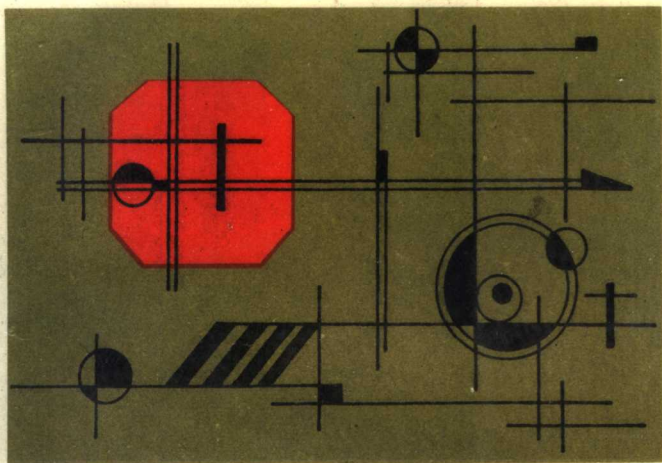


北京教育丛书



中学立体几何教学

●李振纯 陈萃联 马成瑞 ●北京教育出版社

北京教育丛书

中学立体几何教学

李振纯

陈萃联 著

马成瑞

北京教育出版社

中学立体几何教学

zhōngxué lìtǐjīhé jiàoxué

李振纯 陈萃联 马成瑞 著

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码: 100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京市平谷县胶印厂印刷

787 × 1092 毫米 32 开本 6.125 印张 125000 字

1991 年 11 月第 1 版

1991 年 11 月第 1 次印刷

印数: 1 ~ 7000 册

ISBN 7-5303-0240-x/G · 218

定价: 3.65 元

内 容 · 提 要

中学立体几何是学生感觉难学，教师感觉难教的学科之一。《中学立体几何》这本书是三位作者，在几十年的教学实践中，针对教学中存在的普遍问题研究探索总结整理而成。全书包括如何培养学生的学习兴趣、能力；教学方法论分析；概念和定理教学等。内容广泛涉及立体几何教学中的各个方面。材料丰富，实用性很强。

北京教育丛书

周谷城题



《北京教育丛书》编辑委员会

顾 问：李 晨 韩作黎

主 编：汪家镠

副主编：姚幼钧 杨玉民 张鸿顺 温寒江 白 耀
张觉民

编 委：（以姓氏笔划为序）

于洪波	王 平	王光裕	王洪权	王桂生
王家骏	王碧霖	方道霖	白 耀	叶钟玮
乔 震	汤世雄	杨玉民	汪家镠	张觉民
张鸿顺	陈清泉	陈境孔	林 慈	范小韵
罗玉圃	金德全	贺水葵	赵正中	姚幼钧
胡红星	钟善基	徐仁声	萧 沅	阎立钦
曹福海	梁慧霞	温寒江		

序

徐 惟 诚

教育事业的重要，已经日益被愈来愈多的人认识了。

中国要振兴，归根到底要靠我们中国人自己努力奋斗，要靠我们的全体劳动者创造出数十倍于今日的劳动生产率。这是一个全体国民素质提高的过程，人们自然要寄希望于教育。

要搞好教育，需要做许多事情，其中最根本的还是要靠人，靠教师，尤其是担负着国民基础教育任务的中小学教师。

教师的重担，关系着祖国未来的命运，也关系着每一个教育对象未来的命运。他们所教的学生在未来的社会条件下，究竟怎样做人，怎样立身处事，能不能用自己的双手为社会做出贡献，从而也创造自己的幸福生活，在相当大的程度上取决于在青少年时代所受到的教育。

我们知道，人，是世上已知物质发展的最高形态。关于人的意识、观念、智力的形成和发展的规律，我们离知道得很清楚还有很大的距离。社会主义的教育科学需要有一个大发展，这是毫无疑义的。

在教书育人第一线工作的广大中小学教师，对社会主义

教育科学的发展应当有特殊的贡献。他们当中的许多人把一辈子的心血都用来为祖国培育后代，造就人才，积累了丰富的经验。这些经验理当成为整个教育战线的共同财富。可是由于种种原因，这件总结和传播经验的工作过去做得还很不够。为此，中共北京市委和北京市人民政府决定，拨出专款，指定专人组成编委会，编辑出版一套《北京教育丛书》。这个决定受到广大中小幼教师的欢迎和支持。在短短一年多时间内，已经报来几百部书稿。又有一批热心而有经验的同志担任编审工作，看来任务是可以完成的。

我们相信，《北京教育丛书》的编辑出版，对于鼓励广大教师钻研业务，积累经验，对于传播和交流这些经验，对于推动教育科学研究，对于提高普通教育的水平，都是有积极作用的。同时，这套丛书的出版，也将有助于人们认识教师所作的艰苦的、创造性的劳动。

改革和建设的大潮在祖国大地上汹涌澎湃，每天都有许多新问题提到我们面前来，也把许多新问题提到我们的教育工作者面前。这是一个需要有许多新创造的时代。教育战线上的同志们为祖国的振兴所建立的功绩，是不会被人们忘记的。

前 言

在数学教学实践中，我们有两点感触较深。一是怎样让学生爱学、乐此不疲；一是怎样让学生会学，其中大有学问。我们接触到一些学生，常常为记不住公式、法则和不会解题而苦恼。有的学生说“数学这门学科就像抽象派绘画一样令人费解”，有的说“‘数学是上帝用来书写宇宙的文字’（迦俐略），这是我最信仰的话，但是将来我绝不学数学”。我们有一个共同的心愿，希望学生通过数学课的学习变得更聪明，希望我们的学生对数学课也能爱学、乐学，甚至产生如醉如痴的兴趣。

在我们多年教学实践中，为了让学生爱学、会学，我们进行了一些探索，把我们认为正确的教学指导思想和行之有效的教学方法记录下来整理成书，奉献给青年教师，并希望与广大的数学教师们进行进一步的探讨。教育教学无止境，只顾攀登莫问高，愿与广大教师共同切磋。

本书由李振纯主编，参加编写的有陈萃联、马成瑞。全书由张振江审定。

不当之处，欢迎指正。

作者：1991年4月

目 录

第一章 立体几何教学中的几个问题	(1)
一 激发学生学习的兴趣.....	(2)
二 培养能力是立体几何教学的主要任务之一	(6)
三 概念教学概述	(21)
四 定理教学概述	(27)
第二章 直线与平面中概念的教学	(47)
一 两个基本概念——平面和异面直线.....	(47)
二 立体几何中的各种角.....	(57)
三 立体几何中的各类距离.....	(63)
四 两种重要的位置关系——平行、垂直.....	(66)
第三章 多面体与旋转体中概念的教学	(70)
一 棱柱与圆柱.....	(71)
二 棱锥与圆锥.....	(74)
三 棱台与圆台.....	(78)
四 球.....	(81)
五 截面	(84)
第四章 直线与平面有关定理及其应用的教学	(90)
一 平面的基本性质.....	(90)
二 异面直线距离.....	(100)
三 三垂线定理.....	(111)
四 二面角大小的计算.....	(120)

第五章 多面体与旋转体中定理及其应用的教学	(129)
一 面积与体积公式及其推导	(129)
二 等积法与割补法	(150)
三 截面、展开图、平移与旋转在立体几何 解题中的作用	(157)
第六章 总复习的教学	(166)
一 整理、巩固、运用、提高	(166)
二 直线和平面知识的归纳整理	(170)
三 多面体和旋转体知识的归纳整理	(183)

第一章

立体几何教学中的几个问题

立体几何是研究空间图形的基本性质和数量关系的学科。按我国教学大纲规定，立体几何的教学要求有三条：(1)掌握直线和平面在空间的位置关系、简单的多面体和旋转体的概念、性质，以及其表面积和体积的计算公式，能够运用这些知识解决有关问题。(2)掌握涉及直线和平面各种位置关系的图形画法，以及简单多面体和旋转体的直观图画法。(3)通过空间图形的概念、性质和画法的学习，逐步发展学生的空间想象能力，进一步培养学生的逻辑思维能力。

统观整个中学数学，可总结为“六关”、“六法”、“六思想”。六关即用字母表示数，反映从算术到代数的飞跃；形式逻辑三段论，反映从代数到几何的飞跃；函数概念的形成与发展，反映从常量数学到变量数学的飞跃；空间观念的形成，反映从平面到空间的飞跃；坐标法研究曲线，反映推理几何到解析几何的飞跃；极限理论，反映从有限到无限的飞跃等。“六法”指的是配方法、换元法、待定系数法、判别式法、反证法、数学归纳法等六个数学通法。“六思想”指的是字母表示数的思想、逻辑推理的思想、方程与函数的思想、集合与对应的思想、分解与组合的思想、转化与交换的思想等。在立体几何

教学中,为了贯彻教学大纲要求,树立相应的数学思想,掌握相应的数学方法,完成从平面到空间这一飞跃,我们认为要解决好以下几个问题。

一 激发学生学习的兴趣

学习兴趣是学习动机中一个最活跃的因素。对于青少年来说,没有兴趣的学习是消磨智慧的“苦役”。怎样让学生对中学数学中较难学的立体几何感兴趣呢?我们通过多年的教学实践,取得了一点经验:

(一) 学生处于探索过程当中,对知识会表现出极大的兴趣

实践证明,思维处于探索过程中,会变得非常活跃。因此在教学中努力揭示知识的发生过程,让学生以发现者的身份通过自己的探索获取知识,会激发起学生的学习兴趣。

例如:在学习新课“两个平面平行的性质”这一课的教学中,我们首先请学生回忆平面几何中两条直线平行的性质,然后启发学生类比这些性质进行联想,猜想出在立体几何中与两个平面平行类似的“性质”,并判断它们的真伪。通过讨论,学生在课堂上列举出了如下八个性质,见图 1-1 (1) 至 (8)。

性质一:一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面,它也垂直于另一个平面。(课本第38页例2)

性质二:一个平面垂直于两个平行平面中的一个平面,它也垂直于另一个平面。

性质三:夹在两个平行平面间的平行线段相等。(课本

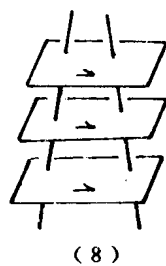
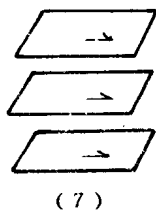
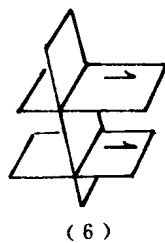
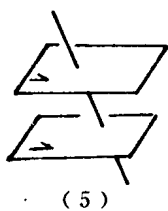
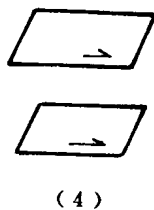
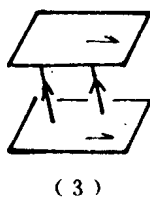
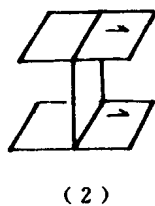
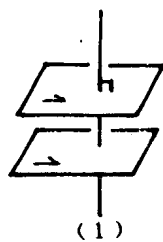


图 1-1

第39页练习第3题)

性质四：经过平面外一点只有一个平面和已知平面平行。(课本第39页习题五第4题)

性质五：一条直线和两个平行平面相交，则它和两个平面所成的角相等。(课本第40页习题五第6题)

性质六：一个平面和两个平行平面相交，则它和两个平面所成的同位角相等，同旁内角互补。(这时，还没学二面角的概念，此条“性质”是学生对比平面几何中类似性质得来的)

性质七：平行于同一平面的两个平面平行。(课本第40页习题五第5题第(3)小题)

性质八：两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例。(课本第40页习题五第9题)

这些内容，虽然大多数在课本中都有，但因为是学生们“独立地”猜想出来的，课堂气氛活跃，学生兴趣盎然。

(二) 学生作一题多解的练习题时，在寻求简化和优化的解法过程中，体验到了无穷的乐趣

我们在讲一题多解的例题时，很多解法是学生们自己想出来的。学生常常问“还有没有更好的解法？”学习要求极为强烈，因为他们体验到了获得知识的乐趣。(例题见本章第四节定理教学概述)

(三) 从事物之间的相互联系、运动变化中掌握知识，很多立体几何问题可以变得很有情趣

例如，正方形 $ABCD$ 的边长为 a ， $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 AC 、 CB 于 E 、 G 、 F ，且 $CF = \frac{3}{7}a$ 。以 EF 为棱，将正方

形所在平面折成直二面角，求 $\angle AGC$ 的度数。

这个题目，先让学生独立思考一、两分钟，然后组织课堂讨论。

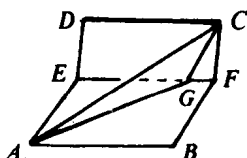
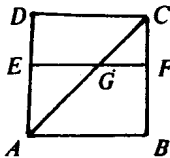


图 1-2

思路一：利用余弦定理。绝大多数学生，从解折叠问题的一般规律入手，画出了折叠前后平面与空间的对照图形(图1-2)，找出前后变与不变的位置与数量关系，然后解 $\triangle AGC$ ，用余弦定理求 $\angle AGC$ 。在平面图形中算得 $CG = \frac{3\sqrt{2}}{7}a$ 、 $AG = \frac{4\sqrt{2}}{7}a$ ；利用直二面角条件知 AC

$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{4}{7}a\right)^2 + \left(\frac{3}{7}a\right)^2} \text{。 于是在 } \triangle AGC \text{ 中, } \cos \angle AGC = \frac{AG^2 + CG^2 - AC^2}{2AG \cdot CG} = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } \angle AGC = 120^\circ \text{。}$$

思路二：利用邻补角的关系。正当大家认为已经得到正确结果，可以松一口气时，从相互联系中寻找关系的学生，画出了折叠前后拼在一起的图形(图1-3)。 $\because GF = FC = FC'$ ， $\therefore GC = C'C = GC'$ ， $\therefore \angle CGC' = 60^\circ$ ，故 $\angle AGC = 120^\circ$ 。这种解法，计算量很小，课堂活跃，兴趣盎然！

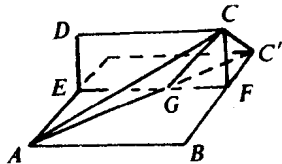


图 1-3

思路三：利用立体几何课本中习题的结论。第三部分学生把讨论推向新的高潮，提出了使全班为之一震的结论，“本题答案与已知条件 $CF = \frac{3}{7}a$ 无

关!”这时，大家突然“发现”思路二的解法，确实没有用到 $CF = \frac{3}{7}a$ 的已知条件。他们还另辟蹊径，给出了新的解法。由于 $C-EF-A$ 为直二面角，故 $\cos \angle CGA = \cos \angle CGF \cdot \cos \angle FGA = -\frac{1}{2}$ ， $\angle CGA = 120^\circ$ 。这样的教法，能激发学生的学习兴趣，点燃学生创造性思维的火花，其功益远非考试分数所能说明。学生们的评论是，“一双双妙手，巧解心中疑窦。一番番有条不紊、错落有致的讲解，真是娓娓动听。同学们从迷惑不解到茅塞顿开的过程中，又一次汲取了博大精深的数学学科中，妙绝天下的解题思路”。

二 培养能力是立体几何教学的主要任务之一

关于数学能力的说法颇多，我们比较同意数学教学中培养学生七方面的能力，即数学观察能力、概括能力、记忆能力、运算能力、空间想象能力、逻辑思维能力、以及解决数学综合问题的能力。数学教学应着手双基、着眼能力，使学生的知识与能力同步增长。立体几何教学中，在培养学生的逻辑思维能力和空间想象能力方面具有得天独厚的优势。为此，我们应把培养和提高学生的逻辑思维能力、空间想象能力作为主要任务，并切实抓好。

(一) 思维能力的培养与提高

人类在实践中积累起来的一整套思考数学问题的科学的思维方式和方法，都凝聚在数学基础知识之中，构成数学知识的智力因素。教学中注意发掘这些内容，加强思维能力的