

數理化學習參考叢書

三角習題詳解

俞樹德編



北京書店刊行

數理化學習參考叢書

三角習題詳解

(原名三角難題詳解)

俞樹德編

北京書店刊行

三角習題詳解

有版權

編者
出版者
發行者

俞樹德

北京琉璃廠九六號

電話：三局四九二五號

上海漢口路同安大樓110號

電話：九七七八二號

分店

天津河北路188號傅德里

電話：二局一〇八五號

石家莊中山路一二六號

電話：三四一〇號

經售處

全國各大書店

一九五二年一月再版

前 言

(一) 本書參照中央人民政府教育部“普通中學數理化教材精簡提綱草案”編輯。適於具有初中三年級以上數學程度，有志學習三角學者自學、複習、參考之用。

(二) 本書以平面三角學為範圍，理論和應用兩方面並重。

(三) 本書各習題，採自中外通行的高中三角學各課本及各大學入學試題，逐一詳解，學者能按步詳閱，不難澈底了解。

(四) 本書憑編者個人數學經驗而編輯，難免有錯誤或欠妥的地方，希望讀者多多批評指教！

本書原名「三角難題詳解」現為切合實際內容，改名為「三角習題詳解」

編 者

目次

一、角的度量	1
A. 量角法	1
B. 換算法	2
C. 弧長和扇形面積與 π 的關係	2
習題一	2
二、銳角三角函數及應用	7
A. 三角函數的定義	7
B. 函數間的基本關係	7
習題二	8
C. 特別角的三角函數	10
D. 三角函數表檢查法	11
習題三	12
E. 直角三角形及正多邊形解法	17
F. 簡易測量問題	18
習題四	20
三、任意角三角函數	34
A. 任意角	34
B. 坐標和象限	35
習題五	36
C. 任意角三角函數的定義	37
D. 任意角三角函數相互間的關係	39
習題六	41
E. 三角函數的線值定義	45
F. 三角函數的變值	46
習題七	48
G. 化任意角三角函數為銳角函數法	49

習題八	54
四、三角分析及恆等式	63
A. 三角函數間的基本關係	63
B. 二角和與二角差的正弦及餘弦	64
習題九	67
C. 二角和與二角差的正切及餘切	73
D. 二倍角的三角函數	74
習題十	75
E. 半角的三角函數	80
F. 三倍角的三角函數	82
習題十一	82
G. 二角正弦餘弦的乘積	89
H. 二角正弦或餘弦的和及差	89
I. 三角恆等式	89
習題十二	90
五、反三角函數及三角方程式	99
A. 角的通值	99
B. 反三角函數	100
習題十三	101
C. 反三角函數恆等式	104
D. 三角方程式	105
習題十四	106
六、對數的應用	120
A. 對數的定義和性質	120
B. 求對數及反對數的方法	120
習題十五	123
C. 計算上對數的應用	128
D. 用對數解指數方程式	129
E. 用對數解直角三角形	129

習題十六	131
七、任意三角形解法	144
A. 正弦定律	144
B. 任意三角形已知二角和一邊的解法	145
C. 任意三角形已知二邊及其一對角的解法	146
習題十七	148
D. 餘弦定律	158
E. 正切定律	159
F. 任意三角形已知二邊及其夾角的解法	160
習題十八	162
G. 半角定律	170
H. 任意三角形已知三邊的解法	174
I. 求任意三角形的面積	174
習題十九	175
J. 任意三角形解法的應用問題	191
習題二十	193
八、三角函數的圖象表示法	206
A. 三角函數的圖象	206
B. 三角函數的週期性	207
C. 用單位圓繪三角函數的圖象	208
習題二十一	209
附錄一 近於 0° 或 90° 的銳角	214
附錄二 重要公式	218

三角習題詳解

一 角的度量

A. 量角法 度量角的單位有三種：

(1) 角度法 Degree measure 爲英國制，又稱六十分法，世界各國實用時均用之。單位爲一周角的 $\frac{1}{360}$ 稱爲度，Degree，用($^{\circ}$)表之。每度的 $\frac{1}{60}$ 爲分，Minute，用($'$)表之。每分的 $\frac{1}{60}$ 爲秒，Second，用($''$)表之。則： $1rt.\angle = 90^{\circ}$ ， $1^{\circ} = 60'$ ， $1' = 60''$ 。

(2) 弧度法 Circular measure 又稱弧度法，理論數學中所通用。單位爲等於圓半徑長的弧所對的圓心角，稱爲徑 Radian。則： $2st.\angle$ (一周角) $= 2\pi$ 徑， $st.\angle = \pi$ 徑， $rt.\angle = \frac{\pi}{2}$ 徑。(徑又稱本位角普通不用符號)。

(3) 百分法 Centesimal measure 爲法國制定，實際上應用很少。單位爲一直角的 $\frac{1}{100}$ ，即一周角的 $\frac{1}{400}$ ，稱爲級 Grade，或稱法度，用(g)表之。每級的 $\frac{1}{100}$ 爲法分，用($'$)表之。每法分的 $\frac{1}{100}$ 爲法秒，用($''$)表之。則： $1st.\angle = 200g$ ， $1rt.\angle = 100g$ ， $1g = 100'$ ， $1' = 100''$ 。

B. 換算法 各制大小單位互化可用進位數乘除而得，不贅述。上述三種單位換算，可用 $1 \text{ rad. } \angle = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ 徑} = 100g$ 為標準而求得相互關係如下：

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 徑} = 0.01745333 \text{ 徑}; \quad 1 \text{ 徑} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.2957^\circ \\ = 57^\circ 17' 45''。 \quad 1^\circ = \frac{10}{9}g; \quad 1g = \frac{9^\circ}{10}。 \quad 1 \text{ 徑} = \frac{200}{\pi}g \\ = 63.662g; \quad 1g = \frac{\pi}{200} \text{ 徑} = 0.015708 \text{ 徑}。$$

C. 弧長和扇形面積與徑的關係：

(1) 弧長 設一圓半徑為 r ，這圓周上一段弧長為 s ，而所對的圓心角為 x 徑，則依徑法的定義可得 $x = \frac{s}{r}$ ； x, s, r ，三數任知其二，必可求得第三數。

(2) 扇形面積 設一圓半徑為 r ，圓周上一段弧長為 s ，這弧與二端點的半徑圍成扇形面積為 A ，圓心角為 x 徑，則依幾何定理可得： $A = \frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}xr^2 = \frac{1}{2x}s^2$ 。

習 題 一

1. 化 $34^\circ 13' 7''$ 為秒！

【解】 $34^\circ 13' 7'' = 60'' \times (60 \times 34 + 13) + 7'' = 123187''$ 。【答】

2. 化 $87435''$ 為度分秒！

【解】 $60 \overline{) 87435''}$
 $60 \overline{) 1457'} \dots\dots 15''$
 $24^\circ \dots\dots 17'$ 【答】 $87435'' = 24^\circ 17' 15''$ 。

3. 化 $64^\circ 17' 24''$ 為度！

【解】 $64^\circ 17' 24'' = 64^\circ + \frac{17^\circ}{60} + \frac{24^\circ}{3600} = 64^\circ + 0^\circ.29 = 64^\circ.29$ 。【答】

4. 化 $35^{\circ}15'13''$ 為級, 及法分, 法秒!

$$\begin{aligned} \text{【解】 } 35^{\circ}15'13'' &= 35^{\circ} + \frac{15}{100}^{\circ} + \frac{13}{10000}^{\circ} = 35.1513^{\circ} \\ &= 100' \times 35 + 15' + \frac{13}{100}' = 3515.13' \\ &= 100'' \times (100 \times 35 + 15) + 13'' \\ &= 351513'' \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{【答】}$$

5. 化下列各角的徑為角度:

(1) $\frac{\pi}{6}$, (2) $\frac{\pi}{4}$, (3) $\frac{\pi}{3}$, (4) $\frac{2\pi}{3}$, (5) $\frac{4\pi}{3}$, (6) $\frac{3\pi}{2}$,

(7) $\frac{5\pi}{12}$, (8) $\frac{14\pi}{3}$, (9) $\frac{\pi+2}{6}$, (10) 1.3 , (11) $\frac{1}{2}$, (12) $\frac{5}{2}$.

【解】 (1) $\frac{\pi}{6} = \frac{180^{\circ}}{6} = 30^{\circ}$; (2) $\frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$; (3) $\frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$;

(4) $\frac{2\pi}{3} = 120^{\circ}$; (5) $\frac{4\pi}{3} = 240^{\circ}$; (6) $\frac{3\pi}{2} = 270^{\circ}$;

(7) $\frac{5\pi}{12} = 75^{\circ}$ (8) $\frac{14\pi}{3} = 840^{\circ}$; (9) $\frac{\pi+2}{6} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \times \frac{\pi+2}{6}$

$= 49^{\circ}15'55''$; (10) 1.3 徑 $= \frac{180^{\circ}}{\pi} \times 1.3 = 74^{\circ}29'4''$.

(11) $\frac{1}{2}$ 徑 $= \frac{180^{\circ}}{\pi} \times \frac{1}{2} = 28^{\circ}38'52''$; (12) $\frac{5}{2}$ 徑 $= 143^{\circ}14'22''$.

6. 用徑表下列各角:

(1) a. 990° , b. 28° , c. 45.6° , d. $142^{\circ}43.2'$,
e. $125^{\circ}23'19''$.

(2) a. 60° , b. 240° , c. $68^{\circ}43'$, d. $152^{\circ}24'36''$.

【解】 (1) a. $990^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times 990 = \frac{11\pi}{2} = 17.2788(\text{徑})$;

b. $28^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times 28 = \frac{7\pi}{45} = 0.4887(\text{徑})$;

$$c. 45.6^\circ = \frac{\pi}{180} \times 45.6 = 0.79587 \text{ (弧度)};$$

$$d. 142^\circ 43.2' = 142.72^\circ = \frac{\pi}{180} \times 142.72 = 2.49094 \text{ (弧度)};$$

$$e. 125^\circ 23' 19'' = 125.3886^\circ = \frac{\pi}{180} \times 125.3886 \\ = 2.1884 \text{ (弧度)}.$$

$$(2) a. 60g = \frac{\pi}{200} \times 60 = 0.94248 \text{ (弧度)};$$

$$b. 240g = \frac{\pi}{200} \times 240 = 3.76992 \text{ (弧度)};$$

$$c. 68g 43' = 68.43g = \frac{\pi}{200} \times 68.43 = 1.075 \text{ (弧度)};$$

$$d. 152g 24' 36'' = 152.2436g = \frac{\pi}{200} \times 152.2436 \\ = 2.39 \text{ (弧度)}.$$

7. 化下列各角为百分制!

$$(1) a. \frac{4}{3}\pi, b. 1.4, c. \frac{3}{2}, d. \frac{5\pi}{12}.$$

$$(2) a. 210^\circ, b. 31^\circ.21, c. 63^\circ 18', d. 42^\circ 40' 12''.$$

$$\text{【解】} (1) a. \frac{4}{3}\pi = \frac{200}{\pi}g \times \frac{4}{3}\pi = \frac{800}{3}g = 266\frac{2}{3}g.$$

$$b. 1.4 = \frac{200}{\pi}g \times 1.4 = 89.1268g = 89g 12' 68''.$$

$$c. \frac{3}{2} = \frac{200}{\pi}g \times \frac{3}{2} = 95.4935g = 95g 49' 30''.$$

$$d. \frac{5\pi}{12} = \frac{200}{\pi}g \times \frac{5\pi}{12} = \frac{250}{3}g = 83\frac{1}{3}g.$$

$$(2) a. 210^\circ = \frac{10}{9}g \times 210 = \frac{700}{3}g = 233\frac{1}{3}g.$$

$$b. 31^\circ.21 = \frac{10}{9}g \times 31.21 = \frac{312.1}{9}g = 34g 67' 78'' \\ = 34g 67' 78''$$

$$c. 63^\circ 18' = 63.3^\circ = \frac{10}{9}g \times 63.3 = 70\frac{1}{3}g.$$

$$\begin{aligned} d. 42^{\circ}40'12'' &= 42^{\circ}.67 = \frac{10}{9}g \times 42.67 = 47.4111g \\ &= 47g41'11''. \end{aligned}$$

8. 用角度、徑及百分法表出下列各角：

- (1) 四直角的十分之七；(2) 二直角的五分之四；
(3) 一直角的三分之二。

$$\begin{aligned} \text{【解】}(1) \frac{7}{10} \cdot 4rt. \angle &= \frac{14}{5} rt. \angle = \frac{14}{5} \times 90^{\circ} = 252^{\circ} \\ &= \frac{14}{5} \times \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{5} (\text{徑}) = \frac{14}{5} \times 100g = 280g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{4}{5} \cdot 2rt. \angle &= \frac{8}{5} rt. \angle = \frac{8}{5} \times 90^{\circ} = 144^{\circ} \\ &= \frac{8}{5} \times \frac{\pi}{2} = \frac{4}{5} \pi (\text{徑}) = \frac{8}{5} \times 100g = 160g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{2}{3} rt. \angle &= \frac{2}{3} \times 90^{\circ} = 60^{\circ} = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} (\text{徑}) \\ &= \frac{2}{3} \times 100g = \frac{200}{3} g = 66\frac{2}{3} g. \end{aligned}$$

9. 一圓半徑爲 25 尺，圓心角所對弧長爲 $37\frac{1}{2}$ 尺，求這角的徑及這扇形所包的面積！

$$\text{【解】由 } C(1)^* \text{ 得： } x = \frac{37.5}{25} = 1.5 (\text{徑}).$$

$$\text{由 } C(2) \text{ 得： } A = \frac{1}{2} \times 25 \times 37.5 = 468.75 (\text{方尺}).$$

【答】

10. 一圓半徑爲 4 尺，這圓上圓心角爲 80° ，求所對弧的長！

$$\begin{aligned} \text{【解】由 } C(1) \text{ 得： } \frac{\pi}{180} \times 80 &= \frac{s}{4}. \quad \therefore s = \frac{\pi}{180} \times 80 \times 4 \\ &= 5.535 \text{ 尺.} \end{aligned} \quad \text{【答】}$$

〔註：即本章 $C(1)$ 的說明，以後仿此，在其他各章引用本章說明則加註章次，如：— $C(1)$.〕

11. 一長 9.6 尺的弧，所對圓心角為 1.2 徑，求這圓半徑的長！

【解】由 $C(1)$ 得： $1.2 = \frac{9.6}{r}$ ， $\therefore r = \frac{9.6}{1.2} = 8$ 尺。【答】

12. 一扇形地，弧長 24 尺，半徑長 15 尺，求圓心角及面積！

【解】由 $C(1)$ 得： $x = \frac{24}{15} = 1.6$ (徑) $= \frac{180^\circ}{\pi} \times 1.6$
 $= 91^\circ.673$.

由 $C(2)$ 得： $A = \frac{1}{2} \times 15 \times 24 = 180$ (方尺)

【答】

13. 一圓半徑為 10 尺，這圓的兩半徑截取 5π 尺的弧，求這兩半徑的夾角及扇形的面積！

【解】由 $C(1)$ 得： $x = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ (徑) $= 90^\circ$.

由 $C(2)$ 得： $A = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\pi = 25\pi$ (方尺)

【答】

14. 鐘上分針轉 $1\frac{2}{3}$ 徑的角，問共需時幾分？

【解】 $1\frac{2}{3}$ 徑 $= \frac{180^\circ}{\pi} \times 1\frac{2}{3} = 95^\circ.4928$ 。而每分鐘分針轉 $\frac{360^\circ}{60}$

$= 6^\circ$ ，則需 $1\frac{2}{3}$ 徑需時 $\frac{95^\circ.4928}{6^\circ} = 15.9154$ 分。【答】

15. 在 39 分 $22\frac{1}{2}$ 秒內，鐘表上時針轉若干徑？

【解】時針每小時轉 $\frac{\pi}{6}$ 徑，39 分 $22\frac{1}{2}$ 秒 $= 0.65625$ 時

則為： $\frac{\pi}{6} \times 0.65625 = 0.3433$ (徑)。【答】

二 銳角三角函數及應用

A. 三角函數的定義 設 $\angle DAE$ 爲銳角, BC 垂直於 AE , 成一直角三角形 ABC , 命 A, B, C 表各角, 而 $\angle C = 90^\circ$, a, b, c 表各角對邊的長度, 由幾何定理知 $\angle BAC$ 固定時則不論 B 點在 AD 上何地位, 各邊長

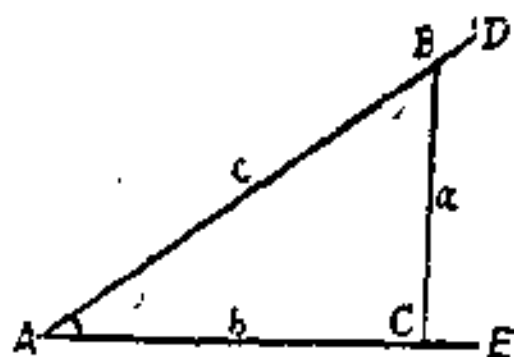


圖 1.

a, b, c 之比恆一定。(參照幾何習題詳解 p. 98 習題十一題 5) 即邊長之比隨 $\angle A$ 而變, 所以邊長之比爲 $\angle A$ 的函數, a, b, c 之比有六種, 即 $\angle A$ 有六個三角函數。名稱、符號和定義如下:

名 稱	符 號 及 定 義	名 稱	符 號 及 定 義
正 弦 sine	$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c}$	餘 切 cotangent	$\cot A = \frac{\text{底邊}}{\text{對邊}} = \frac{b}{a}$
餘 弦 cosine	$\cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c}$	正 割 secant	$\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}} = \frac{c}{b}$
正 切 tangent	$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{底邊}} = \frac{a}{b}$	餘 割 cosecant	$\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} = \frac{c}{a}$

(註: (1) $\tan$ 或作 tg , $\csc$ 或作 cosec , $\cot$ 或作 ctn .)

B. 函數間的基本關係。

(1) 倒數關係 由定義即知: $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}}$

$$= \frac{1}{\csc A}; \quad \text{同理: } \csc A = \frac{1}{\sin A}; \quad \cos A = \frac{1}{\sec A};$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}; \cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

(2) 餘角函數關係 由圖 1. 及定義知 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互為餘角, 而 $\sin B = \frac{b}{c}$; $\cos B = \frac{a}{c}$; $\tan B = \frac{b}{a}$; $\cot B = \frac{a}{b}$; $\sec B = \frac{c}{a}$; $\csc B = \frac{c}{b}$. 與 $\angle A$ 函數比較, 即知: $\sin A = \cos B$; $\cos A = \sin B$; $\tan A = \cot B$; $\cot A = \tan B$; $\sec A = \csc B$; $\csc A = \sec B$. 故稱餘弦、餘切、餘割為餘函數, 而得定理: 銳角任一函數等於餘角的餘函數。

習題二

1. 說明銳角三角函數的大小範圍及函數隨角變化增減的關係!

【解】(a) 範圍: 如圖 1, $\angle C = 90^\circ$, 則 c 不能小於 a 或 b , 故 $\sin A, \cos A$ 必小於 1, $\sec A, \csc A$ 必大於 1; 而 a 與 b 並無連帶關係, 故 $\cot A, \tan A$ 可有任何值。

(b) 增減: 如圖 1, 設 B 點固定, 即 c 長度固定。 $\angle A$ 增大則 a 增長, 而 b 減短; $\angle A$ 減小時則 a 減短 b 增長; 設 C 點固定, 即 b 長度固定, $\angle A$ 增大則 a 增長, 減小, 則 a 減短。故 $\angle A$ 增大時 $\sin A, \tan A, \sec A$ 隨之增大; 而 $\cos A, \cot A, \csc A$ 反隨之減小。

2. 已知直角三角形的二邊 $a=6, b=8$, 求 $\angle A$ 的各函數!

【解】由畢達哥拉氏定理得 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.

$$\text{則: } \sin A = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos A = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \tan A = \frac{b}{a} = \frac{4}{3};$$

故 $\angle A = 53.1^\circ$

$$\cot A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad \sec A = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}; \quad \csc A = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

3. 已知直角三角形的二邊 $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, 求 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的各函數。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2. \end{aligned}$$

$$\sin A = \cos B = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \cos A = \sin B = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2};$$

$$\tan A = \cot B = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \tan B = \frac{m^2 - n^2}{2mn};$$

$$\sec A = \csc B = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}; \quad \csc A = \sec B = \frac{m^2 + n^2}{2mn}.$$

4. 已知 $a = \sqrt{m^2 + n^2}$, $c = m + n$, 求 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的各函數！

$$\text{【解】 } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(m+n)^2 - (m^2 + n^2)} = \sqrt{2mn}.$$

$$\sin A = \cos B = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m + n}; \quad \cos A = \sin B = \frac{\sqrt{2mn}}{m + n};$$

$$\tan A = \cot B = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{\sqrt{2mn}}; \quad \cot A = \tan B = \sqrt{\frac{2mn}{m^2 + n^2}};$$

$$\sec A = \csc B = \frac{m + n}{\sqrt{2mn}}; \quad \csc A = \sec B = \frac{m + n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

5. 已知一直角三角形內, $\sin A = \frac{4}{5}$, $a = 72$, 求 c 。

$$\text{【解】 將 } \sin A = \frac{a}{c} \text{ 一式, 分別以已知數代入, 得 } \frac{4}{5} = \frac{72}{c},$$

$$\therefore c = 72 \times \frac{5}{4} = 90. \quad \text{【答】}$$

6. 已知 $\cos A = 0.44$, $c = 30.5$; 試求 b 。

$$\text{【解】 代入 } \cos A = \frac{b}{c}, \text{ 得 } 0.44 = \frac{b}{30.5},$$

$$\therefore b = 0.44 \times 30.5 = 13.42. \quad \text{【答】}$$

7. 已知 $\tan A = \frac{11}{3}$, $b = \frac{27}{11}$ 試求 c 。

【解】代入 $\tan A = \frac{a}{b}$, 得 $\frac{11}{3} = \frac{11a}{27}$, $\therefore a = \frac{11}{3} \times \frac{27}{11} = 9$ 。

$$\begin{aligned} \text{由 } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ 得 } c &= \sqrt{9^2 + \left(\frac{27}{11}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{729}{121}} \\ &= \sqrt{\frac{10530}{121}} = \frac{9}{11} \sqrt{130}. \quad \text{【答】} \end{aligned}$$

8. 試證: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ 。

【解】由定義 $\tan A = \frac{a}{b}$, $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, 得:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A, \quad \therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

9. 試證: $\tan A + \cot A = \sec A \cdot \csc A$ 。

【解】由定義得 $\tan A + \cot A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$;

$$\sec A \cdot \csc A = \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{ab};$$

由畢氏定理知 $a^2 + b^2 = c^2$,

$$\therefore \tan A + \cot A = \sec A \cdot \csc A.$$

10. 試證: $\sin A \csc A + \cos A \sec A + \tan A \cot A = 3$ 。

【解】由 B(1) 得: $\sin A \csc A + \cos A \sec A + \tan A \cot A$

$$= \sin A \cdot \frac{1}{\sin A} + \cos A \cdot \frac{1}{\cos A} + \tan A \cdot \frac{1}{\tan A}$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3.$$

C. 特別角的三角函數 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right)$

的各函數, 爲問題中常見的, 依據幾何學方法求得其