排列与组合

的解题方法

排列与组合的解题方法

陈 敏 孝

广 东 人 民 出 版 社

封面设计　杨白子

责任编辑　蔺光仪

排列与组合的解题方法

陈敏孝

*

广 东 人 民 出 版 社 出 版

广 东 省 新 华 书 店 发 行

韶 关 新 华 印 刷 厂 印 刷

787×1092毫米32开本　5.5印张　107,000字

1983年8月第1版　1983年8月第1次印刷

印数 1—26,350册

书号7111·1256　定价0.60元

前　言

排列和组合知识，在高中数学中，占有相当重要的地位．它不仅可帮助我们解决一些实际问题，还为学习二项式定理、行列式以及概率初步知识打下必要的基础（概率初步知识，是学习现代应用数学之一——概率论和数理统计的必备知识）．但这部分知识在教和学两方面，都有一定的困难，这是因为：

一、排列和组合新的概念较多，同学们一时对概念的本质属性和概念间的相互关系，较难掌握；

二、本单元知识具有独立性，从内容方面来说，它和前后章节没有不可分割的联系；从解题方法来说，和以往章节有所不同；而且对于解题分析的正确性，也不象方程那样容易进行验算；

三、在遇到实际问题时：

1.形式繁多，没有固定的公式可套用，如选取元素较多，则排列、组合的种数势必巨大烦多，例如，智力游戏工具——“魔方”，现在已风行世界各国，魔方在手里转来转去，它的各种图案的排列总数究竟有多少呢？

根据数学家们的精确计算，它一共有

$$\frac{8!\times 3^8\times 12!\times 2^{12}}{12}$$

$$=43,252,003,274,489,856,000$$

$$=4.325\times 10^{19}$$ * 种图案排列！

这是一个多么巨大惊人的数字！这么大的答数，一般不易通过直观来进行验算；

2. 属于排列问题还是组合问题不容易分清；

3. 容易重复一部分计算；或者遗漏一部分计算；或者既发生重复计算又发生遗漏计算.

出现这些现象的原因，从根本上来说，是没有牢固地掌握排列和组合的基本概念. 因此，学习时首先应明确排列和组合这两个概念的本质属性及其相互联系，从一些基本问题来判断它是属于排列问题，还是组合问题，这是学好排列、组合的根本性问题. 其次，在牢固掌握了这两个概念的基础上，进而学会运用“加法原理”、“乘法原理”，即掌握好在什么条件下用“乘”，什么条件下用“加”，这是运用排列、组合知识解决实际问题的关键。

本书在上述各方面，都作了详细介绍. 书中内容，力求通俗易懂，数形或图表结合，便于读者由感性认识转化到理性认识，特别对应用问题的分析，由浅入深，作了较细致的推敲. 此外，考虑到排列、组合和线性代数中行列式有联系，还略谈了一点“排列的奇偶性”.

为了帮助读者进一步掌握已学过的排列和组合知识，在附录Ⅰ中列入了精选的一些必要的练习题，附录Ⅱ是这些题

* 谈祥柏：《魔方的由来及其在数学上的意义》。

的参考解答或答案，读者可根据情况选用，

赵宪初老师对书稿提出了宝贵的意见，在此表示衷心地感谢！

殷切地希望读者批评指正。

编　　者

一九八三年五月于上海

目　　录

一、排列、组合的基本概念

（一）排列的基本概念

1. 排列的定义

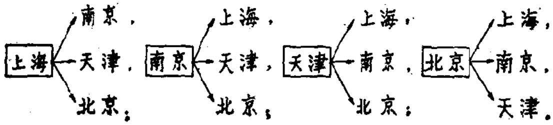
先看下面两个例子：

【例一】 沪京铁路线上有四个大站，上海、南京、天津、北京，可以发售多少种不同的火车票？

【解】 回答这个问题并不难，因为任何一个站都与其他三个站畅通，显然可以发售三种不同的火车票，所以一共可以发售

$$4 \times 3 = 12$$

种火车票。具体见下表（站名外加方框的表示起点站）：



这12种火车票，就是从四个大站中，每次取二个，按照一定的顺序排列的，即起点站在前、终点站在后排成一列而得到的.

【例二】 有数字1，2，3的三张卡片(简称数卡)，每次三张全部取出，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

【解】 这个问题的思考性，要比〔例一〕强一些.我们作这样的分析：将取出来的三张数卡排列时，要充分考虑到每一张数卡，都可排在百位、十位以及个位的数位上。就拿数卡(1)来说，1排在百位数数位上，其余二张数卡排在十位数数位、个位数数位上，就有2种排法；同理，1分别排在其他两个数位上，其余二张数卡排在余下的两个数位上，又都各有2种排法。因此，共有6种排法，就是6个不同的三位数。具体见下表：

三张数卡排列成三位数表

百位数数位	十位数数位	个位数数位	三位数
(1)	3	2	1 3 2
(1)	2	3	1 2 3
2	(1)	3	2 1 3
3	(1)	2	3 1 2
2	3	(1)	2 3 1
3	2	(1)	3 2 1

从上面这个表里，我们还可以看到：

数卡 1 排在百位数数位上，有 2 种排法；

数卡 2 排在百位数数位上，有 2 种排法；

数卡 3 排在百位数数位上，有 2 种排法.

把上面每一张数卡排在百位数数位上(或者其他数位上)的排列方法数加起来，共有 6 种排列方法；这恰好等于任何一张数卡，排在各个数位上所得排列方法的总数. 这是一个十分重要的性质，对于认识排列的属性和学好排列，有相当大的帮助.

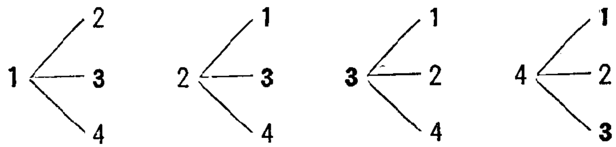
一般地，对“排列”作如下的定义：

排列的定义 从$m(m\in N)$个不同元素(人，数字，物件等)里，每次取$n(n\in N$，且$n\leqslant m)$个，按照一定的顺序排成一列，叫做从m个不同元素里每次取n个元素的一种排列.

根据排列的定义，从m个不同元素里，每次取n个的两种不同的排列，是指两种排列里所含的元素不完全一样（完全不一样，显然是不同的排列). 如〔例一〕中上海—北京和上海—南京，就是两种不同的排列；或者所含的元素完全一样，而排列的顺序不同，如〔例二〕中1 3 2，1 2 3，也是不同的排列。

【例三】 从 1，2，3，4 的四张数卡中，写出：(1) 每次取二张，可以组成多少个不同的两位数？(2) 每次取三张，可以组成多少个不同的三位数？

【解】(1) 从每一张数卡都可排在十位数数位上着手，1 排在十位数数位上的有 3 种排法；同理，2、3、4 排在十位数数位上的各有 3 种排法。具体见下面的折线图：

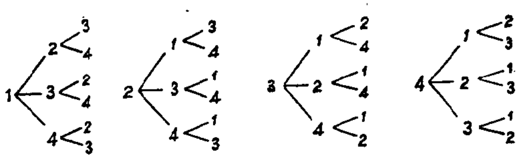


从上面的图中可知，共有12种排列，即12个两位数：

1 2，1 3，1 4；2 1，2 3，2 4；

3 1，3 2，3 4，4 1，4 2，4 3.

（2） 在分析(1)的基础上，就易于写出，就拿一种排列“12”来说，我们不妨设 1 指定排在百位数数位上，2 指定排在十位数数位上，就有两种排列(123，124)，其余的同理可求。具体看下面的折线图：



从上图可知，共有24种排列，即24个没有重复数字的三位数：

1 2 3，1 2 4，1 3 2，1 3 4，1 4 2，1 4 3；

2 1 3，2 1 4，2 3 1，2 3 4，2 4 1，2 4 3；

3 1 2，3 1 4，3 2 1，3 2 4，3 4 2，3 4 1；

4 1 2，4 1 3，4 2 1，4 2 3，4 3 1，4 3 2.

2. 两个基本原理

在上面〔例三〕的计算中，我们已经感到烦难．如果元素越多，取出的元素也较多，排列时就越感到烦难，所以很有必要寻求出解答问题的一般方法．下面介绍在排列、组合解题时，经常用到的两个基本原理．

先看下面的例子：

【例一】 有一个“数字”，用三种工具（电子计算机、计算尺、算盘）都分别可以计算出；用笔计算（初等数学方法、高等数学方法）也都可以分别计算出；查表也可得到．试问获得这一数字有几种不同的方法？

【解】 获得这一数字有三类办法，一类办法用工具计算出；一类办法用笔计算出；一类办法查表得到．因为用工具计算有 3 种方法；用笔计算有 2 种方法；查表有 1 种方法；每一种方法都能获得这一数字，所以共有

$$3+2+1=6$$

种不同的方法．

一般地有如下的原理：

加法原理 如果完成某一事件，有n类办法，用第一类办法去完成有m_1种方法，用第二类办法去完成有m_2种方法，…，用第n类办法去完成有m_n种方法，**不论用哪种方法，都可以独立地完成这一事件**，那末完成这事件总共有$m_1+m_2+\cdots+m_n$种方法．

再看下面的例子：

【例二】 从甲站到乙站有 2 条路（图 1 中用a_1，a_2表示）

可以通行，从乙站到丙站又有3条路(图1中用b_1，b_2, b_3表示)可以通行，试问从甲站经过乙站到丙站，有多少种走法(多少条路)?

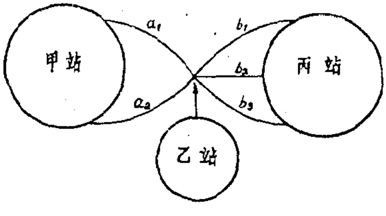


图1

【解】 从甲站到乙站，有2种走法(a_1，a_2)；

从乙站到丙站，有3种走法(b_1，b_2，b_3)。

由于从甲站到乙站的每1种走法，再继续从乙站到丙站，都各有3种走法，所以从甲站经乙站到丙站，共有

$$2\times 3=6$$

种走法。

即

$$a_1b_1，a_1b_2，a_1b_3，a_2b_1，a_2b_2，a_2b_3。$$

一般地有如下的原理：

乘法原理 如果完成某一事件，需要分成n个步骤，完成第一个步骤有m_1种方法，完成第二个步骤有m_2种方法，…，完成第n个步骤有m_n种方法，**必须完成每一个步骤，这事件才能算完成**，那末完成这事件共有$m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot\cdots\cdot m_n$种方法.

上面两个原理(或称为基本计算法则)，对于排列、组合公式的推求以及在排列、组合问题的计算中，有着广泛的应

用价值，深刻理解这两个原理，对于学好排列、组合，有着十分重要的意义.

3. 求排列的种数的公式

从m个不同的元素里，每次取出n个，按照一定的顺序排列，所有不同的排列数用符号A_m^n*表示. 现在我们来推求A_m^n这一公式.

设有m个不同的元素

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$$

和n个已编好号的位置.

从其中先任选一个元素排在第一个位置，显然，有m种方法；排在第二个位置的元素只能从m－1个元素中选一个(因为在第一位置已被一个元素占去，还余m－1个元素)，有m－1种方法；这样推下去，选第三个、第四个、…、第n个位置的元素的方法数，分别是m－2、m－3、…、m－(n－1).

即

位　置	第一个	第二个	第三个	…	第n个
方法数	m	m－1	m－2	…	m－(n－1)

根据乘法原理，它们的排列总数是n个位置排列方法数的积.

---

* A_m^n也有写成P_m^n或mAn的，A是英文名词Arrangement的第一个字母.

亦即

$$\boxed{A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)} \qquad (1)$$

这就是说，从m个不同的元素里每次取出n个元素，所有的排列种数等于n个连续自然数的积，其中最大的一个是m.

当$n=m$时，就是把m个不同的元素每次全部取出的排列，这样的排列叫做**全排列**. m个不同的元素的全排列，通常用符号P_m*表示。

于是，公式(1)就可写成

$$\begin{aligned}P_m = A_m^m &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-m+1)\\ &= m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\\ &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-2)(m-1)m.\end{aligned}$$

这就是说，m个不同的元素所有的全排列的种数等于自然数1到m的积. 这个积通常用m!表示，"m!"读做"m的阶乘". 所以，m个元素的所有全排列的种数的公式，可以写成

$$\boxed{P_m = m!} \qquad (2)$$

将(1)的右式乘以$(m-n)!$，再除以$(m-n)!$，就得到

$$\boxed{\begin{aligned}A_m^n &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!}\\ &= \frac{m!}{(m-n)!}.\end{aligned}} \qquad (3)$$

---

* P_m，P是英文名词Permutation的第一个字母。

公式(3)是计算A_m^n的一个经常用的公式，为了使公式(3)在$n=m$时，也能成立，我们规定$0!=1$.

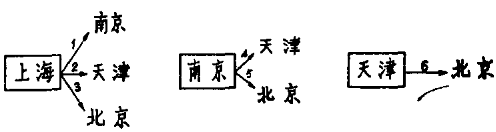
(二)组合的基本概念

1.组合的定义

先看下面两个例子：

【例一】 沪京铁路线上有四个大站，上海、南京、天津、北京，发售火车票，可以有几种不同的票价？

【解】 回答这个问题并不难，我们这样思考：任何一个站可以发售三种车票，这样，四个站就有十二种车票．因为每两站往返的车票票价相等，属于一种票价，所以要除以2，得到6种不同的票价．具体见下图：



【例二】 有数字1、2、3、4的四张卡片，每次取出三张卡片相加，可以组成多少个不相等的和？

【解】 从四张数卡中，每次取三张，有4种情况：