中学数学解题方法

判别式法

王绍华

四川教育出版社

中学数学解题方法

判别式法

王绍华

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　判别式法

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　绵阳新华印刷厂印刷

开本787×960毫米　1/32　印张3.625　字数54千
1989年11月第一版　1991年8月第二次印刷
印数：4651—11650册

ISBN7—5408—1131—5/G·1102　定价：1.08元

前　言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的"钥匙"。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以"方法"为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1．以方法成书。每册书全面系统地介绍了一种方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一

种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2。方法的介绍力求科学性与趣味性的统一。定义、定理公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3。例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编 者

1988.10

目　　录

什么是判别式法

朋友，你喜欢数学吗？你善于解数学题吗？你会把初中数学的基础知识和基本方法迁移并推广到高中数学里去吗？

请你试着解这样一道习题："在$\triangle ABC$中，已知$\cos A+\cos B+\cos C=3/2$，求A、B的值。"

由条件知道，A、B、C三个量并不独立，由$A+B+C=\pi$得$C=\pi-(A+B)$，于是有

$$\cos A+\cos B-\cos(A+B)=3/2.$$

现在又该如何作呢？咋一看，似乎很棘手！

你如果一时不能想起，请看下面的解法中破题的关键是什么？你受到了什么启发？

由 $\cos A+\cos B-\cos(A+B)=3/2$ 得

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1=3/2,$$

把上式整理成关于$\cos\frac{A+B}{2}$的二次方程

$$4\cos^2\frac{A+B}{2}-4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+1=0.$$

由于$\cos\frac{A+B}{2}\in R$，$\cos\frac{A-B}{2}\in R$，于是根据“实系数的一元二次方程有实解，则判别式$\Delta\geqslant 0$”

得$\Delta=16\cos^2\frac{A-B}{2}-16\geqslant 0$，

$\therefore\quad -\sin^2\frac{A-B}{2}\geqslant 0$，$\quad\sin\frac{A-B}{2}=0$。

又 $\because\quad \frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$。

$\therefore\quad \frac{A-B}{2}=0$，即$A=B$。

解上面二次方程得

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{4\cos\frac{A-B}{2}}{2\times 4},$$

即 $\cos A=\frac{1}{2}$，$\quad A=B=\frac{\pi}{3}$。

把 $A=B=\frac{\pi}{3}$代入原式检验是正确的。

将已知的三角式变形整理成关于某个实数的一元二次方程，利用判别式$\Delta\geqslant 0$求解是解本题的关键。

通过这个例子，可以看到：使用判别式解题是很巧妙的。那么，什么是判别式法？它有些什么作用？如何应用呢？这就是本文所要讨论的主要内

答。请对此感兴趣的同学和我们一起来研究。

首先我们复习有关判别式的一些基本概念。

实系数的关于x的二次方程

$ax^2+bx+c=0$

$(a\neq 0$，a、b、c为常数$)$ ①

的根的判别式是$\Delta=b^2-4ac$。众所周知：

当$\Delta>0$时，方程①有两个不相等的实数根：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

当$\Delta=0$时，方程①有两个相等的实数根：$x_{1,2}=-b/2a$；

当$\Delta<0$时，方程①没有实数根，但有两个共轭的虚数根：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}\quad(\text{其中}i^2=-1)。$$

反之，如果实系数的关于x的二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$有两个不相等的实数根、有两个相等的实数根和没有实数根，那么$\Delta=b^2-4ac$分别大于零、等于零和小于零。

这就是说，实系数的关于x的二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$有不相等的实数根、有相等的实数根和没有实数根的充要条件分别是$\Delta>0$、$\Delta=0$和$\Delta<0$。

因为二次三项式，二次函数，二次不等式，二

次曲线等与一元二次方程都有密切的关系。所以涉及上述有关问题时，常需应用判别式，象这种用实系数的一元二次方程的判别式去解决数学问题的方法，通常叫做判别式法。

利用判别式及它的推广可以判别一元二次方程根的性质；求某些参数的值和范围或求几个参数间的关系；求某些函数的值域和极值（或最值）；判断直线与圆锥曲线、圆锥曲线与圆锥曲线间的位置关系；判断二次曲线的类型；证明某些不等式等。

判别式的初步应用

一、不解方程，判断一元二次方程根的性质

例1 判断下列方程有无实数根，如果有实数根试确定它们的符号：

(1) $x^2-2x-2=0$；(2) $4x^2-4x+1=0$。

解：(1) $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-2)$

$=12>0$，

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根。

设x_1，x_2为原方程的两个根，

$\because$ $x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-2<0$，$\therefore$原方程的一根为正，另一根为负。

又$\because$ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2>0$，$\therefore$正根的绝对值较大。

(2) $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times1=0$，所以原方程有两个相等的实数根。

设x_1，x_2为原方程的两个等根，因为 x_1+x_2

$=-\frac{b}{a}=1>0$，所以这两个根都是正的。

例2 设m为有理数，k为何值时，方程

$$x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$$

的根为有理数。

分析：设已知方程的根为x_1，x_2，则

$$x_{1,2}=\frac{4(m-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2},$$

其中 $\Delta=[4(1-m)]^2-4(3m^2-2m+4k)$。

要使两根为有理数，必须而且只需判别式Δ为某个有理数q的平方，由此即可确定k。

解：$\Delta=[4(1-m)]^2-4(3m^2-2m+4k)$

$$=4(m^2-6m+4-4k).$$

设$4(m^2-6m+4-4k)=q^2$（其中q为有理数），

则 $k=\frac{1}{16}(4m^2-24m+16-q^2)$。

所以，当 $k=\frac{1}{16}(4m^2-24m+16-q^2)$ 时（其中q为有理数），都能使原方程的根为有理数。

评注：要使一元二次方程的根为有理数，不必要求方程的判别式为完全平方式，只需为某一有理数的平方。如a^2+11不是完全平方式，但当$a=5$时，$a^2+11=36$是有理数6的平方。

例3 已知关于x的方程

$$(x^2-x+1)n=-3x+1,$$

求整数n，使得方程的解为整数，并求出这些整数解。

分析：把已知的方程整理成关于x的一元二次方程后，必须讨论x^2项的系数$n\neq0$和$n=0$两种情况。

解：把原方程整理为

$$nx^2+(3-n)x+n-1=0.$$

当$n\neq0$时，要使方程有整数解，须有$\Delta\geqslant0$，

即 $(3-n)^2-4\cdot n\cdot(n-1)$

$$=-(3n^2+2n-9)\geqslant0.$$

解得 $-\frac{1}{3}(1+2\sqrt{7})\leqslant n\leqslant\frac{1}{3}(-1+2\sqrt{7})$，

其中的整数n为-2，-1，1。（$\because n\neq0$）

由$n=-2$，得$x=1$或$x=\frac{3}{2}$（舍）；

由$n=-1$，得$x=-2\pm\sqrt{2}$（舍）；

由$n=1$得 $x=0$或$x=-2$。

当$n=0$时，原方程为$3x-1=0$，没有整数解。

所以当n为-2和1时，方程有整数解且分别是1和0，-2。

例4 讨论k取何实数时，方程组

$$\begin{cases} x^2-2x-4y+1=0, & ①\\ x-y-k=0, & ②\end{cases}$$

（1）有不同的两个实数解；

（2）有相同的两个实数解；

（3）无实数解。

解：由②得$y=x-k$，代入①得

$$x^2-2x-4(x-k)+1=0,$$

整理得 $x^2-6x+4k+1=0$。 ③

$\Delta=36-16k-4=-16(k-2)$。

（1）当$\Delta>0$即$k<2$时，方程③有两个不同的实数根，则原方程组有两个不同的实数解；

（2）当$\Delta=0$即$k=2$时，方程③有两个相等的实数根，则原方程组有两个相同的实数解；

（3）当$\Delta<0$即$k>2$时，方程③没有实数根，则原方程组没有实数解。

在判断实系数一元二次方程根的性质时，有时需证明$\Delta\geqslant 0$或$\Delta<0$，如何证明？请看下面几个例子。

例5 设k为实数，求证方程

$$x^2+2kx=4-k$$

必有两个相异的实数根。

分析：要证方程有两个相异实数根，就是要证明它的判别式$\Delta=4k^2-4(k-4)>0$对于$k\in R$时恒成立。而对于k的二次式，又只需证$\Delta=16(1-4\times 4)<0$，而这显然是成立的。

证法一：（由分析不难写出，请读者自己补证。）

证法二：已知方程整理为

$$x^2+2kx+k-4=0,$$

$$\Delta=4k^2-4(k-4)=4(k^2-k+4)$$

$$=4(k-\frac{1}{2})^2+15,$$

$\because(k-\frac{1}{2})^2\geqslant0$，$\therefore4(k-\frac{1}{2})^2+15>0$。

所以原方程有两个相异的实数根。

例6 求证无论a、b、c为任何实数，方程

$(c-x)^2-4(b-x)(a-x)=0$ 总有实数根。

分析：要证所给方程有实数根，即证判别式$\Delta\geqslant0$，而Δ是含a，b，c的二次齐次式，可用配方法把Δ变形整理成三个完全平方式之和，从而得证。

方法一：把已知方程整理成

$$3x^2-2(2a+2b-c)x+4ab-c^2=0.$$

$$\Delta=[2(2a+2b-c)]^2-4\cdot3\cdot(4ab-c^2)$$

$$=8(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=8[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$$

$$=8[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$\because$ a，b，c为实数，

$\therefore$ $(a-b)^2\geqslant0$，$(b-c)^2\geqslant0$，$(c-a)^2\geqslant0$。

$\therefore \quad \Delta \geqslant 0$。

所以无论a，b，c为任何实数，题设所给的方程总有两个实数根。

证法二：同"证法一"得

$\Delta = 16(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\quad = 16[a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc]$，

对于关于a的二次三项式

$$a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc,$$

其判别式 $\Delta' = (b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)$

$\quad = -3b^2-3c^2+6bc$

$\quad = -3(b-c)^2$。

$\because \quad b$，c为实数，$\therefore (b-c)^2 \geqslant 0$，

$\therefore \quad \Delta' \leqslant 0$。

又 $\because a^2$的系数为$1>0$，$\therefore \Delta \geqslant 0$。

所以所给方程总有实数根。

评注：证明二次三项式恒大于或小于零，可用配方法或用判别式法。

例7 若a，b，c为$\triangle ABC$的三边，求证：方程 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 没有实数根。

分析：由题设知三角形的三边为a，b，c。根据三角形三边的关系联想到：(1) 三角形的任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边；