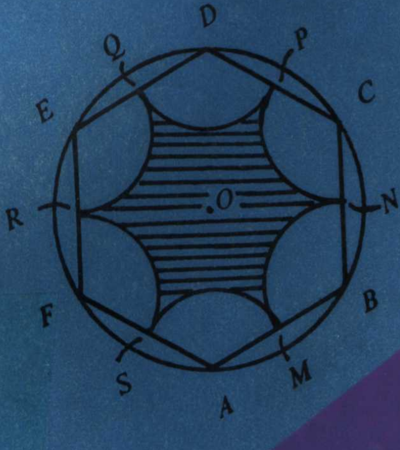
谈平面几何教学

●江志英　编著



●教育科学出版社

（京）新登字第111号

谈平面几何教学
江志英　编著
责任编辑　金宏瑛
教育科学出版社出版发行
（北京·北太平庄·北三环中路46号）
新华书店经销
北京燕华印刷厂印装
开本：850毫米×1168毫米 1/32 印张：15.5 字数：383,800
1992年6月第1版　1992年6月第1次印刷
印数：00.001—3,000册

ISBN 7-5041-0311-X/G.280　定价：7.20元

编者的话

我把平时在平面几何教学中的一些具体教法和一得之见，作了归纳整理，曾陆续在浙江《教学月刊》，上海《上海教育》等刊物上发表了一部分，受到刊物编辑和部分读者来信的鼓励，广大读者敦促我把全部材料重新整理，汇集成册后，在教育科学出版社的大力支持下，终于出版了这本《谈平面几何教学》。

平面几何是初中一门十分重要的课程，教学有一定难度，我在教学中倾向于要把课上得轻松活泼些，要激发学生学习平面几何的兴趣，尽量让学生多动脑，多动口，多动手，还应当充分信任学生，倾听他们的各种见解。我在各个教学环节中，总是想方设法启发学生各抒己见，畅所欲言。在讲解基本概念，引进新课，课堂提问，举例示范，推导定理，归纳证法，应用巩固，知识小结等各个教学环节中都注意启发引导，发动议论，务使学生对抽象的几何概念学得兴致勃勃，津津有味。务使学生在打好知识基础的同时，智力得到发展，能力受到培育，尤其在辩证思维能力和逻辑思维能力方面得到足够的训练。

本书按照现行的教材体系编写，便于教师教学时参考和对照。全书以《教学要有启发性》为开端，以《平面几何总复习》为收尾，把个人的教育思想，教学的思维方式和方法，具体的教法，都公之于众。由于学识浅薄，教学理论贫乏，不妥之处，务祈各位同行指教。

上海南洋模范中学退休教师　江志英

1987年10月

目　录

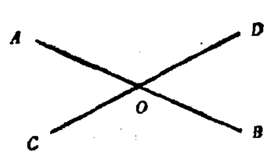
一、教学要有启发性

在课堂教学中，教师在讲解、演示、举例、小结等各个环节中都要有启发性，以激发学生的求知欲和学习兴趣，引起积极的思维，养成善于分析，独立思考的习惯。古人说："学起于思，思原于疑"，学生能经常思考一些问题，排难解疑，探索规律，不仅对知识的理解能够逐步深化，而且对智力的发展，能力的培养大有好处。平面几何教学的启发性，要重视和抓好以下几个环节。

第一、引进新课应以旧带新

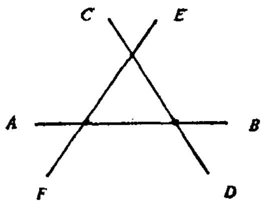
系统性强是数学学科的特点之一，几何学科尤为突出，教学中必须注意教材的前后联系，以旧带新。学习新知识时，与旧知识有什么关系呢？类似的概念，有什么异同呢？学生会有一些疑问，会有一些思考，教师针对这方面的一些内容，进行联系。经过对照比较和分析综合，再在原基础上推陈出新，形成新概念，推出新知识，掌握新解法，达到新水平。

例如，在引进"三线八角"的概念时，学生总以为三线相交有十二个角，怎么会只有八个角呢？如果含糊而过，势必影响"平行线"的学习。为此，必须启发学生先弄清楚三条直线相交的各种位置情况和它们相应形成的角，然后再提出"截"和"交"两字的含义，来引进"三线八角"的概念，让学生自己画图、对比，思考，并逐个回答下列问题：



（图1）

（1）两条直线相交，形成几个角？有几对对顶角？(对照图1)



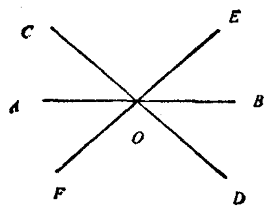
(图2)

（2）三条直线两两相交，交点不在同一点，形成几个角？有几对对顶角？（对照图2）

（3）三条直线两两相交，交点是同一点，形成小于平角的角有几个？有几对对顶角？（对照图3）

（4）两条直线与第三条直线相交，形成几个角？

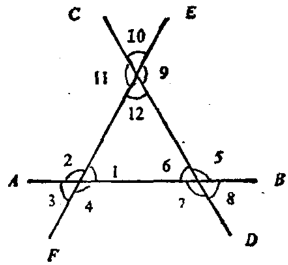
（5）两条直线被第三条直线所截，截得几个角？



(图3)

对前两个问题，由于交线位置和形成的角明确，对比后，可能很快回答出来，如(图1)中有4个角，即2对对顶角。(图2)中有12个角，即6对对顶角，对第三个问题，由于交线位置和形成的角有重叠，不易分辨，学生回答时可能会有遗漏，可启发学生相互补充，相互交流，结论也是形成12个角，对照(图3)，AB和CD相交，形成4个角，即$\angle AOD$，$\angle DOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$；AB和EF相交，形成4个角，即$\angle AOF$，$\angle FOB$，$\angle BOE$，$\angle EOA$；CD和EF相交，形成4个角，即$\angle COF$，$\angle FOD$，$\angle DOE$，$\angle EOC$，所以三条直线两两相交有两种情况，就是交点是同一点和交点不是同一点两种情况，不论那种情况，三条直线两两相交所形成的角是12个，也就是有6对对顶角。对第4个问题，学生会议论起来，有的说它和第2个问题一样，有的说两条直线位置不清楚，不能确定形成几个角。经过议论，明确第4个问题和第2，第3个问题都不一样。如果改一改，“两条相交直线与第三条直线都相交”，那么它就和第2，第3个问题相同。对于第5个问题，有的

学生会说，它和第4个问题一样，两条直线位置不确定，无从认角。有的同学经过思考，认为“截”和“截得”是明确的，就是不论两条直线是什么位置，它们被第三条直线所截，截得的角都和第三条截线有关，所以在这种情况，截得八个角。经过这样的画图、比较、讨论，最后使学生理解“截”的真正涵义，并能根据相截的意义去辨认有关的角。可对照（图4）让学生认角，读出有关的角：



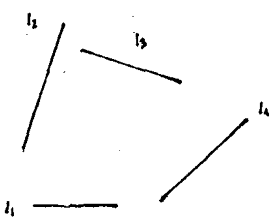
（图4）

①直线AB截直线CD和EF，形成哪些角？

②直线CD截直线AB和EF，形成哪些角？

③直线EF截直线AB和CD，形成哪些角？

还可编一些画图题供学生练习。例如(图5)中有4条直线l_1，l_2，l_3，l_4，根据题意，画出有关的角，并用数码注明各角：


（图5）

① l_1 和 l_2 被 l_3 所截，画出八个角；

② l_2 和 l_3 被 l_1 所截，画出八个角；

③ l_4 截 l_1 和 l_3，画出八个角；

④ l_2 截 l_3 和 l_4，画出八个角。

学生弄清“三线八角”的概念后，再根据两个角所处的位置来辨认同位角、内错角、同旁内角。学生抓住第三条截线后，就会正确判断，不致于因概念模糊而造成混淆，这样就为学习平行线的判定，作好充分准备。

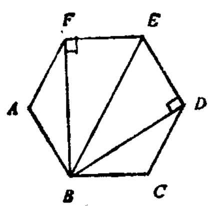
第二、提问要简明，要求应具体

课堂提问，是引起学生思考的重要手段。为了引起思考，教

师提问要有启发性。首先，要做到提出问题简明扼要，重点突出，使学生能清楚理解教师所提问题的内容和要求，从而能及时地去积极思考；其次，问题要由浅入深，由简到繁一个一个地提出，使学生力所能及地去思考问题。要防止简单化和离题甚远，高不可攀两种倾向。此外，教师语言要有亲切感，做到生动、爽朗、准确。提问还要面向全体，要引起每个人的积极思维，并留有足够的时间让学生去思考。

例如，为使学生正确理解正多边形的概念，教师笼统的提问："什么叫做正多边形？"学生一不感兴趣，二难以回答，即使照本宣读，也未必真正理解正多边形的概念。这样的提问未免简单化，引不起学生的兴趣。如果具体地问："举出三个四边形，第一个各边都相等而各角不相等；第二个各角都相等而各边不相等；第三个各边都相等，各角也都相等。"学生能够回答，但思考性不强，启发性不够。斟酌之下，从学生实际出发，可逐个提出以下问题：

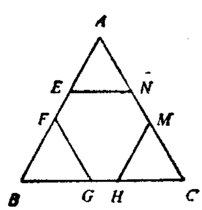
1. 画一个六边形，使它的各边相等，各角也相等。



(图1)

这个问题会引起学生的兴趣，积极动手设法画出图形，可能会出现许多种不同的画法，各展所长，各尽其才。

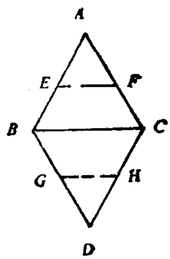
画法一，多边形问题，通过对角线，归结为三角形问题，对照图1，先画$\triangle ABF$，使$AB=AF$，$\angle A=120°$。再画$\triangle BEF$，使$\angle BFE=90°$，$FE=AF$。又画$\triangle BDE$，使$Rt\triangle BDE\cong Rt\triangle BFE$。最后画$\triangle BCD$，使$\triangle BCD\cong\triangle BAF$。这样的画法，易证各边相等，各角也相等。



(图2)

画法二，利用等边$\triangle ABC$，把它

各边三等分，如图2中，E，F，G，H，M，N为各边三等分点，于是$EFGHMN$为各边相等，各角也相等的六边形。



（图3）

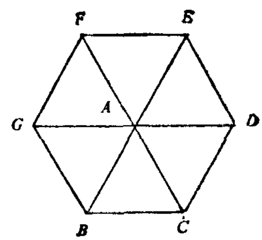
画法三，先画两个有公共底的等边三角形ABC和DBC，EF和GH分别为中位线，于是$BGHCFE$是所求的六边形(见图3)。

画法四，先画等边$\triangle ABC$，再以点A为公共顶点，顺次画等边$\triangle ACD$，$\triangle ADE$，$\triangle AEF$，$\triangle AFG$，$\triangle AGB$（见图4）。

还可有许多画法，教师可一一收罗，广为交流，鼓励大家开动脑筋，开阔思路。最后突出两点：

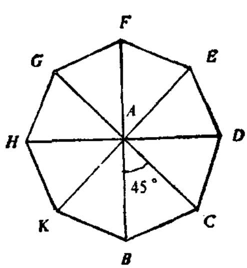
①所画出的六边形必须经过证明都是各边相等，各角都相等的；

②所有画法中，画法四最有规律性，即顺次以点A为公共顶点，画六个全等的等边三角形，在此基础上，再提出问题2。



（图4）

2. 画一个八边形，使它的各边相等，各角也相等。这个问题能促使学生积极思考。有前例借鉴，学生会有各种画法，但其中以一点为公共顶点，顺次旋转画出含45°顶角的8个全等等腰三角形为最有规律性，如（图5）所示。



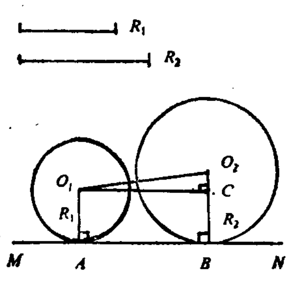
（图5）

通过重温三角形和多边形内角和等有关知识，学生自己动手画图，再提出“各边都相等各角都相等的多边

形叫做正多边形”的概念，学生不仅从理性上认识，而且感到正多边形的得来也不容易。从画图的规律性中还可领会到正多边形具有旋转性和轴对称性。已经学过圆具有旋转性和轴对称性，这样，可以把正多边形和圆紧密结合起来。有图就存在它的内接或外切正多边形，从而引进“把圆分n（$n \geqslant 3$）等份”定理，有正多边形就存在它的外接圆和内切圆，从而引进“正多边形有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆”的定理。通过启发提问，使偶然归于必然，使学生真正理解“什么叫做正多边形？”，“怎样学习正多边形？”这对深刻理解正多边形，全面掌握正多边形的有关知识，对画图，计算，证明都有裨益。

第三、揭露问题要有对比性，有比较才能有鉴别，才会有所发现

对于教材中的重点、难点和关键性的问题，要善于运用对比的方法揭示其内在联系和逻辑关系，使学生分析有依据，思考有方向，容易抓住问题的关键所在。要避免就事论事，生搬硬套的做法。这样做容易造成死记硬背，囫囵吞枣，思维迟钝，食而不化的不良后果。



例如：两圆公切线的作法是一个难点，如果就事论事的分析，学生会感到老师聪明，只能听老师讲，造成不动脑筋的被动局面。如果提出一些问题与之对比，那么学生就有能力自己去分析，去探讨作法。可以这样提出问题：

已知：直线MN上有点A和点B，及线段R_1和R_2（$R_1 < R_2$）。

求作：用R_1为半径作$\odot O_1$切MN于点A，用R_2为半径作$\odot O_2$切MN于点B，且$\odot O_1$和$\odot O_2$在MN的同旁。

这是一个比较容易的作图题。通过这个作图可阐明两圆外公切线的意义，然后对照原图提出新问题，把问题改为如下的问题：

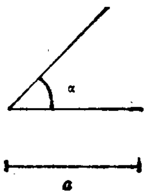
已知：$\odot O_1$和$\odot O_2$外离，$\odot O_1$半径R_1，$\odot O_2$半径R_2、$R_1<R_2$，求作：直线MN和$\odot O_1$，$\odot O_2$都相切(即$\odot O_1$和$\odot O_2$的外公切线)。

这个问题与前例有什么区别呢？怎样对照前例找出作公切线的关键呢？对比之下，学生会回答前例为在已知直线上作两个切于已知点的切圆，而后者为在已知两个外离的圆上作它们的外公切线，实则上是“已知”和“求作”互相对调。后者的作法关键是确定两个切点A和B的位置。于是对照图形，O_1O_2为已知，R_1和R_2为已知，O_1ABO_2是直角梯形，直角梯形的两底和一条斜腰为已知，怎样作出这个直角梯形呢？学生经过启发和对比，就可能会利用学过的三角形奠基法去作出直角梯形O_1ABO_2，也就是作$O_1C\perp O_2B$，先把$Rt\triangle O_1O_2C$作出后，再作出A和B两点，进而作出外公切线MN。

让学生通过前后对比，从实际水平出发进行分析和比较，经过独立思考去探索解题途径，较之单纯依靠教师头头是道的讲解要好得多。启发式和注入式两种教学方法所产生的教学效果是截然不同的。经过学生的思考，在掌握两圆外公切线作法的基础上，再对照教材的阐述和作法，学生就更加心领神会。对于两圆的内公切线的意义和作法，也可采用对比方法进行启发。不仅如此，以后遇到类似的难点，学生自然会想起这种“已知”和“求作”，“条件”和“结论”互相对调的对比分析的方法，这是从易到难，从已知探求未知的过渡方法，是颇具启发性的。

又例如：在已知线段上作弧，使它所含的圆周角等于已知角。这是一个基本作图题。如果就事论事介绍这个作图题，那是比较省时的。然而没有引起学生的积极思维，没有揭示这个作图的内在联系。如果提出以下问题供学生对比思考，就可促使学生的思

维活跃起来。



（1）已知：$\triangle ABC$中，$BC=a$，$\angle A=\angle\alpha$，

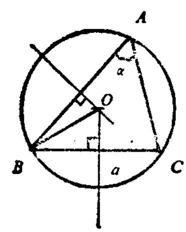
求：$\triangle ABC$的外接圆半径R；

（2）已知：$\triangle ABC$中，$BC=a$，$\angle A=\angle\alpha$.

求作：$\triangle ABC$的外接圆半径R及外接圆。

对比两个问题，前者为计算题，后者为作图题；前者利用正弦定理$2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$可求得R，那么后者利用什么方法可作出$\triangle ABC$的外接圆的半径呢？启发学生用各种不同方法去作出半径，再作出图。例如

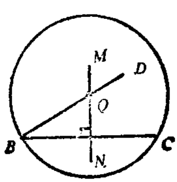
作法一：



（1）作$\angle A=\angle\alpha$；

（2）$\angle A$的一条边上任取一点B，以点B为圆心，a的长为半径画弧交$\angle A$的另一边于点C；

（3）作AB和BC的垂直平行线，相交于点O；



（4）以点O为圆心，OB为半径作圆，⊙O就是所求的圆。

作法二：

（1）作$BC=a$；

（2）作$\angle DBC=90°-\angle\alpha$；

（3）作BC的垂直平分线MN交DB于O；

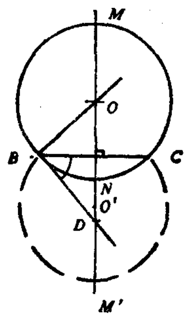
（4）以O为圆心，OB为半径画圆，⊙O为所求的圆。

作法三：

（1）作$BC=a$；

（2）作$\angle CBD=\angle \alpha$；

（3）作BC的垂直平分线MN和过点B与BD垂直的直线相交于点O，以点O为圆心，OB为半径作圆，$\odot O$为所求的圆。



在学生经过思考，各自作图的前提下，提问

（1）用各种不同作法作出的圆是否都是等圆？试说明理由。

（2）上述三种作法是否都符合条件？试加以证明。

（3）把上例改为："以已知线段a为弦作所含圆周角等于已知角α的弧"，怎样作法呢？它和上例有何关系呢？

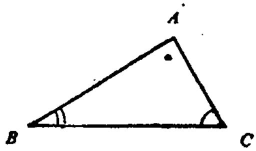
（4）上述作法中以那种作法较为简便？

学生重温正弦定理后，知道当$\triangle ABC$中，$BC=a$为定长，$\angle A=\angle \alpha$为定角时，$\because 2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$，$\therefore R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$为定长，所求的圆都是等圆。作法一直接可证得符合条件。作法二是根据圆心角和圆周角的关系作出的，在弧上任取一点A，连结AB，AC，易证$\angle BAC=\angle \alpha$。作法三是根据弦切角和圆周角的关系作出的，同样在弧上任取一点A，易证$\angle BAC=\angle \alpha$。至于第3个问题，作法和上述例题是基本一致的，所不同的是上例所作的圆中要把圆周角α所对的弧去掉，圆中余下的弧就是以线段a为弦含圆周角为已知角α的弧，对照作法三中的$\overset{\frown}{BMC}$便是，这样的弧有两条，即图中$\overset{\frown}{BMC}$和$\overset{\frown}{BM'C}$，它们对于BC为轴对称。如果所含圆周角α是直角，那么两条弧正好是两个半圆，即以线段a为直径的一个圆，如果$\angle\alpha<90°$那么两条弧是优弧，如果$\angle\alpha>90°$，那么两条

弧为劣弧。所有作法中以作法三较为简便，不必另作$(90°-\angle\alpha)$，环绕线段$BC=a$，作BC的中垂线，作BC为弦的弦切角。这个作法对确定圆心的位置最为简便。作圆时，可根据圆心位置的确定和半径大小的确定是否简捷来衡量作法的优差。

学生经过对照比较，根据自己的见解动手画图，不仅可交流各种作法，评比优劣，而且对这个基本作图题的理解也比较深刻，把正弦定理和作图紧密结合起来，一般性和特殊性紧密结合起来，能引起学生的积极思考。

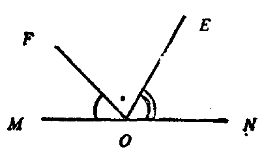
再举一例：关于《三角形内角和定理》的证明，通过剪纸法，把一个三角形的内角剪开，拼在一起组成一个平角，用直观演示进行启发，这是需要的。但实验不能替代证明，还需根据学生实际情况提出问题，通过对比进行启发。



已知：$\triangle ABC$的三个内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

启发学生：



(1) 任意画两个角，使它们互为邻补角，怎样作？

(2) 任意画三个角，使它们的和为180°，怎样作？

(3) 画一条直线$MN \parallel BC$，在MN上任取一点O，以点O为顶点，作$\angle EON=\angle B$，$\angle FOM=\angle C$怎样作？

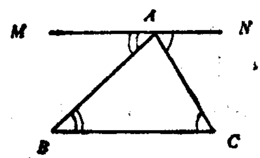
(4) 能证明$\angle EOF=\angle A$吗？

(5) 能证明$\angle A+\angle B+\angle C=180°$吗？

(6) 还有更为简便的证明吗？

学生对于前两个问题是能够回答的，至于第3个问题，启发学生分别作AB和AC的平行线OE和OF，并根据“各边对应平行的

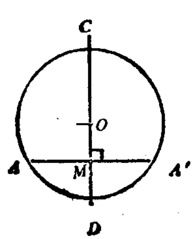
两个锐角或两个钝角相等，“证明$\angle EOF=\angle A$，从而不难证明$\angle A+\angle B+\angle C=180°$。重点是第6个问题，即点$O$的位置取在何处最为简便？让学生议论开，并且允许各种不同的添线方法，使学生的思维活跃起来。最后选择过一个顶点A作对边BC平行线MN的方法，对初学者来说，比较直观，醒目，如右图所示。



综合以上三个例子，说明揭示问题要有对比性。第一例是通过“已知”和“求作”的互换进行对比，也就是先与后的对比；第二例是计算和证明的对比，整体和局部的对比，繁和简的对比；第三例是一般和特殊的对比，无条件和有条件的对比，偶然和必然的对比。问题具有对比性就具有启发性，可以引导学生积极思维，自己动手，自己分析去探讨解决问题的关键所在。

第四、加强对命题结构的分析

在论证几何定理，推出推论以及证明其他常用几何命题时，首要问题是对各个命题的正确含义弄清楚，要明确命题中的条件和结论以及两个互逆命题之间的逻辑关系，通过分析，培养学生的综合概括能力和逻辑思维能力。



例如：从圆的对称性引进垂径定理后，应加强命题结构的分析。左图$\odot O$中：

条件：（1）圆O直径CD，

（2）弦$AA'\perp CD$，垂足点M，

结论　（3）$AM=MA'$，

（4）$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CA'}$，

(5) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DA'}$。

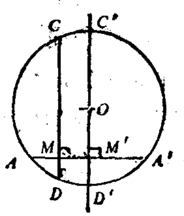
把结论中的（3）与条件中（2）对调，可推得推论1（1）；

把结论中的（4）与条件中（2）对调，可推得推论1（2）；

把结论中的（4）与条件中（1）对调，可推得结论1（3）。

除上述三个作为推论的命题外，还可对调成其他逆命题，可启发学生问："还可对调成几种垂径定理的逆命题？"要求学生用语句表达上述三个推论并加以证明。

连同垂径定理，一共可得10个命题。关于推论1(3)的命题："弦的垂直平分线经过圆心，并平分弦所对的弧"，可启发学生证明如下：



已知：圆 O 中弦 AA'，弦 $CD\perp AA'$，垂足 M，$AM=MA'$，

求证：(1) CD 是直径；(2) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CA'}$；(3) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DA'}$.

启发学生，利用原命题垂径定理来证，即

$$\left.\begin{array}{r}\text{作直径}C'D'\perp AA',\Longrightarrow AM'=M'A'\\ \text{已知：}AM=M'A'\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}M\text{和}M'\text{重合}\\ \text{已知：}CD\perp AA'\text{垂足}M\end{array}\right\}\Longrightarrow CD\text{和}C'D'\text{重合}$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}CD\text{是直径}\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CA'}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DA'}\end{array}\right.$$

通过对命题结构的分析，使学生掌握了垂径定理和它的逆命题之间的逻辑关系，在语言和式子的表达上，在推理方法上也得到锻炼，思路随之开阔。

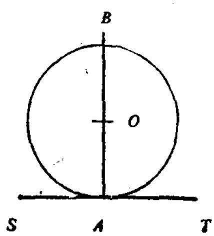
又例如，圆的切线的判定定理："经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。"分析命题时可提问：

（1）如果删去"经过半径的外端"这个条件，结论能成立吗？

（2）如果删去"垂直于这条半径"的条件，结论将起怎样的变化？

（3）命题中的条件是什么？结论是什么？

明确"经过半径的外端"、"和这条半径垂直"是判定一条直线为圆的切线的两个条件，缺一不可。在此基础上，再从分析命题着手，引进切线的性质定理，即把切线作为条件，而把过切点的线与半径垂直作为结论。要求学生画图，列式对照切线的性质定理和两个推论，如右图所示：



（1）已知：圆O的切线ST，

点A为切点，

OA为半径，

求证：$ST\perp OA$。（切线的性质）

（2）已知：圆O的切线ST，

$ST\perp OA$，

OA为半径，

求证：点A为切点。（推论1）

（3）已知：圆O的切线ST，

点A为切点，

$ST\perp AB$，

求证：AB经过圆心。（推论2）

三个命题的论证采用同一证法，一方面启发学生重温有关垂线的公理和定理，另一方面证明过程要形象具体。例如，在ST上