总主编 吴万川 王永珊

Mathematics

# 课标时代de学

## 高二数学

本册主编 杜晓彦

上册

课标时代

KBSD

云南教育出版社

# KBSDDX

# 课标时代de学

## 高二数学

上册


● 本册主编　杜晓彦

● 编　　者　杜晓彦　孟昭侠

庞红全　李红生

刘　畅


云南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据
课标时代de学．高二数学．上册/杜晓彦主编．--昆明：云南教育出版社，2004．5

Ⅰ．课…　Ⅱ．杜…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第032636号

课标时代de学
高二数学　上册

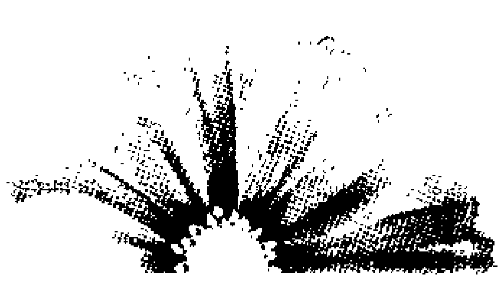
责任编辑：何　醒　张晓文
策　　划：何　醒　王永珊
装帧设计：五明设计　王　毅
　　　　　可铭堂艺术工作室＋凌子
出版发行：云南教育出版社
社　　址：昆明市环城西路609号
经　　销：全国新华书店
印　　刷：辽宁美术印刷厂
开　　本：890mm×1240mm　1/32
印　　张：16.5
字　　数：528千字
版　　次：2004年6月第1版
印　　次：2004年6月第1次印刷
印　　数：1－15 000册
书　　号：ISBN7－5415－2553－7/G·2056
定　　价：18.00元

# KBSDDX

# 课标时代de学丛书

## 编委会





# KBSDDX

## 致读者

一直有个浓浓的愿望，想给我们可爱的中学生朋友出版一套可以对学习有帮助又对成长有启示的书，让大家既学到知识，又学会思考，学会交流，学会应用，学会实践，在感受到学习是愉快的而不是负担的同时，收获丰硕的学习成果……这套《课标时代 de 学》将让这个美好的愿望成为现实。

学习需要悟性，当你会学的时候，一切都变得轻松简单，让我们远离题海战术，一起尝试新的学习方式吧!

读了这套丛书，你将在获得知识的同时，学会学习，一生受益，成为一个有价值的人。

KBSDDX

# 前言

跨入21世纪，国家教育部颁布的《国家基础教育课程改革指导纲要》及制订的各门课程的课程标准，以其先进的教育理念宣告我国基础教育进入新的时代——“课标时代”。“课标时代”对教学的目标要求是：加强课程内容与学生生活及现代社会科技发展的联系，关注学生的学习兴趣和经验；使学生获得终身学习必备的基础知识和基本技能的过程，同时成为学会学习和形成正确价值观的过程；倡导学生主动参与，乐于探究，勤于动手；培养学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力，以及交流与合作的能力。《课标时代de学》正是基于实现这一教学目标而组织编辑出版的，它是出版工作者与全国众多优秀教师集体智慧的结晶，是为推进这种先进教育理念的深入和课程思想的实现而做的大胆而有益的尝试。

《课标时代de学》体例设计先进、科学，具有鲜明的时代特征。

# KBSDDX

**《课标时代 de 学》让学生学会学习。**丛书依据“学习内容”和“学习过程”将每节课设计成“学什么”和“怎样学”相辅相成的两大板块，它摒弃机械灌输的知识传授模式，将学习探究过程引入助学读物，让学生在学会知识的同时学会学习。

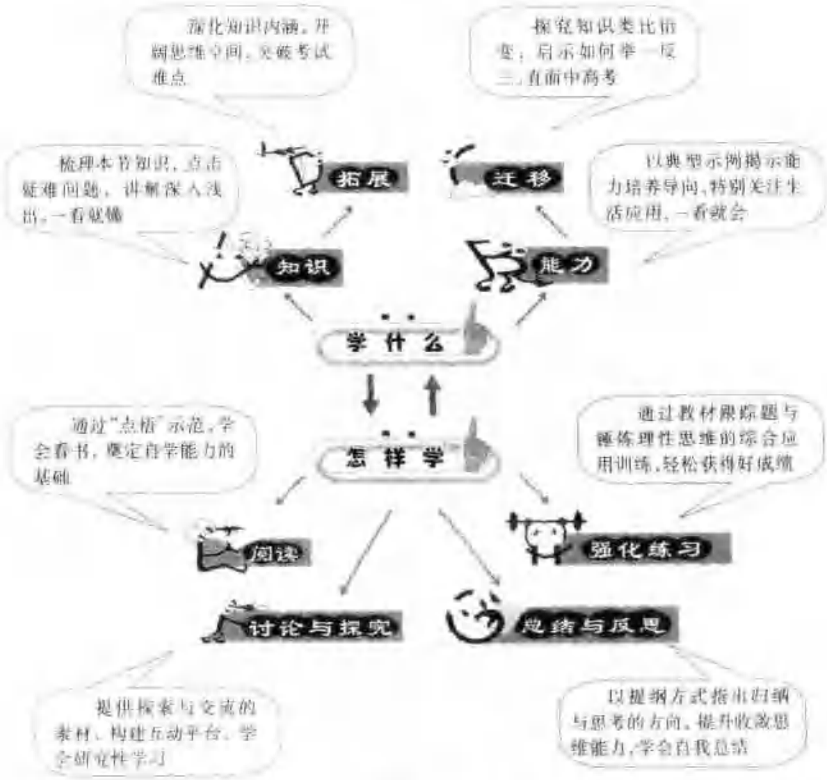
**《课标时代 de 学》让学生自主学习。**丛书突出学生的主体地位，作者只是引导读者走进学习乐园的向导。丛书通过“点悟”、“点评”、“提示”等画外音与学生互动交流，点到为止，授人以渔。

**《课标时代 de 学》让学生高效学习。**丛书体例设计符合学生的认知规律，学习内容与学习过程循序渐进，科学高效。“学什么”包括知识、能力、迁移、拓展，“怎样学”包括阅读、讨论与探究、总结与反思、强化练习，单元（章末）综合练习包括基础题、综合题、创新题、中（高）考题、竞赛题。

**《课标时代 de 学》完全可以让学生获得好成绩。**只要认真研读丛书，按照新的学习方式去学习，就会轻轻松松提高学习成绩。丛书还特别关注中（高）考的最新趋向，尤其是“迁移”、“拓展”栏目及“能力”中的“生活应用”都是中高考的命题点或命题方向，将对备考提供莫大帮助。

# KBSDDX

## 导读示意图




KBSDDX

# 目录



# 第六章 不等式

## 知识链接

- 不等式
  - 不等式的性质
  - 不等式的证明
    - 方法
      - 比较法
      - 综合法
      - 分析法
      - 数学归纳法
      - 其他方法,如:
        - 反证法
        - 单调性法
        - 判别式法
        - 换元法
        - 放缩法
  - 不等式的解法
    - 一元一次不等式(组)
    - 一元二次不等式(组)
    - 分式不等式
    - 无理不等式
    - 绝对值不等式
    - 高次不等式
    - 指数不等式
    - 对数不等式
    - 三角不等式
- 平均值定理 → 综合法；最值
- 应用
  - 一是研究函数的性质：定义域
  - 值域
  - 单调性
  - 最值
  - 二是取值范围问题；
  - 三是方程根的分布问题
  - 四是实际应用问题

## 目标要求

**知识目标**

1. 理解不等式的基本性质及其证明.
2. 掌握重要不等式、均值定理并熟练运用.
3. 掌握不等式证明的基本方法并会运用.
4. 熟练掌握不等式的解法.
5. 会用不等式知识解决实际问题.

**能力目标**

1. 由不等式的性质、证明及综合问题培养学生严谨推理、思维活跃、技巧构思及综合运用知识的能力.

2. 由不等式的解法培养学生基本技能，认真仔细、分类讨论全面考虑问题的能力.

3. 由不等式的应用问题培养学生关心社会、熟悉社会、独立思考及将实际问题转化为数学问题的能力.

4. 通过不等式的学习，使学生进一步理解在现实世界中的量之间，不等是普遍的、绝对的，相等则是局部的、相对的，从而对学生进行辨证唯物主义观点的教育.

# 第一节　不等式的性质

## 学什么

### 知识

**1. 不等式的概念**

(1)定义：表示两个量之间的大小关系的式子，叫做不等式．不等式只有在实数范围内才有意义．

(2)分类：

按照严格与不严格的角度分：

①严格不等式：用"<"或">"连接的不等式的叫严格不等式．

②非严格不等式：用"≤"或"≥"连接的不等式叫非严格不等式．

按照成立不成立的角度分：

①绝对不等式：如果一个不等式中的字母取任何实数值时，这个不等式都能成立，则这个不等式叫绝对不等式．譬如：$x^2+1>0$；$\sin x\leq 1$；$a^2+b^2\geq 0$；$|a|\geq 0$ 等．

②条件不等式：如果一个不等式中的字母只有在某些范围内取值时，这个不等式才成立，则这个不等式叫条件不等式．譬如：$x^2+x-2<0$；$|x|\leq 0$ 等．

③矛盾不等式：如果一个不等式，不论用任何实数代替其中的字母，它都不成立，这样的不等式叫矛盾不等式．譬如：$1+x^2+y^2\leq 0$；$\sin x>|x|$；$1>2$ 等．

(3)两个不等式的关系：

同向、异向不等式：$f(x)>0$ 与 $g(x)>0$ 叫同向不等式；

$f(x)>0$ 与 $g(x)<0$ 叫异向不等式．

(4)不等式的解集：使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)成立的 $x$ 的集合，叫做 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的解集．

(5)证明不等式：证明不等式成立的过程叫做证明不等式．

(6)解不等式：求不等式的解集的过程叫做解不等式．

(按照这个定义，解不等式得到的结果是一个集合，其表示形式是集合或区间！)

**2. 不等式的性质**

(1) $a$ 与 $b$ 的大小顺序(实数的顺序性)与实数的运算性质之间的关系：

设 $a, b\in\mathbf{R}$，则

① $a-b>0\Leftrightarrow a>b$；

② $a-b=0\Leftrightarrow a=b$；

③ $a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

在数轴上，两个不同的点 $A$ 与 $B$ 分别表示两个不同的实数 $a$ 与 $b$，右边的点表示的数比左边的点表示的数大．

点评

设 $a, b$ 是正实数，则

① $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；

② $\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；

③ $\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

(2)基本性质：

对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$.

传递性：$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$.

[点评　(i)可推广到 $n$ 个情形，即 $a_1>a_2, a_2>a_3, \cdots, a_{n-1}>a_n \Rightarrow a_1>a_n$.

(ii)传递性是不等式的证明方法——放缩法的理论依据]

加法单调性：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

同向不等式可加性：$a>b$, $c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

异向不等式可减性：$a>b$, $c<d\Rightarrow a-c>b-d$.

[点评　可推广到 $n$ 个情形：

$a_1>b_1, a_2>b_2, \cdots, a_n>b_n \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$. ]

乘法单调性：$a>b$, $c>0\Rightarrow ac>bc$

正值同向不等式可乘性：$a>b>0$, $c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

正值异向不等式可除性：$a>b>0$, $c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

正值不等式可倒性：$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

[点评　可推广到 $n$ 个情形：$a_1>b_1>0$, $a_2>b_2>0$, $\cdots$, $a_n>b_n>0\Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$. ]

幂和算术根的单调性：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$；

$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ( $n>1$ 的 N)

[注意　①学习不等式的基本性质，对表达不等式性质的各不等式，要注意“箭头”是单向的还是双向的，也就是说每条性质是否具有可逆性．

②运用不等式的5条基本性质解答不等式时，要注意其成立的条件，否则将会出现一些错误．如性质"$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in \mathbf{Z}$，且 $n>1)$"成立的条件是"$n$ 是大于1的整数，$a>b>0$"，假如去掉"$b>0$"这个条件，取 $a=2$，$b=-3$，$n=2$，那么就会出现"$2^2>(-3)^2$"即"4>9"的错误结论．

在高考试题中，关于不等式性质的考查有三种类型：

(1)据给定条件，利用不等式的性质判断不等式能否成立．

(2)利用不等式的性质及实数的性质、函数的性质判断实数值的大小，或求范围．

(3)利用不等式的性质判断不等式变换中条件与结论间的充分、必要关系．

**1. 判断不等式能否成立**

**例1**　判断下列命题的真假．

(1) $a>b$，$c=d \Rightarrow ac^n>bd^n (n \in \mathbf{N}^*)$；

(2) $\dfrac{a}{c^2} > \dfrac{b}{c^2} \Rightarrow a>b$；

(3) $a>b$ 且 $ab<0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$；

(4) $a<b<0$，$c<d<0 \Rightarrow ac>bd$；

(5) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Rightarrow a<b (n \in \mathbf{N}^*)$；

(6) $|a|<b \Rightarrow -b<a<b$．

**解**　此题要充分利用不等式的性质来解题．根据判断可得(1)，(3)是错误的．因为(1)不能保证 $c$，$d$ 是正数；(3)与性质(6)不符．(2)，(4)，(5)，(6)都是正确命题．

**点评**　不等式的性质是不等式变形的依据，必须全面、系统、熟练地掌握，其中有些性质的条件是结论的充要条件，也有些性质不可逆，解题时应引起充分重视．

**例2**　若 $a$，$b$ 是任意实数，且 $a>b$，则　（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\dfrac{b}{a}<1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a < \left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

**解**　本题考查不等式的性质，可由不等式性质及函数单调性直接判断，或举反例判断．

$a>b \Leftrightarrow a-b>0 \not\Leftrightarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2>0$　故A错

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$ 而 $\dfrac{b}{a}<1 \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{a}>0 \Leftrightarrow a>0$ 且 $a>b$　故B错

$\lg(a-b)>0 \Leftrightarrow a-b>1$，而 $a>b \Leftrightarrow a-b>0$　故C错

$\because$ 指数函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数

$\therefore a>b \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$　故选 D.

若 $A\Rightarrow B$，则 $A$ 是 $B$ 的充分条件，$B$ 是 $A$ 的必要条件．本题可理解为 $a>b$ 不是 $a^2>b^2$，$\frac{b}{a}<1$，$\lg(a-b)>0$ 的充分条件，而 $a>b$ 是 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ 的充要条件．

点评

**例 3**　实数 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足下列三个条件：

① $d>c$；② $a+b=c+d$；③ $a+d<b+c$　请将 $a$、$b$、$c$、$d$ 按照从小到大的次序排列并证明你的结论．

**解**　$\because$ 由③得 $d-b<c-a$

由②得 $d-b=a-c$　$\therefore b-d=c-a$

$\therefore d-b<b-d$　$\therefore d<b$

$a-c<c-a$　$\therefore a<c$

由①得　$a<c<d<b$.

点评

主要考查不等式的性质及逻辑推理能力．本题条件较多，如果两两比较，一般需要进行 $C_4^2=6$ 次，如果能找到一个合理的程序，则可减少解题的层次，本题由于找到了一个合理的程序，则干净利落地解决了．

**2. 判断命题中条件是结论的充分、必要条件**

**例 1**　设 $x, y\in \mathbf{R}$，判定下列各题中，命题 $A$ 与命题 $B$ 的充分必要关系．

(1) 命题 $A$：$\begin{cases} a>0, \\ b>0; \end{cases}$　　命题 $B$：$\begin{cases} a+b>0, \\ ab>0; \end{cases}$

(2) 命题 $A$：$\begin{cases} x>2, \\ y>2; \end{cases}$　　命题 $B$：$\begin{cases} x+y>4, \\ xy>4. \end{cases}$

**解**　(1) 若 $a>0$ 且 $b>0$ 则 $ab>0$ 且 $a+b>0$

若 $ab>0\Rightarrow a, b$ 同号，又 $a+b>0$　$\therefore a>0$ 且 $b>0$

$\therefore A$ 是 $B$ 的充要条件．

(2) 若 $x>2$ 且 $y>2$　则 $x+y>4$ 且 $xy>4$

若 $x+y>4$ 且 $xy>4$，如 $x=1$，$y=5$　有 $x<2$

$\therefore A$ 是 $B$ 的充分不必要条件．

利用不等式的性质及充分条件必要条件的定义来判断命题中条件与结论之间的逻辑关系是常见的基本题型．

点评

**例 2**　已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，当 $p$，$q$ 满足 $p+q=1$ 时，试证明：$pf(x)+$

$qf(y) \geqslant f(px+qy)$ 对于任意实数 $x$, $y$ 都成立的充要条件是 $0 \leqslant p \leqslant 1$.

**分析** 要证 $pf(x)+qf(y) \geqslant f(px+qy) \Leftrightarrow$ 对任意实数 $x$, $y$ 都有 $0 \leqslant p \leqslant 1$，只需证 $pf(x)+qf(y)-f(px+qy) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ 对任意实数 $x$, $y$ 都有 $0 \leqslant p \leqslant 1$. 故需代换 $f(x)=x^2+ax+b$, $p+q=1$.

**证明** $pf(x)+qf(y)-f(px+qy)=p(x^2+ax+b)+q(y^2+ay+b)$

$-(px+qy)^2-a(px+qy)-b=p(1-p)x^2+q(1-q)y^2-2pqxy=pq(x-y)^2$.

①若 $0 \leqslant p \leqslant 1$，$q=1-p \in [0,1]$ $\therefore pq \geqslant 0$ $\quad \therefore pq(x-y)^2 \geqslant 0$

$\therefore pf(x)+qf(y) \geqslant f(px+qy)$.

②当 $pf(x)+qf(y) \geqslant f(px+qy)$ 时，$pq(x-y)^2 \geqslant 0$

$\because (x-y)^2 \geqslant 0$ $\quad \therefore pq \geqslant 0$ $\quad$ 即 $p(1-p) \geqslant 0$

$\therefore 0 \leqslant p \leqslant 1$ $\quad \therefore$ 原命题成立.

首先要将结论 $pf(x)+qf(y) \geqslant f(px+qy)$ 利用条件 $p+q=1$ 转化为较简单的形式：$pq(x-y)^2 \geqslant 0$ 后再进行充要性证明.

点评

### 3. 比较数(或式)的值的大小及求某一范围

**例 1** (1)若 $b<a<0$, $d<c<0$, 将两不等式相乘、相除有何结论?

(2)设 $2<a \leqslant 5$, $3 \leqslant b<10$, 求 $a+b$, $a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的范围.

**解** (1)由条件化负为正得

$$\left.\begin{matrix} b<a<0 \\ d<c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -b>-a>0 \\ -d>-c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-b)(-d)>(-a)(-c) \Rightarrow bd>ac$$

$$\left.\begin{matrix} d<c<0 \Rightarrow d \cdot \frac{-1}{dc}>c \cdot \frac{-1}{dc}>0 \Rightarrow -\frac{1}{c}>-\frac{1}{d}>0 \\ b<a<0 \Rightarrow -b>-a>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{c}\right)(-b)>\left(-\frac{1}{d}\right)(-a) \Rightarrow \frac{b}{c}<\frac{a}{d}$$

(2)因为 $\quad 2<a \leqslant 5$, $3 \leqslant b<10$,

所以 $\quad 2+3<a+b<5+10$,

即 $\quad 5<a+b<15$.

因为 $\quad 3 \leqslant b<10$,

所以 $\quad -3 \geqslant -b>-10$,

即 $\quad -10<-b \leqslant -3$.

又 $\quad 2<a \leqslant 5$,

所以 $2-10<a-b\leqslant 5-3$,

即 $-8<a-b\leqslant 2$.

因为 $3\leqslant b<10$,

所以 $\frac{1}{10}<\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{3}$.

又 $2<a\leqslant 5$,

所以 $\frac{1}{5}<\frac{a}{b}\leqslant\frac{5}{3}$.

点评

同向不等式两边分别相加，不等式仍然成立，但同向不等式不能两边分别相减或相除．本题是先创设应用不等式性质的条件，再合成出所求的结论．

**例 2** 设 $a$、$b\in\mathbf{R}$，$a+b=2$，且 $a\neq b$. 试排列 1，$ab$，$\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小顺序．

**分析** 先取特殊值尝试，例如取 $a=2$, $b=0$，知 $ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$，"投石问路"是个好办法，但上面探得的结论是否具有一般性，还需作出证明．

**证明** $\because 1-ab=1-a(2-a)=a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant 0$

但当 $a=1$ 时，$b=2-a=1$，与已知条件 $a\neq b$ 发生矛盾，因此 $a\neq 1$，$\therefore 1>ab$.

又 $\frac{a^2+b^2}{2}-1=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)=\frac{1}{2}[a^2+(2-a)^2-2]=(a-1)^2>0$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{2}>1>ab$

本题先采用"投石问路"的办法，做到"心中有数"，从而省略了 $ab$ 与 $\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小比较，以使证明过程简化．

**例 3** 船在流水中的 $A$ 地和乙地间往返行驶一次的平均速度和船在静水中的速度是否相等，为什么？

**解** 设 $A$、$B$ 两地间的距离为 $S$，船在静水中的速度为 $m$，水流速度为 $n(m>n>0)$，则船在 $A$、$B$ 两地间往返行驶一次的时间为

$$t=\frac{S}{m+n}+\frac{S}{m-n}=\frac{S\cdot 2m}{m^2-n^2}$$

平均速度为 $\bar{v}=\frac{2S}{t}=\frac{m^2-n^2}{m}$

$$\because \bar{v}-m=\frac{m^2-n^2}{m}-m=-\frac{n^2}{m}<0$$

$\therefore \bar{v}<m$

综上可知，船在流水中往返一次的平均速度与船在静水中的速度不相等，且平均速