\epsilon - \delta$ 定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的 $\varepsilon - M$ 定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 当 $|x| > M$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

单侧极限

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 的定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

其余函数极限的定义由读者自己仿照.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

(2) 函数极限的四则运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

(3) 两个重要极限

函数极限夹逼准则:

① $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, ② $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 其等价形式为 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$.

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 其等价形式为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(4) 无穷小量

定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

性质: 1° 有限个无穷小量之和仍为无穷小量 (但无限个无穷小量之和不一定是无穷小).

例如: $\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} + \cdots$ $n \rightarrow \infty$ 时, 每一项都是无穷小, 但它们的和, 即

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2° 无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量 $\Rightarrow \begin{cases} \text{无穷小量乘以常数仍为无穷小;} \\ \text{有限个无穷小之积仍为无穷小.} \end{cases}$

3° 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是不为零的无穷小量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量 ($x \rightarrow x_0$).

无穷小的阶: 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 都是无穷小量, 且 $\beta(x) \neq 0$, 若存在正常数 k 使得 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量.

若 $k = 1$, 使 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

特别地若 $C = 1$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o[\beta(x)]$.

等价无穷小公式: 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

若 $\alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$, 则当以 $\alpha(x)$ 替代 x 时, 上述各式结论仍成立.

相关例题

例 8 下列极限中()等于 1.

$$(A) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x \quad (B) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \quad (C) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x \quad (D) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

解 (A), (D) 极限为 0 (利用有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量).

因为令 $x_n = n\pi \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \sin n\pi = 0$;

令 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$ 不存在.

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \text{ 故选 (B).}$$

注意: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 为 $\frac{0}{0}$ 型重要极限, 只要 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \text{ 仍成立.}$$

1° $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 0$ 是错误运算, 因为极限乘法法则要求只有

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 和 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x)$ 均存在, 才能有 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x)$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$