微积分

复习及解题指导

主　编　方照琴
副主编　张　彤　施晓燕　卢　军

浙江大學出版社

微积分复习及解题指导

主　编　方照琴

副主编　张　彤　施晓燕　卢　军

浙江大學出版社

内容提要

为了帮助学生总结、梳理微积分主要内容和知识点，进一步理解基本概念、掌握基本计算、提高解题能力和技巧，我们编写了《微积分复习及解题指导》，本书与吴迪光、张彬教授主编的教材《微积分》、《高等数学教程》配套，共分八篇，前七篇每篇包括基本概念、基本计算、综合与证明、应用问题和综合测试五部分内容，第八篇为习题选解，所选习题全部来自上述配套教材，书末附有期中、期末考试模拟试卷共12份，供学生复习自测。

图书在版编目(CIP)数据

微积分复习及解题指导/方照琴主编. —杭州：浙江大学出版社，2004.8

ISBN 7-308-03765-7

Ⅰ.微… Ⅱ.方… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第067673号

责任编辑 樊晓燕

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路38号 邮政编码310027)

(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址：http://www.zjupress.com)

经　　销 浙江省新华书店

排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷 杭州杭新印务有限公司

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 15.75

字　　数 380千

版 印 次 2004年8月第1版 2004年8月第1次

印　　数 0001—3000

书　　号 ISBN 7-308-03765-7/O·313

定　　价 24.00元

前 言

微积分是大学本科各专业的主要基础课程之一。在学习微积分的过程中，面对越来越多的定义、定理和计算公式，你需要及时地进行梳理和总结；在解题时如果碰到困难，你需要参考一些范例以获得解题思路；期末时在全面复习的基础上你一定很希望做一套模拟试卷，试试你的实力。这本篇幅不大的《微积分复习及解题指导》正是为了满足你的上述需求和愿望而编写的。

本书是与吴迪光、张彬教授编著的浙江大学出版社 2003 年版的教材《微积分》（上、下册）（简称教材Ⅰ）和《高等数学教程》（简称教材Ⅱ）配套的学习指导书，也可与其他大学本科微积分学教材配套。全书共分八篇，前七篇与教材Ⅰ相对应，其内容分别为微积分研究的主要对象与工具、一元函数的微学分、一元函数的积分学、常微分方程、多元函数的微分学、多元函数的积分学和无穷级数，第八篇为习题选解。

本书的编写有如下特点：

1. 每篇均以基本内容一览表开头，使得该篇的主要内容和知识点一目了然，便于读者在复习时梳理和记忆。

2. 每篇主要内容均分基本概念、基本计算、综合证明和应用四个栏目。

基本概念——叙述定义、定理和性质，配有相关的选择题、填充题。

基本计算——列出计算公式和法则，分类型按方法选取典型例题，并注意基本技巧和一题多解，拓宽学生思路。

综合证明——分析解题思路，注重综合能力。

应用——注重数学概念的实际意义，注重数学建模的思想方法和应用能力。

3. 本书第八篇为习题选解，题目全部选自配套教材Ⅰ和教材Ⅱ，所选题目难度适中，解答规范，可供学生作为仿照之模型。

4. 本书每篇结尾有一份综合测验题，供读者练习之用。为了配合学生期中、期末复习考试和自我检查，本书附有微积分 A（理工类）、微积分 B（经管类）期中、期末模拟试卷共 12 份。

本书的编写人员有：浙江工业大学方照琴（第二篇，第五篇的第一部分，第六篇的第二部分），张彤（第五篇的第二部分，微积分期末模拟试卷 8 份），施晓燕（第三篇，微积分 B 期中模拟试卷 2 份），卢军（第四篇，微积分 A 期中模拟试卷 2 份），邱巨岳（第一篇），陆建芳（第六篇的第一部分），王勤（第七篇），第八篇习题选解由浙江大学城市学院赵雅囡、黄外斌完成。全书由方照琴负责统稿。

本书的编写得到了浙江工业大学之江学院和浙江大学城市学院领导的大力支持。本书是在丁善瑞教授和张彬教授创议下组织编写的，他们对本书的整体构想和具体内容提出了许多宝贵的意见，对他们的关心、鼓励和帮助我们表示衷心的感谢。本书书稿 2003—2004 学年在浙江工业大学之江学院理工类、经管类各专业中试用，得到之江学院数学教研室老师和试用班级学生的热情支持，楼敏老师对部分书稿作了认真仔细的校对，在此一并表示感谢。

方照琴

2004 年 6 月 18 日

目　　录

第一篇　微积分研究的主要对象与工具

——函数、极限与连续

第二篇　一元函数微分学

第三篇　一元函数积分学

第四篇　常微分方程

第五篇　多元函数微分学

第一部分　向量代数与空间解析几何

第二部分　多元函数微分学及其应用

第六篇 多元函数的积分学

第一部分 多元实值函数积分

第二部分 多元向量值函数的积分

第七篇　无穷级数

第八篇　习题选解

附 录 一

附 录 二

第一篇　微积分研究的主要对象与工具

——函数、极限与连续

基本内容一览表

基本概念	1. 映射与函数 (1) 映射与函数 (2) 函数特性(有界性、单调性、奇偶性、周期性) (3) 复合函数 (4) 初等函数 (5) 分段函数
	2. 数列极限 (1) 数列极限定义($\varepsilon - N$) (2) 收敛数列性质(惟一性、有界性、保号性、子数列收敛性) (3) 数列极限存在的判别准则Ⅰ,Ⅱ (4) 数列极限运算法则 (5) 重要极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
	3. 函数极限 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的 $\varepsilon - \delta$ 定义,$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的 $\varepsilon - M$ 定义 (2) 函数极限的四则运算法则 (3) 两个重要极限 (4) 无穷小定义、性质、比较和无穷小的阶 (5) 等价无穷小公式
	4. 函数连续性 (1) 连续定义 (2) 间断点类型及判定 (3) 连续函数重要性质(最大最小值定理、介值定理)
基本计算	1. 极限计算的各种方法 (1) 利用极限运算法则、函数的连续性和初等变形 (2) $\frac{0}{0}$型的"消零因子法"　(3) $\frac{\infty}{\infty}$型的"无穷大分离法" (4) 利用等价无穷小替代　(5) 利用两个重要极限 (6) 利用夹逼原理　(7) 利用单调有界数列必有极限 (8) 分段函数极限求法
	2. 间断点求法及类型的判别
综合证明	1. 以极限形式表达函数 2. 确定极限式中所含的参数 3. 与介值定理、最大最小值定理有关的证明
应用	函数关系式的建立

一、基本概念

1. 映射与函数

(1) 映射与函数定义

设 A,B 是两个非空集合,如果按照法则 f 使得对每一个元素 $x\in A$,都有惟一的元素 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是从集合 A 到 B 的映射. 若 A,B 为非零实数集合,则从 A 到 B 的映射 f 称为一元实值函数,记为 $y=f(x)$, $x\in A$.

(2) 函数的特征

有界性: $\exists M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in A$ 成立,称 $f(x)$在 A 上有界.

单调性: $\forall x_1, x_2\in A$,且 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在 A 上严格单调增加(或严格单调减少).

奇偶性: 若函数 $f(x)$的定义域 A 关于原点对称,若 $\forall x\in A$,都有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

周期性: $\forall x\in A$, $x+T\in A$ (T 为非零常数),使 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为以 T 为周期的周期函数.

(3) 复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,$u=g(x)$ 的值域为 $R(g)$,$D(f)\cap R(g)$ 为非空集,则 y 通过 u 构成 x 的函数称为复合函数 $y=f(g(x))$.

(4) 初等函数

由基本初等函数(常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次加、减、乘、除与复合运算所能得到的函数称为初等函数.

(5) 分段函数

在定义域不相重叠的真子集上,用不同的数学式来表示法则 f 的函数,称为分段函数.

相关例题

例 1 (　　)是无界的.

(A) $\sin\dfrac{1}{x}$在$(0, +\infty)$内　　(B) $\arctan x$ 在$(-\infty, +\infty)$内

(C) $\dfrac{1}{x}$在$(1, +\infty)$　　(D) $\dfrac{1}{x}$在$(0, 1)$内

解 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$, $x\in(0,+\infty)$, $\sin\dfrac{1}{x}$ 在$(0, +\infty)$内有界;

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $\arctan x$ 在$(-\infty, +\infty)$内有界;

$0<\dfrac{1}{x}<1$, $x\in(1,+\infty)$, $\dfrac{1}{x}$在$(1, +\infty)$内有界;

因为 $\forall M>1$,存在 $0<x_0<\dfrac{1}{M}<1$,使得$\dfrac{1}{x_0}>M$, 故$\dfrac{1}{x}$在$(0, 1)$上无界,故选(D).

例 2 将复合函数 $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 分解为基本初等函数(　　)是准确的.

(A) $y=e^{u^2}$, $u=\sin w$, $w=\dfrac{1}{x}$　　(B) $y=e^u$, $u=\sin^2 w$, $w=\dfrac{1}{x}$

(C) $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \sin\dfrac{1}{x}$　　　(D) $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \sin w$, $w = \dfrac{1}{x}$

解　(A)中 $y = e^{u^2}$ 不是基本初等函数，它是由 $y = e^v$, $v = u^2$ 复合而成的初等函数，故排除(A).

(B)中 $u = \sin^2 w$ 不是基本初等函数，它是由 $u = v^2$, $v = \sin w$ 复合而成的初等函数，故排除(B).

(C)中 $v = \sin\dfrac{1}{x}$ 不是基本初等函数，它是由 $v = \sin w$, $w = \dfrac{1}{x}$ 复合而成的初等函数，故排除(C).

所以选(D).

注意：复合函数的分解是否准确直接影响到第二篇中复合函数求导的准确性.

例 3　(1) 图 1-1 中，表示折线 $ABCDE$ 的函数 $f(x) =$ ________.

(2) 在图 1-1 中，若直线 $l(x = t)$ 从 $t = -2$ 到 $t = 2$ 连续平行移动时，阴影部分的面积是 t 的函数，则 $S(t) =$ ________.

解　(1) $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leqslant x < -1 \\ x + 1 & -1 \leqslant x < 0 \\ -x + 1 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

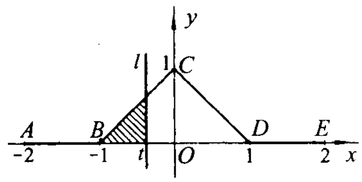

图 1-1

(2) $S(t) = \begin{cases} 0 & -2 \leqslant t < -1 \\ \dfrac{1}{2}(1 + t)^2 & -1 \leqslant t < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(1 - t)^2 & 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$

注意：类似于例 3 的分段函数在后续课程“概率论”中非常有用.

例 4　下列函数中(　　)是非奇非偶函数.

(A) $f(x) = x^3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$　　　(B) $f(x) = 1 + \sin^3 x$

(C) $f(x) = g(\sin x)$，其中 $g(u)$ 为偶函数　　　(D) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 < x \leqslant \pi \\ 0 & x = 0 \\ x - 1 & -\pi \leqslant x < 0 \end{cases}$

解　奇函数图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称. 作图可知(D)中分段函数 $f(x)$ 的图形关于原点对称，故(D)中函数 $f(x)$ 为奇函数.

(A)中 x^3 为奇函数，$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 也为奇函数，故(A)中 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $f(-x) = g(\sin(-x)) = g(-\sin x) = g(\sin x)$，故(C)中 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $y = \sin^3 x$ 为奇函数，但 $y = 1$ 为偶函数，故(B)中函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，所以选(B).

2. 数列极限

(1) 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$，恒有 $|u_n - a| < \varepsilon$. 其几何意义是：对于任意给定的正数 ε，无论它是多么小，总有数列 u_n 中的某一项 (u_n)，从这项开始，以后的一切项所表示的点全都落在点 a 的 ε 邻域内，即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内.

(2) 收敛数列性质

惟一性：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，又$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=b$，则 $a=b$.

有界性：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，则存在 $M>0$，使 $|u_n|\leqslant M$，对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a>0$，则 $\exists N,\forall n>N$，恒有 $u_n>0$.

子数列收敛性：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\Leftrightarrow$ 对任一子数列$\{u_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=a$.

注意：1°　数列有界不一定有极限. 例如 $u_n=(-1)^n$. 因为 $|u_n|=1<2$，所以 u_n 有界，但$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

2°　$\forall n$，$u_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\geqslant0$.

(3) 数列极限存在的判定准则

夹逼准则：若 $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n(u=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=a$.

单调有界准则：若数列$\{u_n\}$单调增(单调减)且有上界(有下界)，则数列$\{u_n\}$必有极限.

(4) 运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=b$ 则

$$\lim_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n\pm\lim_{n\to\infty}v_n=a\pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_nv_n)=\lim_{n\to\infty}u_n\cdot\lim_{n\to\infty}v_n=ab$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to\infty}v_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq0)$$

(5) 重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

相关例题

例 5　填充题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^{10}}{(1-n)^7(2n-1)^3}=$ ________.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=$ ________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a+(-1)^n}\ (a>1)=$ ________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^a$，则 $a=$ ________.

解　(1) 分子分母除以 n^{10}，原极限$=\dfrac{2^{10}}{(-1)^7 2^3}=-2^7$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1.$$

(3) $\sqrt[n]{a-1}\leqslant\sqrt[n]{a+(-1)^n}\leqslant\sqrt[n]{a+1}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a-1}=1\ (a>1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a+1}=1$，

由夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a+(-1)^n}=1\ (a>1).$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right]^{\frac{4n}{n+1}}=e^4$,

故 $a=4$.

例 6　下列数列极限不存在的是(　　)。

(A) $u_n=\dfrac{1}{n^p}\ (p>0)$　　(B) $u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{-1}{3^n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

(C) $u_n=\sqrt[n]{a}\ (a>0)$　　(D) $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0\ (p>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$，故排除(A),(C).

(B)中当 n 为奇数时 $u_n=\dfrac{1}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$；当 n 为偶数时 $u_n=\dfrac{-1}{3^n}\to 0\ (n\to\infty)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(D)中 $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$，令 $n=2k\ (k=1,2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sin k\pi=0$；令 $n=4k+1\ (k=0,1,2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sin\dfrac{4k+1}{2}\pi=\lim\limits_{k\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；令 $n=4k+3\ (k=0,1,2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sin\dfrac{4k+3}{2}\pi=\lim\limits_{k\to\infty}\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 不存在，选(D).

例 7　下列叙述中(　　)是准确的.

(A) 如果常数 A 的任意小邻域内都有 u_n 的无穷多个点，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，则 u_n 必有上界

(C) 若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 都存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 也一定存在

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a>0$，则 u_n 必有下界 0

解　(A)不准确. 例如 $u_n=(-1)^n$ 在 1 的任意小邻域内有 u_n 的无穷多个点(u_{2k}, $k=1,2,\cdots$)，但 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

(C) 不准确. 夹逼准则条件(1) $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 不但存在而且相等，才有结论 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在.

例如：令 $x_n=-\dfrac{n+1}{n}$，$y_n=(-1)^n$，$z_n=\dfrac{n+1}{n}$，

显然 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在.

(D) 不准确. u_n 有下界 0 的定义是 $\forall n$，$u_n\geqslant 0$，而保号性的意思是若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a>0$，则必有某个 N 存在，使当 $n>N$ 时恒有 $u_n>0$，并非 $\forall n$，$u_n>0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，必有 u_n 有界，即 u_n 既有上界又有下界，故(B)准确，选(B).

3. 函数极限

(1) 函数极限定义

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定义：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的 $\varepsilon - M$ 定义:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$,当 $|x| > M$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

单侧极限

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 的定义:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 的定义:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

其余函数极限的定义由读者自己仿照.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

(2) 函数极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = AB$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$$

(3) 两个重要极限

函数极限夹逼准则:

① $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, ② $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

重要极限Ⅰ　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,其等价形式为 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = 1$.

重要极限Ⅱ　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$,其等价形式为 $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

(4) 无穷小量

定义: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ 称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

性质: 1° 有限个无穷小量之和仍为无穷小量(但无限个无穷小量之和不一定是无穷小).

例如: $\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3} + \cdots$　$n \to \infty$ 时,每一项都是无穷小,但它们的和,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

2° 无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量 $\Rightarrow \begin{cases}\text{无穷小量乘以常数仍为无穷小;} \\ \text{有限个无穷小之积仍为无穷小.}\end{cases}$

3° 设 $x\to x_0$ 时，$f(x)$是不为零的无穷小量，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量($x\to x_0$).

无穷小的阶：设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是无穷小量，且 $\beta(x)\neq 0$，若存在正常数 k 使得$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$，则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$是关于 $\beta(x)$的 k 阶无穷小量.

若 $k=1$，使$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$与 $\beta(x)$为同阶无穷小.

特别地若 $C=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$与 $\beta(x)$为等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是比 $\beta(x)$的高价无穷小，记为 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$.

等价无穷小公式：当 $x\to 0$ 时

$$\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim x$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ \tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$$

$$e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,\ a\neq 1)$$

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2},\ \sqrt[\alpha]{1+x}-1\sim\frac{x}{\alpha}$$

若 $\alpha(x)\to 0(x\to x_0)$，则当以 $\alpha(x)$替代 x 时，上述各式结论仍成立.

相关例题

例 8　下列极限中(　　)等于 1.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$　　(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

解　(A)，(D)极限为 0(利用有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量).

因为令 $x_n=n\pi\to\infty(n\to\infty)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\sin x_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin n\pi=0$；

令 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n\sin x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\infty$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$ 不存在.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，故选(B).

注意：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 为$\dfrac{0}{0}$ 型重要极限，只要 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，$\alpha(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ 仍成立.

1°　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$ 是错误运算，因为极限乘法法则要求只有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$ 均存在，才能有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$，而$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$