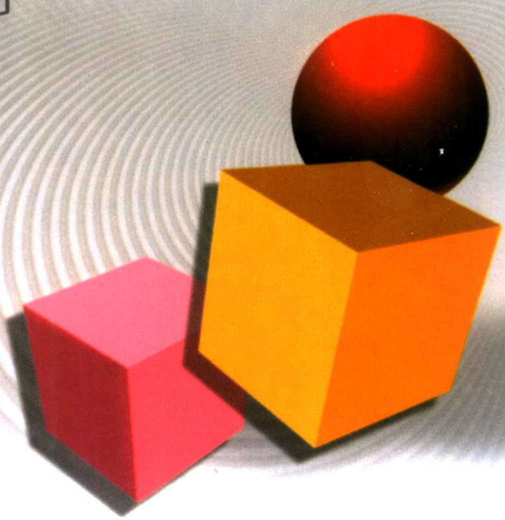
线性代数与空间解析几何

韩流冰 叶建军 何瑞文

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



SWJUP 西南交通大学出版社

线性代数与空间解析几何

韩流冰　　叶建军　　何瑞文

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 提 要

本书阐述了线性代数与空间解析几何的基本理论和方法，全书共分为 7 章。主要内容包括：三维空间中的向量、平面与直线，行列式，矩阵，向量组的线性相关性与 n 维向量空间，线性方程组，特征值与特征向量，二次型。为了加深学生理解所学知识，每节后都配有习题，并在书末给出了习题答案。

本书既可作为高等院校各专业学生学习线性代数课程之用，也可作为工程技术人员参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/韩流冰，叶建军，何瑞文.
—成都：西南交通大学出版社，2003.8
ISBN 7-81057-739-5

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①韩…②叶…③何…　Ⅲ. ①线性代数②空间几何：解析几何　Ⅳ. ①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 055771 号

线性代数与空间解析几何
韩流冰　叶建军　何瑞文
*
责任编辑　刘婷婷
封面设计　何东琳设计工作室
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行部电话：87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷
*
开本：787mm × 960mm　1/16　印张：12.125
字数：279 千字　印数：1—5500 册
2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-81057-739-5/O・049
定价：15.50 元

前　言

本书是根据近几年本科数学教学改革实践中积累的经验和体会编写而成的。书中系统地阐述了线性代数与空间解析几何的基本概念、基本理论和基本方法。对照传统的线性代数教材，本书具有如下特点：

1. 将三维空间中的向量及其运算、直线与平面等内容提前为第一章，为学习线性代数提供良好的空间几何背景。

2. 围绕矩阵的初等变换方法在线性代数中的作用，在对行列式、矩阵、向量组的讨论中，强调在初等变换下诸多性质的不变性。

3. 在向量组的讨论中，强调向量组自身的性质、结构，把矩阵和初等变换作为讨论向量组的工具和方法。

4. 在线性方程组的讨论中，强调求解齐次线性方程组与非齐次线性方程组的异同。

在本书正式出版前，以《线性代数讲义》形式在本科教学中试用了两学期，反映良好。

本书内容经作者讨论决定后，由韩流冰、叶建军执笔完成。涂汉生教授、黄盛清教授认真阅读了书稿，并提出了许多修改意见，卿铭、秦应兵、蒲伟、徐跃良、任朝元、杨宁等数学系教师也提出了不少宝贵的建议，作者循此对书稿作了适当的修改和调整。在此，谨向他们致以诚挚的感谢。

限于编者的水平，书中会存在错误和疏漏，敬请读者批评指正。

作　者

2003.5

目　录

第一章　三维空间中的向量　平面与直线

在日常生活和科学技术中，大量的问题都和三维向量有关，本章首先建立空间直角坐标系，强调三维向量的几何直观，然后介绍三维向量的一些运算，最后以向量为工具来讨论三维空间的平面和直线.

第一节　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们曾经通过坐标法把平面上的点与一对有序数组对应起来，把平面上的曲线和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 把这种思路推广到三维空间，就很自然地引出空间直角坐标系的概念.

过空间一个定点 O，作三条相互垂直的数轴，它们都以 O 为坐标原点，依次称为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，z 轴则是铅垂线. 而它们的正方向应符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\pi/2$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点.

设 M 为空间一定点，我们过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，把它们与三个坐标轴的交点坐标依次记为 x_0、y_0、z_0，于是空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 (x_0, y_0, z_0)；反之，若给定一有序数组 (x_0, y_0, z_0)，把上面过程倒过来就可知，有序数组 (x_0, y_0, z_0) 惟一地确定空间一点 M. 这样就建立了空间的点 M 和三元有序数组 (x_0, y_0, z_0) 之间的一一对应关系，如图 1.1 所示.

在空间直角坐标系中，三元有序数组 (x_0, y_0, z_0) 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x_0、y_0、z_0 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记 M 为 $M(x_0, y_0, z_0)$.

每两个坐标轴所确定的平面叫做坐标面，分别叫做 xy 平面、yz 平面和 zx 平面. 立体空间被三个坐标面分为八个部分，xy 平面四个象限的上方部分（沿逆时针方向）依次被称为一、二、三、四卦限，而四个象限的下方部分依次被称为五、六、七、八卦限.

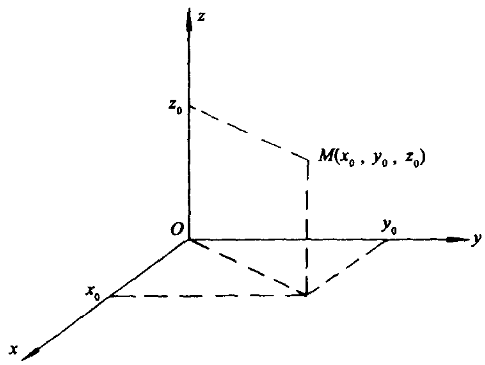


图　1.1

2. 空间两点的距离公式

利用空间点的坐标，我们可以给出空间两点的距离公式. 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间任意两点，过点 M_1、M_2 分别作 xy 坐标面的垂线 M_1P_1 和 M_2P_2，分别与 xy 坐标面交于 P_1 和 P_2，再过点 M_1 作与 xy 坐标面平行的平面，此平面与直线 M_2P_2 相交于点 M_3，如图 1.2 所示.

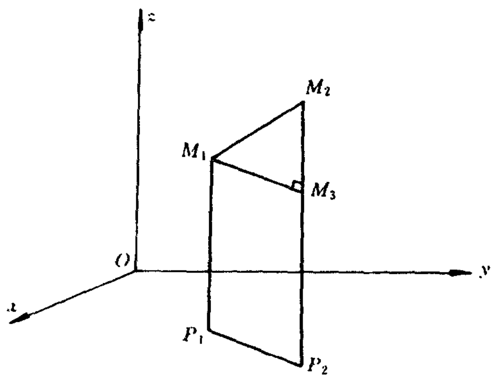


图　1.2

显然，P_1 坐标为 $(x_1, y_1, 0)$，P_2 坐标为 $(x_2, y_2, 0)$，M_3 坐标为 (x_2, y_2, z_1). 由于 $\triangle M_1M_2M_3$ 是直角三角形，且

$$|M_1M_3|^2 = |P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$|M_2M_3|^2 = (z_2 - z_1)^2.$$

由勾股定理知 M_1、M_2 两点的距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. 曲面与方程

在三维空间中，我们通常把满足给定关系式

$$F(x,y,z) = 0$$

的点的全体称为曲面，而把 $F(x,y,z) = 0$ 称为该曲面的方程. 用集合符号，曲面可表示为

$$\{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}.$$

一般情况下，我们把曲面与它的方程等同看待.

例 1 设曲面 S 上的点到定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离恒等于 R，求该曲面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任意一点. 由题意及空间两点距离公式知

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

两边平方，得曲面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

也可写成

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

我们称该曲面为球面.

例 2 下列方程在三维空间中表示什么曲面.

(1) $x^2 + y^2 = 1$； (2) $z = 1$.

解

(1) $x^2 + y^2 = 1$ 表示的是一个柱面.

(2) $z = 1$ 表示的是一个平行于 xy 坐标面的平面，它在 z 轴上的截距为 1.

习 题 1.1

1. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列点的位置：

$A(1,3,0)$； $B(0,2,3)$； $C(4,0,0)$； $D(0,1,0)$.

2. 指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-1,-1)$； $B(-2,1,1)$； $C(-3,-4,1)$.

3. 求点 $P(x,y,z)$ 关于(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

4. 求点 $P(1,2,2)$ 与坐标原点及各坐标轴间的距离.

5. 在 yz 平面上，求与三个点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 及 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

6. 在 y 轴上求与点 $A(4,2,-1)$ 和点 $B(3,-5,1)$ 等距离的点.

第二节　三维空间中的向量

1. 三维向量的几何定义及坐标表示

在三维空间中，我们把既有大小，又有方向的量称为向量，又称为几何向量. 从几何直观上看，三维向量可以形象地表示为有向线段，有向线段的方向就是向量的方向，而有向线段的长度就表示向量的大小，我们把向量的大小称为向量的模. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$，有时也用一个字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示向量.

观察图 1.3 中的两个向量.

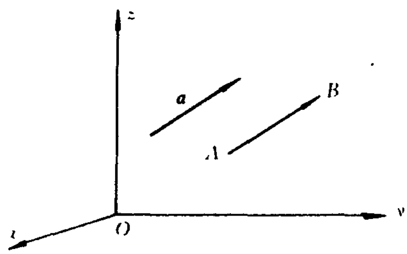


图 1.3

在图 1.3 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相同，大小也相等，所以它们表示的是同一个向量. 从这一点讲，三维向量是自由向量，它只依赖于向量的大小和方向，而与向量的起点在什么位置无关. 也就是说，三维向量可以自由平行移动而保持向量不变. 一般来讲，对任意的两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 所决定的向量 $\overrightarrow{AB}$，均有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$，其中 O 为坐标原点，M 点坐标为 $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 实际上，平行移动向量 $\overrightarrow{AB}$，并把 A 点移到 O 点的坐标变换可表示为

$$\begin{cases} x'=x-x_1, \\ y'=y-y_1, \\ z'=z-z_1. \end{cases}$$

显然该变换把 B 点变为 $M(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 另一方面，由于任意的三维向量 $\overrightarrow{AB}$ 均可表示为由坐标原点 O 指向空间某点 M 的向量，而向量 $\overrightarrow{OM}$ 由点 M 惟一确定，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 与点 M 一一对应，注意到空间点 M 的坐标表示 $M(x,y,z)$，故可以用 M 点的坐标 (x,y,z) 来表示向量 $\overrightarrow{AB}$，即

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z).$$

我们称此表达式为三维向量的坐标表示. 向量的几何定义和向量的坐标表示是相互等价的,一般来说,向量的几何表示具有几何直观的长处,而向量的坐标表示占有代数方法的优势,两者相得益彰.

另外,为了区别三维点和三维向量,我们通常用 $M(x,y,z)$ 来表示以 (x,y,z) 为坐标的点 M,而用 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 来表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

2. 三维向量的代数运算

定义 1　设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 是两个三维向量,λ 为任意实数. 我们规定向量的代数运算如下:

(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是一个三维向量,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,定义为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2);$$

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差是一个三维向量,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,定义为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2);$$

(3) 任意实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个三维向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,定义为

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).$$

根据上述定义,容易验证,对任意的三维向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及任意实数 λ,μ,向量的代数运算满足下列 8 条性质:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

借助于向量的几何表示,其代数运算也可表示如下.

图 1.4 表明,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 总在一条直线上,当 $\lambda>0$ 时,它们指向相同;当 $\lambda<0$ 时,它们指向相反.

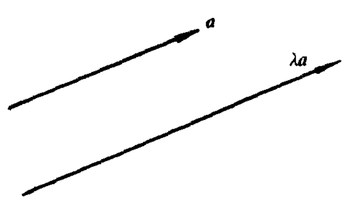


图　1.4

图 1.5 表示了两个向量相加减的结果,其左边图形所示被称为"平行四边形法则",所作平行四边形的两个对角线所表示的向量就分别是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,而

右边图形所示被称为“三角形法则”，它表明把 $\boldsymbol{b}$ 的起点平行移动到 $\boldsymbol{a}$ 的终点，那么由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的有向线段就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

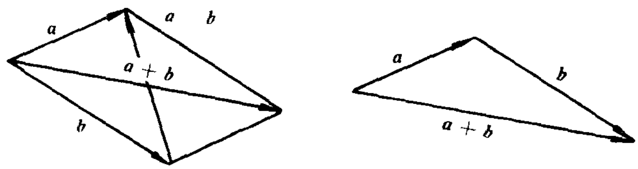


图　1.5

一般 n 个三维向量的和 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 可用如下的“多边形法则”来表示，它是依次运用“三角形法则”的结果. 即作 $\overrightarrow{OA_1}=\alpha_1$，再由 A_1 点作向量 $\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha_2$，最后从 α_{n-1} 的终点 A_{n-1} 作向量 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\alpha_n$，那么 $\overrightarrow{OA_n}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

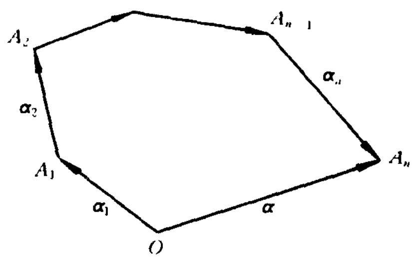


图　1.6

运用向量及其代数运算，可以表示和证明平面几何中的命题，下面通过例子说明它们是如何相互转化的.

例 3　$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边中点(图 1.7)，证明：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证　由三角形法则知

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD},$$

又因 D 是 BC 中点，故 $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CD}$，两式相加，得

$$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

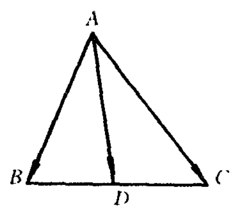


图　1.7

例 4　用向量证明：如点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，AD 是 BC 边上中线(图 1.8)，则 $AM=\frac{2}{3}AD$.

证　由于 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{AD}$ 在一条直线上，故可设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$，又因 D 是 BC 边中点，所以有

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

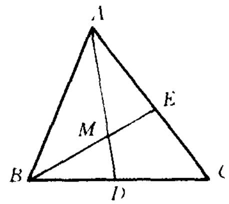


图 1.8

因此
$$\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

又由于 BE 是 AC 边上中线，设 $\overrightarrow{ME} = \mu\overrightarrow{BE}$，则有

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

所以
$$\overrightarrow{ME} = \mu\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

在 $\triangle AME$ 中，

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} = 0,$$

即
$$\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \mu\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = 0,$$

也即
$$\left(\frac{\lambda}{2} - \mu\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} = 0.$$

由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不在一条直线上，所以不存在实数 s,t，使

$$\overrightarrow{AB} = s\overrightarrow{AC} \quad 或 \quad \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB},$$

故
$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} - \mu = 0, \\ \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $\lambda = \frac{2}{3}$，即 $AM = \frac{2}{3}AD$.

3. 向量的模与方向余弦

在三维空间中，一个向量既可以由坐标来表示，也可以由模（大小）和方向来确定，所以我们有必要弄清楚向量的模和方向与向量坐标之间的关系.

我们把向量的大小，也就是向量的长度称为向量的模，并记向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模为 $|\overrightarrow{AB}|$. 若有两点 $A(a_1,a_2,a_3)$ 和 $B(b_1,b_2,b_3)$，由两点距离公式知

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}.$$

若向量 $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$，由于 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$，其中 M 点坐标为 (x,y,z)，所以

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

特别当 $|\boldsymbol{a}| = 1$ 时，称 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量. 当 $|\boldsymbol{a}| = 0$ 时，称 $\boldsymbol{a}$ 为零向量，零向量记为 $\mathbf{0}$.

考虑向量的方向，设非零向量 $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴正向的夹角分别为 α,β,γ（图 1.9），则显然有

$$x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

所以

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

且 $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

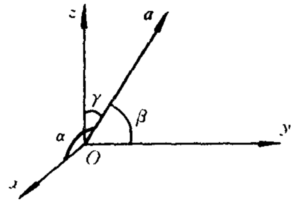


图 1.9

习惯上，把 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，通常用向量的方向余弦来表示向量的方向.

设 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0$，则

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

也就是说，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 的坐标就是 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

向量的方向余弦的坐标表达式给出了向量的方向与向量的坐标之间的关系.

我们把方向相同或相反的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 称为共线向量或平行向量，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.

不妨设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},\quad \boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b},$$

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = -\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},\quad \boldsymbol{a} = -\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b},$$

从而证明了如下定理.

定理 1　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两非零向量，则 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在数 λ，使 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$.

例 5　设 $\boldsymbol{a} = (1,2,2)$，计算 $\boldsymbol{a}$ 的模、$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦及单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，并给出与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，长度为 5 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\quad \cos\beta = \frac{2}{3},\quad \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

$$\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

$$\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{a}^0 = \left(-\frac{5}{3},-\frac{10}{3},-\frac{10}{3}\right).$$

例 6(定比分点公式)　设有两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,求点 $C(x,y,z)$ 内分线段 AB 为定比 λ。

解　C 点内分线段 AB 为定比 λ 是指 C 在线段 AB 上,且 $|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{CB}|$,所以,$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{CB}$ 且 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$,即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

比较其坐标得

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

所以

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别地,$\lambda=1$ 时,即得 AB 的中点坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

习　题　1.2

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\beta}$,求 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$.
2. 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$ 和 $B(3,0,2)$,求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标、模及方向余弦.
3. 向量 $\boldsymbol{a}$ 有什么几何特征?

   (1) $\cos\alpha=0$;　(2) $\cos\beta=0$;　(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$.
4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$,$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$,求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.
5. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(3,5,-1)$,$\boldsymbol{\beta}=(2,6,4)$,$\boldsymbol{\gamma}=(4,-3,2)$,求 $2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{\gamma}$.
6. 求平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-2,3,2)$ 的单位向量.
7. 求 λ,μ 使 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\lambda,3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(\mu,-6,2)$ 平行.
8. 设两点 $A(2,-3,0)$,$B(2,5,-7)$,求内分线段 AB 为 $4:5$ 的点 C 的坐标.

第三节　数量积　向量积　混合积

1. 向量的数量积

设一质点在常力 F 作用下沿直线运动,其位移向量为 S,由物理学知道力 F 所做的功为

$$W=|F||S|\cos\theta,$$

其中 θ 为 F 与 S 的夹角. 由于该表达式具有广泛的应用,有关向量的许多计算问

题都要用到它,所以给出如下定义:

定义 2　设两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦为 $\cos\theta$,称

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积. 有时也用 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 表示数量积,并称为内积.

根据这个定义,功的计算表示为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}.$$

非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 θ 常记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,称 $|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,记作 $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}$. 由几何直观(图 1.10),关于投影有下列性质:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c=(\boldsymbol{a})_c+(\boldsymbol{b})_c.$$

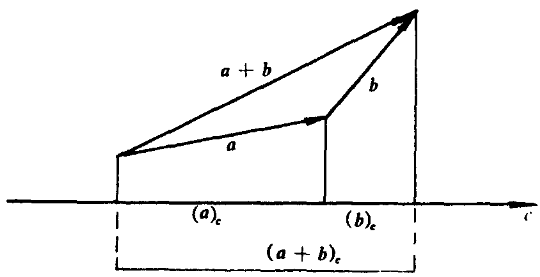


图　1.10

于是由数量积定义便有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}},$$

且当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

容易验证向量的数量积满足如下规律:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　(交换律);

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　(分配律);

(3) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\quad k\in\mathbf{R}$;

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\geqslant 0$,等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由规律(4)知道,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模也可表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}},$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时,由数量积定义知

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$