

2005



硕士研究生入学考试

“考试虫” 数学(一)

8套模拟试卷



主编：教育部考研数学资深命题专家

蔡燧林教授(1992~2000年命题)

胡金德教授(1989~1997年命题)

范培华教授(1987~2000年命题)

李恒沛教授(1987~2001年命题)

王式安教授(1987~2001年命题)

周概容教授(1987~2003年命题)

赠30元

网上超值服务

航空工业出版社

2005 硕士研究生入学考试

“考试虫”数学(一)

8 套模拟试卷

主编：教育部考研数学资深命题专家

蔡燧林教授(1992~2000年命题)

胡金德教授(1989~1997年命题)

范培华教授(1987~2000年命题)

李恒沛教授(1987~2001年命题)

王式安教授(1987~2001年命题)

周概容教授(1987~2003年命题)

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试“考试虫”数学8套模拟试卷/
王式安等主编. —北京:航空工业出版社, 2004.8
ISBN 7-80183-423-2

I. 硕... II. 王... III. 高等数学—研究生—入学
考试—习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070805 号

硕士研究生入学考试“考试虫”数学8套模拟试卷

Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Kaoshi “Kaoshi Chong” Shuxue 8 Tao Moni Shijuan

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行电话:010-82863351/2 010-82867079

010-64978486 010-84926529

北京富生印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

2004年8月第1版

2004年8月第1次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:35.5 字数:670千字

印数:1—8000

全四册定价:48.00元

本社图书如有缺页、倒页、脱页、残页等情况,请与本社发行部联系负责调换。
对本书任何形式的侵权均由李文律师代理。电话:13601002700。

前 言

本书特点:

1. 含金量高. 教育部考研数学试题的命制经过多年的风风雨雨形成了一套成熟的运作体系, 其命题人员、命题思路具有明显的延续性和稳定性, 从而确保了极强的科学性. 我们荣幸地邀请到教育部考试中心, 考研数学资深命题人员: 蔡燧林教授 (1992~2000 年命题)、胡金德教授 (1989~1997 年命题)、范培华教授 (1987~2000 年命题)、李恒沛教授 (1987~2001 年命题)、王式安教授 (1987~2001 年命题)、周概容教授 (1987~2003 年命题), 每套试卷均由以上教授严格按照 2005 年考研大纲要求、精选材料、逐题推敲、优化设计而命制完成. 题型和题量与 2005 年考研试题完全一致, 并按考试大纲中的样题排版. 本书编者既是数学考试大纲的制定者, 又是多年的数学命题人, 对考研数学命题绝对有最深刻、最权威的把握. 可以断言, 由他们所编写的这 8 套试卷, 无论从深度、广度, 还是风格都与真题高度一致; 对考生而言, 这 8 套试卷的含金量是最高的.

2. 所有习题解答准确详尽. 鉴于有些同类辅导用书没有给出解题的正确详尽过程, 给考生使用带来不便, 本书对所有习题 (包括填空、选择) 都给出了清晰、翔实的解答. 本书通过试卷解析加强对考点的认识, 理清解题思路, 了解考试的最新动态和最新发展趋势, 让全国的考生共享名师的指点, 以节约最后复习阶段的宝贵时间, 帮助考生取得理想的成绩.

建议考生在使用本书时不要就题论题, 而是要通过对试题的比较、对试卷详尽解析和对复习方法的把握, 发现一些规律性的东西, 使这些宝贵资料为己所用, 从而迅速提高自身水平和应试能力, 轻松应对考试. 如果在使用本书时, 感觉基础欠佳, 可以参看由这些教授编写的《考研数学基础教程》一书.

考试虫

2004 年 8 月

目 录

数学(一)卷1 试卷	(1)
数学(一)卷2 试卷	(9)
数学(一)卷3 试卷	(17)
数学(一)卷4 试卷	(25)
数学(一)卷5 试卷	(31)
数学(一)卷6 试卷	(39)
数学(一)卷7 试卷	(47)
数学(一)卷8 试卷	(55)
数学(一)卷1 参考答案与分析	(63)
数学(一)卷2 参考答案与分析	(73)
数学(一)卷3 参考答案与分析	(81)
数学(一)卷4 参考答案与分析	(90)
数学(一)卷5 参考答案与分析	(98)
数学(一)卷6 参考答案与分析	(105)
数学(一)卷7 参考答案与分析	(114)
数学(一)卷8 参考答案与分析	(121)



数学(一) 卷 1

得分	评卷人

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} + 5\sin 401x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 二元函数 $Z = \ln(e^{xy} + x^2 + y^3)$ 在点 $M(1,0)$ 处的梯度方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) = a$, 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0) = 0, \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t, t > 0\}$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 已知向量 $\vec{a} = \{1, 2, 2\}, \vec{b} = \{4, 3, -5\}$, 常数 $\beta > 0$. 设向量 $\vec{a} + \beta \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 2\beta \vec{b}$ 垂直, 则 $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (5) A 是三阶矩阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3. f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10$, 则 $f(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (6) 将 4 封信等可能地投入 4 个信箱中去, 已知前两封信放入不同信箱的条件下, 则后两封信投入后恰有三封信在同一信箱的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

- (7) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 3 阶可导, 且 $f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) > 0$. 则
 - (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
 - (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 是极大值点.
 - (C) 在点 $(0, f(0))$ 的左、右侧邻域曲线 $y = f(x)$ 分别为凹与凸的.
 - (D) 在点 $(0, f(0))$ 的左、右侧邻域曲线 $y = f(x)$ 分别为凸与凹的.

- (8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 则
 - (A) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 它有且仅有一个原函数为奇函数.
 - (B) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 它有且仅有一个原函数为偶函数.
 - (C) 当 $f(x)$ 为 T 周期函数时, 它有且仅有一个原函数为 T 周期函数.
 - (D) 当 $f(x)$ 为 T 周期函数时, 它的一切原函数都是 T 周期函数.

[]

[]



(9) 级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

(A) $\sqrt{2}$.

(B) $\sqrt{3}$.

(C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(D) 2.

【 】

(10) 下列一些计算中,正确的是

(A) 因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数,所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$.

(B) $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sec^2 x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\tan^2 x + 2} d\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\tan x) \Big|_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$.

(C) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = 0 - 0 = 0$.

(D) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$ $f(x)$ 是奇函数,所以 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

【 】

(11) 设 A, B 是 n 阶实对称可逆矩阵,则下列命题错误的是

(A) 存在可逆阵 P, Q ,使得 $PAQ = B$.

(B) 存在可逆阵 P ,使得 $P^{-1}ABP = BA$.

(C) 存在可逆阵 P ,使得 $P^T A^2 P = B^2$.

(D) 存在正交阵 Q ,使得 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = B$.

【 】

(12) 设 A 是三阶矩阵, $\xi_1 = [1, 2, -2]^T$, $\xi_2 = [2, 1, -1]^T$, $\xi_3 = [1, 1, t]^T$ 是线性非齐次方程组 $AX = b$ 的解向量,其中 $b = [1, 3, -2]^T$,则

(A) $t = -1$,必有 $r(A) = 1$.

(B) $t = -1$,必有 $r(A) = 2$.

(C) $t \neq -1$,必有 $r(A) = 1$.

(D) $t \neq -1$,必有 $r(A) = 2$.

【 】

(13) 设随机事件 A 和 B 满足关系式 $\bar{A} \cup B = A \cup \bar{B}$,则必有

(A) $A \cup B = \Omega$.

(B) $AB = \emptyset$.

(C) $A - B = \emptyset$.

(D) $\overline{AB} \cup \overline{AB} = \Omega$.

【 】

(14) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本,

证 $\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$, $1 \leq k \leq n$, 则 $\text{cov}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}) =$

(A) σ^2 .

(B) $\frac{\sigma^2}{k}$.

(C) $\frac{\sigma^2}{k+1}$.

(D) $\frac{\sigma^2}{k(k+1)}$.

【 】



三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15) (本题满分 12 分)

命 $y = \frac{u}{x}$ 变换微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0$ 为 u 关于 x 的微分方程,并求原微分方程的解 $y = y(x)$,要求此解在区间 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内均有界.

得分	评卷人

(16) (本题满分 12 分)

试将函数 $f(x) = \ln \frac{1}{3 - 2x - x^2}$ 展成 $(x + 1)$ 的幂级数,指明展开式成立的范围.



得分	评卷人

(17) (本题满分 12 分)

计算 $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = a$ ($a > 0$) 的交线, 从原点看去, L 是逆时针的.

得分	评卷人

(18) (本题满分 12 分)

设有一质量均匀分布的长为 $2l$ 的细杆, 线密度为 μ . 在此细杆中垂线上与此细杆相距为 a 处有一质量为 m 的质点 A .

(I) 求此细杆对质点 A 的引力;

(II) 将质点 A 沿中垂线移至 B 处, B 与细杆相距为 b ($b > a$), 求对此质点所作的功.



得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内二阶可导, 并设 $f(0) < 0, f'(0) = 0, f''(x) > 0$ (当 $x \geq 0$). 证明: 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x)$ 存在惟一零点.

得分	评卷人

(20) (本题满分 8 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$

问 a, b 为何值时, 矩阵方程 $AX = B$ 无解.

问 a, b 为何值时, 矩阵方程 $AX = B$ 有解, 有解时, 求出其全部解.



得分	评卷人

(21) (本题满分 10 分)

设 A 是 n 阶矩阵, A 的第 i 行, j 列的元素 $a_{ij} = i \cdot j$, 求 A 的特征值, 特征向量, 并问 A 能否相似于对角阵, 若能, 求出相似对角阵, 若不能, 则说明理由.

得分	评卷人

(22) (本题满分 9 分)

已知随机变量 x 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Y = X^2 + 1$ 的概率密度 $f_Y(y)$.



得分	评卷人

(23) (本题满分 9 分)

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是取自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, \quad -\infty < x < +\infty, \lambda > 0$$

试求 (I) λ 的矩估计;

(II) 验证所得矩估计是否为无偏估计.



数学(一) 卷2

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 经过曲线 $y = 2x^2$ 上的点 $(x_0, 2x_0^2)$ 作该曲线的法线 L , 使 L 通过点 $(9, 0)$, 则 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) 设 $u = u(x, y)$ 可微, 且 $u(x, x^2) = 1, u'_1(x, x^2) = x$. 则当 $x \neq 0$ 时 $u'_2(x, x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 设 C 为任意常数, 以 $y = e^{x^2+C}$ 为通解的微分方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (5) 设 $A = E + \alpha\beta^T$. 其中 α, β 是 n 维列向量, 且有 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (6) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y)$, 则随机变量 (Y, X) 必有概率密度函数, 且其密度 $f_1(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

- (7) 直线 $L_1: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z + 15 = 0 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \frac{x-6}{-4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{2}$
 - (A) 垂直不相交.
 - (B) 垂直相交.
 - (C) 相交不垂直.
 - (D) 既不垂直也不相交.

【 】
- (8) 设 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域有定义, $f(x) = g(x)|\ln(1+x)|$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是
 - (A) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 存在.
 - (B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 分别存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
 - (C) $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.
 - (D) $g(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

【 】
- (9) 设将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的正项保留, 负项改为零, 所成的级数记为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的负项保留, 正项改为零, 所成的级数记为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. 则正确的是



(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必条件收敛.

【 】

(10) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in (a, b)$ 有 $\int_a^x f(t)dt > \int_a^x g(t)dt$, 则必有

(A) $f(x) > g(x)$, 当 $x \in (a, b)$. (B) $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

(C) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| > \left| \int_a^b g(x)dx \right|$. (D) $\int_a^b (b-t)f(t)dt > \int_a^b (b-t)g(t)dt$.

【 】

(11) 设 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]C_{n \times n}$, 要保持等式成立, 则

(A) 若将 α_i, α_j 对换后, 应将 β_i, β_j 列对换.

(B) 若将 α_i, α_j 对换后, 应将 C 的 i 行与 j 行对换.

(C) 若将 β_i, β_j 对换后, 应将 C 的 i 列和 j 列对换.

(D) 若将 β_i, β_j 对换后, 应将 C 的 i 行与 j 行对换.

【 】

(12) 设 A 是三阶实对称矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是三个非零特征值, 且满足 $a \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq b$, 若 $kA + E$ 是正定矩阵, 则参数 k 应满足

(A) $k > \frac{-1}{a}$. (B) $k > a$.

(C) $k > b$. (D) $k < \frac{-1}{b}$.

【 】

(13) 对任意两个随机事件 A, B , 仅从 $P(A - B) = P(A)$, 并不能得出

(A) $P(A - B) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(\bar{A}) - P(AB)$.

(B) $P(\bar{A} - B) = P(\bar{A}) - P(B)$.

(C) $P(\overline{A - B}) = P(A) - P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

(D) $P((A \cup B)(A - B)) = P(A)$.

【 】

(14) 设随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 现检验总体 X 的均值大于 Y 的均值, 则应检验假设

(A) $H_0: \mu_1 > \mu_2$; (B) $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$; (C) $H_0: \mu_1 < \mu_2$; (D) $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$;

$H_1: \mu_1 \leq \mu_2$. $H_1: \mu_1 < \mu_2$. $H_1: \mu_1 \geq \mu_2$. $H_1: \mu_1 > \mu_2$.

【 】



三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15) (本题满分 12 分)

$$\text{设 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

求 $f'_x(0, 0)$, 并证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微.

得分	评卷人

(16) (本题满分 12 分)

求一条凹曲线 $y = y(x)$, 已知其上任一点处的曲率 $k = \frac{1}{2y^2 \cos \alpha}$, 其中 α 为该曲线在相应点处的切线的倾角 ($\cos \alpha > 0$), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线为水平.



得分	评卷人

(17) (本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的上半球的上侧.

得分	评卷人

(18) (本题满分 12 分)

设 $U_1 = 1, U_2 = 1, U_{n+2} = 2U_{n+1} + 3U_n (n = 1, 2, \dots)$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n}$ 的敛散性, 说明理由.



得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分)

设 S 为锥面 $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 截下的有限部分, 计算 $\iint_S (x^2 + xz) dS$.

得分	评卷人

(20) (本题满分 8 分)

A, B 是 n 阶矩阵

(I) A 是什么矩阵时, 若 $AB = A$, 必有 $B = E$.

A 是什么矩阵时, 有 $B \neq E$, 使得 $AB = A$.

(II) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. 求所有的 $B \neq E$, 使得 $AB = A$.

(III) 设 $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, 求所有的 A , 使 $AB = A$.