新课标

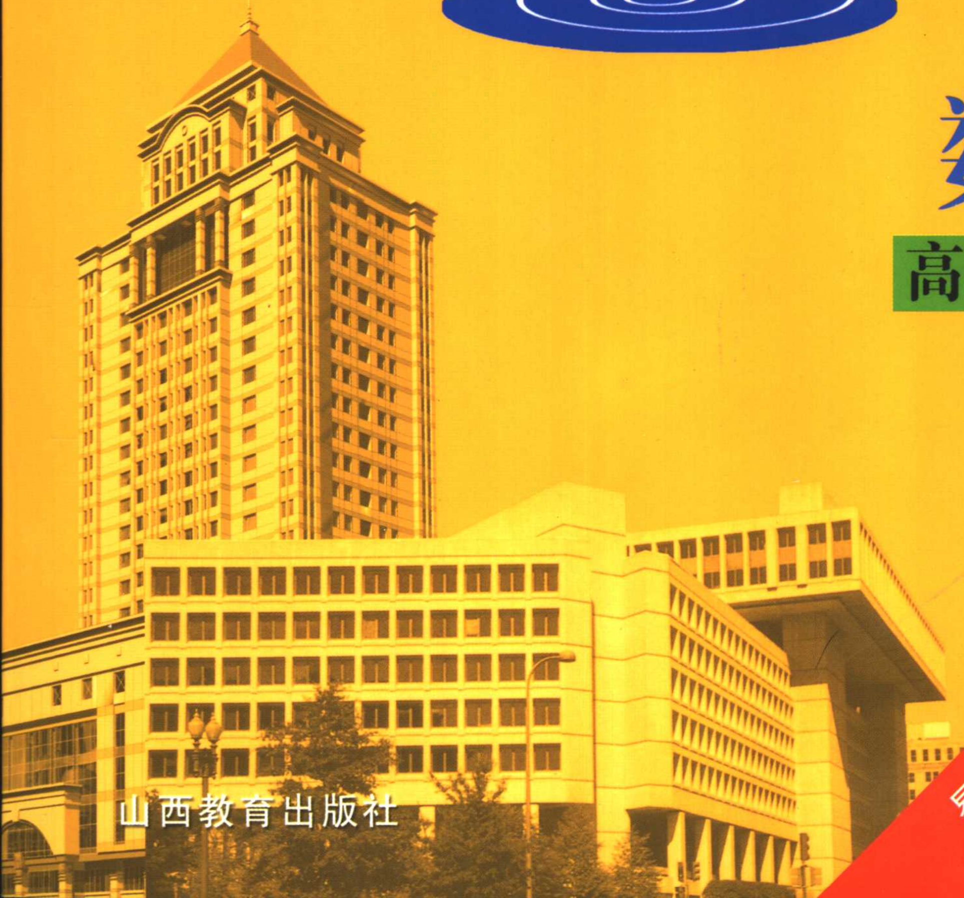
易错难解题全解

李萌 主编

数学

高中二年级

（人教版）



易错题——发现认知误区
难解题——开拓解题思路

山西教育出版社

新课标

易错难解题全解

数学

高中二年级

（人教版）

李萌 主编

山西教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

新课标易错难解题全解．数学．高中二年级/李萌主编．一太原：山西教育出版社，2004．7

ISBN 7-5440-2727-9

Ⅰ．新… Ⅱ．李… Ⅲ．数学课-高中-解题 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 027729 号

山西教育出版社出版发行
（太原市迎泽园小区 2 号楼）
山西新华印业有限公司新华印刷分公司印刷
新华书店经销
2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月山西第 1 次印刷
开本：787×960 毫米　1/16　印张：12
字数：362 千字　印数：1—10000 册
定价：14.00 元

写给读者的话

为适应新课程标准的教学理念:注重学习过程,强调知识的实际应用;给广大中学师生提供一套与之配套的测试题,我们编辑出版了这套《新课标易错难解题全解》。这套丛书从近10年各类中、高考试题、竞赛试题精选出易错、难解之题,包括大量开放性、综合性、联系实际的探究性试题,按教材篇章顺序编辑而成。概论部分根据新课程的教学理念,详细分析了解难题的各个环节,给出了解难题的目的及注意事项。每章前都有本章知识在新课标知识体系中的定位,图表形式,一目了然;学习目标与学习过程分别给出了教学大纲与新课标对本章教学内容的具体要求,书后附有答案与详细解答,便于读者自学。

本书是教材习题的补充与提高,是学完每章知识后的综合测试,也是目前我们所能见到的顶级易错、难解之题。别指望解出本书中的每一道题,否则这本书不适合你。如果书中的易错题使你找出了自己的认知误区,难解题使你开阔了眼界,同时增强了你的探究能力,我们将倍感欣慰。

欢迎加入,对书中的缺点与错误还望不吝赐教。

新课标 易错难解题全解

目 录

探究解难题

新课标（普通高中数学课程标准）明确提出高中数学课程的总目标是：使学生在九年义务教育数学课程的基础上，进一步提高作为未来公民所必要的数学素养，以满足个人发展与社会进步的需要．具体目标如下：

1．获得必要的数学基础知识和基本技能，理解基本的数学概念、数学结论的本质，了解概念、结论等产生的背景、应用，体会其中所蕴涵的数学思想和方法，以及它们在后续学习中的作用．通过不同形式的自主学习、探究活动，体验数学发现和创造的历程．

2．提高空间想像、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力．

3．提高数学地提出、分析和解决问题（包括简单的实际问题）的能力，数学表达和交流能力，发展独立获取数学知识的能力．

4．发展数学应用意识和创新意识，力求对现实世界中蕴涵的一些数学模式进行思考和作出判断．

5．提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度．

6．具有一定的数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的思维习惯，崇尚数学的理性精神，体会数学的美学意义，从而进一步树立辩证唯物主义和历史唯物主义世界观．

为达到上述教学目标，解难题是非常重要的一环，因为解难题的过程既是考查知识与技能的过程，也是体验过程选择方法的过程，同时也是培养情感态度与价值观的过程．不能想像这一环的缺失能达到上述教学目标．

1．难题的定义　所谓难题这里指的是不容易解答的习题．当然这里的“不容易解答”因人而异，所谓会者不难，难者不会．对学习者来说总是在会——不会——会的循环过程中不断进步的．

2．难题的分类　定义中的“不容易解答”有两层含意：一是容易解错，看似容易其实不容易；二是无从下手，不知所云．针对这两层意思，我们将难题分为两类：易错题和难解题．

3．解难题的心态与结果　解难题时一般有三种心态：焦躁的、紧张的、愉悦的，这三种心态因人因时间、地点的不同而不同，并在一定的条件下可相互转化，同时也会带来三种截然不同的效果，（见下表）

	焦躁	紧张	愉悦
原因	被迫	功利	兴趣
态度	不负责任	有限责任	无限责任
思维	被动	主动	灵活
效果	差	较好	最好

读者要尽可能地激发出自己的求知欲望，以探究、鉴赏的心态解难题，使自己心情愉悦.

4. 解难题的程序　a阅读理解题面信息（已知条件、隐含条件、求的是什么）. b翻译成专业语言（数学语言、物理语言、化学语言，注意文本语言与专业语言的对应性，防止信息的失真、衰减与误读）. c贯通思路，确定路径（通过分类、类比、分析、预见等思维活动，判断题面属于哪些知识范畴，和解过的哪些题相像，有什么不同，解题关键是什么，从已知到所求或从所求到已知或从所求已知到某一共同点贯通思路，选择确定最佳解题路径）若不通则返回a或b. d书面表达（简明规范）e检验核对答案，答案若不合题意，则返回a或b或c或d；f把握该难题的本质，总结得失.

5. 解难题与沟通　解难题的过程其实也是沟通的过程. 首先是与题面或出题人沟通，理解题面所显示的信息：包括求什么，给出了什么条件，隐含着什么潜条件，直觉到出题人的出题意图，即这里出题人要考查什么. 其次要和自己沟通，和自己的解题经验沟通，是否解过类似的题，和解过的哪些题相像，有什么不同；和自己学过的知识相沟通，需要哪些概念、定理、定律、公式，是否符合这些概念、定理、定律、公式的使用条件；判断该题是否可解，有几种解法，是否有简便方法，若不能解，是题出错了，还是自己的原因，是自己哪方面的原因，如何避免再犯；第三是和判题的人沟通，思路清楚后，要用专用术语书写清楚，日常用语容易产生歧义，判题的人不易理解.

6. 解难题的效率　解难题需要思考，需要时间，用很长的时间解一道难题是否合适，能否提高解难题的效率，这对现代中学生来说是个很实际的问题. 我们从两个方面来阐述这个问题：第一个方面是关于难题的选择，即所解的难题是否值得去解，是否值得花费很长的时间，这一点我们将在8中探讨. 现在我们从第二个方面谈一谈我们如何做就可以提高解难题的效率. a解难题前的准备，针对所解难题，主观上要有必要的知识准备，要有良好的心态（见3），客观上对难题的选择要恰当要合适，最好有老师的指导，根据自己的具体情况由易到难. b解难题的过程中，要有正确的解题程序（见4），保持主动、活跃的思路，不停地追问自己，无法进行下去时，可换一题继续，也可适当借助外力，或看看书后的提示，或问别人，但要注意节制，不能养成遇见难题就问别人的习惯，这对培养自己分析问题解决问题的能力毫无好处. c解难题后的总结，解完每道难题都要总结一下，这道题的意图是什么，难在什么地方，自己的收获是什么，看似浪费了一些时间，实则为解后面的难题储备经验.

7. 解难题的目的　解难题是达到教学目标的手段，读者可根据自己的实际情况，解一定量的难题，但并非多多益善，要把握度，若为了解难题而解难题，就会本末倒置，失去学习的目标.

8. 难题的选择　难题有很多，选择的难题是否正确合适，对读者来说非常重要：太简单的题效率低下，太难的题容易挫伤解题的积极性，错题、出题意图不明确的题更是费时费力，达不到解题的目的. 确定一道难题、一本难题集是否适合自己要看它是否符合解难题的目的.

第六章 不 等 式

本 章 知 识 定 位

选修 4－8
- 开关电路与布尔代数

选修 4－7
- 统筹法与图论初步

选修 4－6
- 优选法与试验设计初步

选修 4－5
- 初等数论初步

选修 4－4
- 不等式选讲

选修 4－3
- 数列与差分

选修 4－2
- 矩阵与变换

选修 4－1
- 几何证明选讲

选修 3－6
- 三等分角与数域的扩充

选修 3－5
- 欧拉公式与闭曲面分类

选修 3－4
- 对称与群

选修 3－3
- 球面上的几何

选修 3－2
- 信息安全与密码

选修 3－1
- 数学史选讲

选修 2－3
- 计数原理
- 统计案例
- 概率

选修 2－2
- 导数及其应用
- 推理与证明
- 数学的扩充与复数的引入

选修 2－1
- 常用逻辑用语
- 圆锥曲线与方程
- 空间中的向量与立体几何

选修 1－2
- 统计案例
- 推理与证明
- 数字的扩充与复数的引入
- 框图

选修 1－1
- 常用逻辑用语
- 圆锥曲线与方程
- 导数及其运用

必修

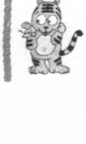
数学 1
- 集合
- 函数概念与其基本初等函数Ⅰ(指数函数、对数函数、幂函数)

数学 2
- 立体几何初步
- 平面解析几何初步

数学 3
- 算法初步
- 统计、概率

数学 4
- 基本初等函数Ⅱ(三角函数)
- 平面向量
- 三角恒等变换

数学 5
- 解三角形
- 数列
- 不等式



学习目标

1. 理解不等式的性质及其证明.

2. 掌握两个正数的算数平均数不小于它们的几何平均数的定理,并会简单的应用.

3. 掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式.

4. 掌握二次不等式、简单的绝对值不等式和简单的分式不等式的解法.

5. 理解不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

学习过程

1. 通过具体情境,感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系,了解不等式(组)的实际背景.

2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程.

3. 通过函数图像了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

4. 会解一元二次不等式,对给定的一元二次不等式,尝试设计求解的程序框图.

5. 从实际情境中抽象出二元一次不等式组.

6. 了解二元一次不等式组的几何意义,能用平面区域表示二元一次不等式组.

7. 从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题,并能加以解决.

8. 探索并了解基本不等式的证明过程.

9. 会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

难题探究

易错题

1.若 $a<b<0$,则下列结论中正确的是 (　　)

A.不等式$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不成立

B.不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

C.不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立

D.不等式$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立

2.设 $a\neq b$,解关于 x 的不等式
$a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2$.

3.用一块钢锭浇铸一个厚度均匀,且全面积为2平方米的正四棱锥形有盖容器如图6-1,设容器的高为 h 米,盖子边长为 a 米.

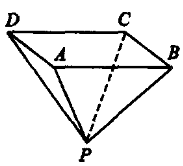


图 6-1

(1)求 a 关于 h 的函数解析式;

(2)设容器的容积为 V 立方米,则当 h 为何值时,V 最大?求出 V 的最大值.(求解本题时,不计容器的厚度)

4.已知 i、m、n 是正整数,且 $1<i\leqslant m<n$.

(1)证明 $n^i\mathrm{A}_m^i<m^i\mathrm{A}_n^i$;

(2)证明$(1+m)^n>(1+n)^m$.

5.假设A型进口汽车关税税率在2001年是100%,在2006年是25%,2001年A型进口车每辆价格为64万元(其中含32万元关税税款).

(1)已知与A型车性能相近的B型国产车,2001年每辆价格为46万元,若A型车的价格只受关税降低的影响,为了保证2006年B型车的价格不高于A型车价格的90%,B型车价格要逐年降低,问平均每年至少下降多少万元?

(2)某人在2001年将33万元存入银行,假设银行扣利息税后的年利率为1.8%(五年内不变),且每年按复利计算(例如,第一年的利息计入第二年的本金),那么五年到期时,这笔钱连本带息是否一定能够买一辆按(1)中所述降价后的B型车.

6.解不等式$|\sqrt{2x-1}-x|<2$.

7.如图6-2,在多面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,上、下底面平行且均为矩形,相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等,侧棱延长后相交于 E、F 两点,上、下底面矩形的长、宽分别为 c、d 与 a、b,且 $a>c$,$b>d$,两底

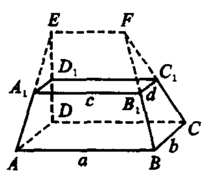


图 6-2

面间的距离为 h.

(1)求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;

(2)证明:$EF//$面 $ABCD$;

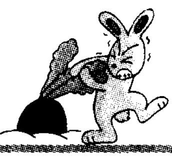
(3)在估测该多面体的体积时,经常运用近似公式 $V_{估}=S_{中截面}\cdot h$ 来计算.

已知它的体积公式是 $V=\frac{h}{6}(S_{上底面}+4S_{中截面}+S_{下底面})$.

试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系,并加以证明.(注:与两个底面平行,且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面)

8.解关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-a^2}<0(a\in\mathbf{R})$.

9.解不等式 $2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_2\frac{1}{x}>0$.



难解题

10.设 n 为大于 1 的整数,全部正因数为 $d_1,d_2,\cdots,d_k$,其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$,记 $D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k$.

(1)求证:$D<n^2$;

(2)确定所有的 n,使得 D 能整除 n^2.

11.设 a,b,c 是正实数,且满足 $abc=1$,求证:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1.$$

12.设 $x_i>0,1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 2,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=S$.求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{S-x_i}}\geqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}S$.

13.给定 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,求最小常数 M,使对任意整数 $n\geqslant 2$ 及实数 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,只要满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k, \qquad ①$$

总有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant M\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$,其中 $m=[cn]$表示不超过 cn 的最大整数.

14.求证:$16<\sum\limits_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

15.求证:在任意四个正数中,一定存在两个数 x,y,使不等式

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}\text{恒成立}.$$

16.设 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbf{R}(n\geqslant 2)$,使得 $0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\leqslant n$.求证:存在整数 $k_1,\cdots,k_n$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0$ 且对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,都有 $1-n\leqslant c_i+nk_i\leqslant n$.

17.对所有正实数 a,b,c,求证:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

18.设 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n(n\geqslant 3)$满足条件:

(1)$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$;

(2)$0<a_1=a_2,a_i+a_{i+1}=a_{i+2}(i=1,2,\cdots,n-2)$;

(3)$0<b_1\leqslant b_2,b_i+b_{i+1}\leqslant b_{i-2}(i=1,2,\cdots,n-2)$.

求证:$a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$.

19.设 a,b 为正数,求证:

$$\sqrt{a}+1>\sqrt{b} \qquad ①$$

成立的充要条件是对任意的 $x>1$,有

$ax+\dfrac{x}{x-1}>b.$　②

20. 设 a, b, c 均为正实数, 求证: $\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\leqslant\dfrac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

21. 设 a,b,c 为正实数且满足 $abc=1$. 试证: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

22. 设 a,b,c,d 是 4 个非负实数且 $a+b+c+d=1$. 求证:

$$abc+bcd+cda+dab\leqslant\frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

23. 给定平面上 $n(n\geqslant2)$ 个相异的点. 证明其中距离为 1 的点对不超过 $\dfrac{1}{4}n+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot n^{\frac{2}{3}}$.

24. 设 a,b,c 是正实数, 并满足 $abc=1$. 求证: $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}+\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}+\leqslant1$, 并指明等号在什么条件下成立.

25. 给定 $k\in\mathbf{N}_+$ 及实数 $a>0$, 在下列条件下, $k_1+k_2+\cdots+k_r=k$, $k_i\in\mathbf{N}_+$, $1\leqslant r\leqslant k$. 求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.

26. (1) 求证: $3-\dfrac{2}{(n-1)!}<\dfrac{2}{2!}+\dfrac{7}{3!}+\cdots+\dfrac{n^2-2}{n!}<3$.

(2) 求自然数 a,b,c, 使得对任意 $n\in\mathbf{N}_+$, $n>2$, 有 $b-\dfrac{c}{(n-2)!}<\dfrac{2^3-a}{2!}+\dfrac{3^3-a}{3!}+\cdots+\dfrac{n^3-a}{n!}<3$.

27. 设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$, 且 $a+b+c+d+e=1$. 求证: $ad+dc+cb+be+ea\leqslant\dfrac{1}{5}$.

28. 设 n 是正整数, 且 $n\geqslant3$. 又设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数, 其中 $2\leqslant a_i\leqslant3$, $i=1,2,\cdots,n$. 若取 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 求证: $\dfrac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\dfrac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\dfrac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\leqslant2S-2n$.

29. n 为一正整数, 试确定有多少个实数 x, 满足 $1\leqslant x<n$ 和 $x^3-[x^3]=(x-[x])^3$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

30. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为大于或等于 1 的实数. 求证:

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

31. 设 a,b,c 为三角形的三边长, $n\in\mathbf{N}_+$, $n\geqslant2$. 求证:

$$\frac{\sqrt[n]{a^2+b^2}+\sqrt[n]{b^2+c^2}+\sqrt[n]{c^2+a^2}}{\sqrt[n]{(a+b+c)^2}}<\frac{2+\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{4}}.$$

32. 设 x,y,z 是正实数, 且 $xyz=1$. 求证:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

33. 设 $n\in\mathbf{N}_+$, $x_0=0$, $x_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$. 求证:

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

34. 在某项竞赛中, 共有 a 个参赛选手与 b 个裁判, 其中 $b\geqslant3$ 且为奇数. 每个裁判对每个选手的评分只有"通过"或"不及格"两个等级. 设 k 是满足以下条件的整数: 任何两个裁判至多可对 k 个选手有完全相同的评分. 证明: $\dfrac{k}{a}\geqslant\dfrac{b-1}{2b}$.

35. 设 $0\leqslant x_i\leqslant1$, $i=1,2,\cdots,n$, $n\geqslant2$. 求证: 存在 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 使得

$$x_i(1-x_{i+1})\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

36.设△ ABC 三边长分别为 a,b,c,各边上中线长分别为 m_a,m_b,m_c.求证:

$$(a^t m_a+b^t m_b+c^t m_c)^2\geqslant\frac{1}{12}(a+b+c)^3(a^{2t-1}+b^{2t-1}+c^{2t-1})(t\in\mathbf{R}).$$

37.已知△ ABC 的三边长分别为 a,b,c,$2\leqslant n\in\mathbf{N}_+$).求证:$\frac{n\sqrt{c^n+a^n}}{a+b+c}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$.

38.设 n 是一个固定的整数,$n\geqslant2$.

(1)确定最小常数 c,使得不等式 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant c(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i)^4$ 对所有的非负实数 $x_1,\cdots,x_n\geqslant0$ 都成立;

(2)对于这个常数 c,确定等号成立的充要条件.

39.对于给定的大于 1 的正整数 n,是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$,同时满足以下两个条件:

(1)$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$;

(2)$n-1>\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}>n-1-\frac{1}{1998}$.

请说明理由.

40.设 a,b,c,d 都是正实数,求证:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}.$$

41.记 $a=2001$.设 A 是适合下列条件的正整数对 (m,n) 所组成的集合:

(1)$m<2a$;

(2)$2n\mid2am-m^2+n^2$;

(3)$n^2-m^2+2mn\leqslant2a(n-m)$.

令 $f=\frac{2am-m^2-mn}{n}$,求 $\min\limits_{(m,n)\in A}f$ 和 $\max\limits_{(m,n)\in A}f$.

42.n 是给定的正整数,$n\geqslant2$,若 a,b,c,d 是正整数,且满足 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 及 $a+c\leqslant n$.试求 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值.

43.设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数,且不全为零.

(1)求证:方程 $x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$ 恰有一个正实根;

(2)令 $A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$,$B=\sum\limits_{j=1}^{n}ja_j$,并设 R 是上述方程的正实根.求证:$A^A\leqslant R^B$.

44.设 $\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant1$,$a_1\geqslant0$,$0\leqslant b_1\leqslant p$,$i=1,2,\cdots,n$,$n\geqslant2$.如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1$,求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}a_j\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$.

45.设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数,且满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$.求证:

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}}.$$

46.若 $a,b,c\geqslant0$ 且 $a+b+c=1$,$\lambda\geqslant0$,求证:$2\sqrt[3]{\lambda}+\sqrt[3]{\lambda+1}\leqslant\sqrt[3]{a+\lambda}+\sqrt[3]{b+\lambda}+\sqrt[3]{c+\lambda}\leqslant\sqrt[3]{27\lambda+9}$.其中前者等号当且仅当 a,b,c 中一个取 1,另两个都取零时成立;后者等号当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时成立.

47.证明不等式 $[\sqrt{\alpha}]+[\sqrt{\alpha+\beta}]+[\sqrt{\beta}]\geqslant[\sqrt{2\alpha}]+[\sqrt{2\beta}]$ ①

对任意不小于 1 的实数 α 和 β 成立.

48.设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$,又 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$,求证:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

49.设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 是满足下列条件的 n 个实数:对任何整数 $k\geqslant0$,有 $a_1{}^k+a_2{}^k+\cdots+a_n{}^k\geqslant0$ 成立.令 $p=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$.

证明 $p=a_1$，并且对任何 $x>a_1$，均有 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant x^n-a_1{}^n$.

50.已知 $a,b,c>0$. 求证：$\dfrac{(a+1)^3}{b}+\dfrac{(b+1)^3}{c}+\dfrac{(c+1)^3}{a}\geqslant\dfrac{81}{4}$.

51.设非负整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{1997}$ 满足 $a_i+a_j\leqslant a_{i+j}\leqslant a_i+a_j+1(1\leqslant i,j,i+j\leqslant 1997)$. 证明存在实数 x，对所有 $1\leqslant n\leqslant 1997$，满足 $a_n=[nx]$.

52.任给 1001 个绝对值小于 1 的实数. 求证：其中有两个实数 x,y，能使下面的不等式 $\sin\dfrac{499\pi}{1000}<xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}<1$ 成立.

53.设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数. 记 $x_{n+1}=x_1$，$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 试证：$\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\dfrac{1}{(1+a)^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$，等式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

54.对于平面上任意三点 P、Q、R，我们定义 $m(PQR)$ 为 $\triangle PQR$ 的最短的一条高线的长度(当 P,Q,R 共线时，令 $m(PQR)=0$). 设 A,B,C 为平面上三点，对此平面上任意一点 X，求证：

$$m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

55.设 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots$ 是正实数，并且对 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 成立 $x_n{}^n=\sum\limits_{j=0}^{n-1}x_n{}^j$. 求证：对所有的 n，皆有 $2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\leqslant x_n<2-\dfrac{1}{2^n}$.

56.对于每个正整数 n，将 n 表示成 2 的非负整数次方的和，令 $f(n)$ 为正整数 n 的不同表示法的个数.

如果两个表示法的差别仅在于它们中各个数相加的次序不同，这两个表示法就被视为是相同的. 例如，$f(4)=4$，因为 4 恰有下列四种表示法：

$4;2+2;2+1+1;1+1+1+1$.

求证：对于任意整数 $n\geqslant 3$，$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}$.

57.求证：对所有正实数 a,b,c，有

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

58.已知：$x\geqslant y\geqslant z>0$. 求证：$\dfrac{x^2y}{y+z}+\dfrac{y^2z}{z+x}+\dfrac{z^2x}{x+y}\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

59.设 n 是一个整数，$n\geqslant 3$，并设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一列实数，且满足 $x_i<x_{i+1}$，$1\leqslant i\leqslant n-1$. 求证：$\dfrac{n(n-1)}{2}\sum\limits_{i<j}x_ix_j>\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_j$.

60.设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in[1,2]$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i{}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i{}^2$. 求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i{}^3}{b_i}\leqslant\dfrac{17}{10}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i{}^2$.

61.设 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots$ 是正实数数列，对所有的 $n\geqslant 1$ 满足条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\geqslant\sqrt{n}$. 证明对所有的 $n\geqslant 1$，$\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2>\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$.

62.以 $\alpha(n)$ 表示正整数 n 的二进制表达式中 1 的个数. 求证：

(1) $\alpha(n^2)\leqslant\dfrac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1]$;

(2)上式中的等号可对无穷多个正整数成立；

(3)存在数列 $\{n_i\}_1^\infty$，使得 $\dfrac{\alpha(n_i{}^2)}{\alpha(n_i)}\to 0,i\to\infty$.