1997年

研究生入学考试
数学经济类及MBA复习指南

中央财经学院 陈文灯 主编

中国环境科学出版社

1997年研究生入学考试
数学经济类及MBA复习指南

主　编　陈文灯

副主编　黄先开　郭玉芝

　　　　田增保　赵　军

中国环境科学出版社

北京

内容简介

本书共分三篇，即高等数学、线性代数、概率论与数理统计。各部分均参照“数学考试大纲”编写而成，每章后面附有练习题。本书归纳、总结的方法技巧，可使读者在短期内高效、快捷地提高分析问题、解决问题的能力，是考研学子的必备用书。

1997年研究[redacted]数学经济类及MBA复习指南

主　编　陈文灯

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区北岗子街8号

河北三河新艺印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1996年6月第一版　　开本 787×1092　1/16

1996年6月第一次印刷　　印张 28 3/4

印数 1—5000　　字数 680千字

ISBN 7-80135-099-5/G・530

定价：32.00元

前　　言

本书是根据教委制订的“经济学硕士、MBA 研究生入学考试‘数学考试大纲’”，参照教委考试中心“87—96 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题”的题型，融入作者十几年“考研班”辅导的经验而编写的一本应试之作。在编写过程我们参考了陈文灯教授等编著的《高等数学复习指导——思路、方法、技巧》等书。本书归纳、总结的方法和技巧，可使读者在短期内高效、快捷地提高分析问题和解决问题的能力，增强应试力。

本书特点：

(1)针对“考研”的题型，安排相关章节，深入分析探究，总结出解题方法和技巧，便于读者掌握应用。

(2)用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时思路畅通，“有的放矢”。

(3)介绍许多新的快速的解题方法和技巧，使读者在应试时赢得时间和速度。

(4)广泛采用表格法，使读者对要点一目了然。

本书是考研应试者的良师诤友，是取得成功的一本有价值的参考书。

参加本书编写的有陈文灯、黄先开、郭玉芝、赵军、田增保、黄惠青、贺今等。陈文灯任主编，黄先开、郭玉芝、田增保、赵军任副主编。

由于匆忙成书，错误不当之处定然有，请读者批评指正。

编者

1996.4

目　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限与连续 …………………………………………………………… (1)
第二章　导数与微分 ……………………………………………………………………… (32)
第三章　不定积分 ………………………………………………………………………… (48)
第四章　定积分及广义积分 ……………………………………………………………… (73)
第五章　中值定理的证明技巧……………………………………………………………… (108)
第六章　一元微积分的应用………………………………………………………………… (122)
第七章　多元函数微分学…………………………………………………………………… (142)
第八章　二重积分…………………………………………………………………………… (161)
第九章　无穷级数…………………………………………………………………………… (179)
第十章　常微分方程………………………………………………………………………… (197)
第十一章　函数方程与不等式证明………………………………………………………… (212)
第十二章　微积分在经济中的应用………………………………………………………… (225)

第二篇　线性代数

第一章　行列式……………………………………………………………………………… (235)
第二章　矩阵………………………………………………………………………………… (254)
第三章　向量………………………………………………………………………………… (277)
第四章　线性方程组………………………………………………………………………… (299)
第五章　特征值和特征向量………………………………………………………………… (322)
第六章　二次型……………………………………………………………………………… (341)

第三篇　概率论与数理统计

第一章　随机事件及其概率………………………………………………………………… (350)
第二章　随机变量及其分布………………………………………………………………… (376)
第三章　随机变量的数字特征与极限定理………………………………………………… (415)
第四章　数理统计…………………………………………………………………………… (441)

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限与连续

§1.1　函数

一、函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

x—— 自变量，y—— 因变量，变域 D 为定义域，记为 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f。

函数概念的两要素：

(1) 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围(若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域)。

(2) 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法。

〔解题提示〕　当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数。

例 1.1　与 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 等价的函数是(　)

$(A)x$；　$(B)(\sqrt{x})^2$；　$(C)(\sqrt[3]{x})^3$；　$(D)\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x |t|dt$

〔解〕　$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

(A)，(C) 与 $f(x)$ 的对应关系不同；(B) 与 $f(x)$ 的定义域不同，前者 $D_f: x \geqslant 0$，后者 $D_f: (-\infty, +\infty)$，故只有(D) 与 $f(x)$ 等价。

〔解题提示〕　函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x) = f(t) = f(u) = \cdots$$

简称函数表示法的“无关特性”，是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法。

例 1.2　设 $f(x)$ 满足方程：

$$af(x) + bf\left(\frac{x}{x-1}\right) = e^x \tag{1}$$

其中 $|a| \neq |b|$，求$\dfrac{df(x)}{dx}$。

〔解〕　先求出 $f(x)$ 的表达式。利用函数表示法的无关特性，令 $t = \dfrac{x}{x-1}$，得 $x = \dfrac{t}{t-1}$，于是 (1)$\Rightarrow$

$$bf(t) + af\left(\frac{t}{t-1}\right) = e^{\frac{t}{t-1}}$$

即

$$bf(x)+af(\frac{x}{x-1})=e^{\frac{x}{x-1}} \tag{2}$$

解(1)、(2)联立方程组，得

$$f(x)=\frac{ae^x-be^{\frac{x}{x-1}}}{a^2-b^2}$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{a}{a^2-b^2}e^x+\frac{b}{a^2-b^2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

二、函数的定义域的求法

记住下列简单函数的定义域

$$y=\frac{1}{x},\quad D_f:x\neq 0,\quad (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$y=\sqrt[2n]{x},\quad D_f:x\geqslant 0,\quad [0,+\infty)$$

$$y=\log_a x,\quad D_f:x>0,\quad (0,+\infty)$$

$$y=\mathrm{tg}x,\quad D_f:x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in Z$$

$$y=\mathrm{ctg}x,\quad D_f:x\neq k\pi,\quad k\in Z$$

$$y=\arcsin x(\text{或}\arccos x),\quad D_f:|x|\leqslant 1,,\quad [-1,1]$$

〔解题提示〕 求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集。

例 1.3 求下列函数的定义域

(1) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$；

(2) $f(x)=\int_{x^2}^{\frac{x}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$

(3) $y=\arcsin\frac{2x-1}{7}+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$

〔解〕

(1) $\begin{cases}16-x^2>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4\\x>1\\x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\ 1<x<2$ 及 $2<x<4$，即 $(1,2)\cup(2,4)$

(2) 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，初学者易写成 $D_f:x\neq 0$，究其原因是对可积函数类不甚了解，请见第四章 §4.1 定积分概念。因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点，因此 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在包含 $x=0$ 的区间内积分有意义。

(3)

$$\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\2x-x^2\geqslant 0\\2x-1>0\\2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8\\x(x-2)\leqslant 0\\2x>1\\x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\0\leqslant x\leqslant 2\\x>\frac{1}{2}\\x\neq 1\end{cases}$$

$\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1$，及 $1<x\leqslant 2$，即 $(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$

例 1.4　设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 求下列函数定义域。

(1) $f(x+3)$；　(2) $f(2x)$

〔解〕 (1)

$$\because f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

$$\therefore f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -2, & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

故　D_f：$[-3,-1]$

(2)

$$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ -2, & 1<2x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ -2, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

故　D_f：$[0,1]$

三、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对于 $\forall\, x\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x)\text{(或 } f(x)=-f(-x)\text{)}$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数)。

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于坐标原点对称。

奇偶函数的运算性质：

1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；

2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数；

3) 一奇一偶的乘积为奇函数。

常见的偶函数：$|x|$，$\cos x$，x^{2n}，(n 为正整数)，$e^{|x|}$，e^{x^2}，…；奇函数：$\sin x$，$\mathrm{tg}x$，$\dfrac{1}{x}$，x^{2n+1}，$\arcsin x$，$\mathrm{arctg}x$，…。

〔解题提示〕　判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质。

注意：①$f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法。

② 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数。

例 1.5　判别下列函数的奇偶性。

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　(2) $y=\int_0^x f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，$F(x)$ 为奇函数。

〔解〕 (1) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln 1=0$$

故 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数。

(2) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\xlongequal{令t=-u}\int_0^x f(-u)(-du)$$

$$=-\int_0^{-x}f(-t)dt=\int_0^x f(t)dt \qquad (\because f(x)\text{ 为奇函数})$$

$$=F(x)$$

故 $y=\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数。

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}$$

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\left(\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=0$$

所以 $g(x)$ 为奇函数。

又 $F(x)$ 为奇函数

故 $y==F(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$ 为偶函数。

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使对于任一 $x\in$ X，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期。

周期函数的运算性质：

1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$。

2) 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数。

3) 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2,T_1\neq T_2$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数。

常见函数的周期：$\sin x,\cos x,T=2\pi$，

$\operatorname{tg}x,\operatorname{ctg}x,|\sin x|,|\cos x|,T=\pi$。

〔解题提示〕 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数，主要是根居周期的定义，有时也用其运算性质。

例1.6 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=0$，且 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)$ 是(　　)

(A) 是以 π 为周期的函数；　　(B) 是以 2π 为周期的函数；

(C) 是以 3π 为周期的函数；　　(D) 不是周期函数。

〔解〕 由题设 $f(x+\pi)\neq f(x)$，所以(A)不入选。

$$\because f(x+2\pi)=f[(x+\pi)+\pi]\xlongequal{由题设}f(x+\pi)+\sin(x+\pi)$$

$$=(f(x)+\sin x)-\sin x=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，故 (B) 入选。

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果 $M>0$，使得对于一切 $x\in$ X，恒有：

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界，若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界。

注意：① 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言；

② 无界函数与无穷大的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大，例如，$f(x)=x\sin x$，当 $x\to+\infty$ 时是无界函数而不是无穷大量。

几个常见的有界函数：$|\sin x|\leqslant 1$；$|\cos x|\leqslant 1$，$(-\infty,+\infty)$

$$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2},|\arccos x|\leqslant\pi,[-1,1]$$

$$|\operatorname{arctg} x|<\frac{\pi}{2},|\operatorname{arcctg} x|<\pi(-\infty,+\infty)$$

〔解题提示〕 将函数取绝对值，然后用不等式的放缩法；或借助导数利用求最大(小)值法处理。

例 1.7 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为( )

(A) 有上界无下界；　　(B) 有下界无上界

(C) 有界，且 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$；　　(D) 有界且 $-2\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant 2$

〔解〕$|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$　　$(\because 1+x^2\geqslant 2|x|)$

故　$-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$，可知 (C) 入选。

例 1.8 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上为( )

(A) 有上界无下界；　　(B) 有下界无上界；

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，　　(D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\dfrac{1}{4}$

〔解〕 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$$

$\because x\in[\dfrac{1}{2},1]$，$\therefore f'(x)>0$，故 $f(x)$“$\nearrow$”

因此，$\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\lg 1}{1}$，即 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$

可知，该选(C)。

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对 $\forall x_1,x_2\in X$，$x_1<x_2$，恒有：$f(x_1)<f(x_2)$，(或 $f(x_1)>f(x_2)$)

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的。

〔解题提示〕 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告之可导,则其单调性的判别用定义;若 $f(x)$ 在区间 X 上可导,则利用导数判别简便。

例 1.9 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,$x_1>0,x_2>0$,求证:

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降,则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$;

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调上升,则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$。

〔证明〕 (1) 设 $x_1>0,x_2>0$,且 $x_1<x_2$,于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

(2)的证明略。

四、分段函数

如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有着不同的表达形式,则该函数称为分段函数。

常见的分段函数:

1) 符号函数 $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$

2) y 是 x 的最大整数部分,记为 $y=[x]$

3) 狄利克莱(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0,\text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

注意:一般讲,分段函数不是初等函数。

五、初等函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f,如果对于 Z_f 中任一 y 值,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为

$$x=\varphi(y)$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $y=f^{-1}(x)$。

注意:① $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象重合;$y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

② 只有一一对应的函数才有反函数。求反函数的步骤:

(i) 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出;

(ii) 把刚才所得到的表达式中的 x 与 y 对换,即得所求函数的反函数 $f^{-1}(x)$。

例 1.10 设 $y=f(x)=2+\log_a(x+3)$,$(a>0)$,则 $y=f^{-1}(x)=($ $)$

(A) $a^{x+2}+3$, (B) $a^{x-2}-3$, (C) $a^{x+3}+2$, (D) $a^{x-3}-2$

〔解〕 $y-2=\log_a(x+3)\Rightarrow x+3=a^{y-2}\Rightarrow x=a^{y-2}-3\Rightarrow y=a^{x-2}-3$

可知,该选(B)

例 1.11　设 $y=f(x)=\begin{cases}3x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$　$f^{-1}(x)=(\quad)$

〔解〕　求分段函数的反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可。

由 $y=3x,-\infty<x<1\Rightarrow x=\dfrac{y}{3},-\infty<y<3$

于是，反函数为：$y=\dfrac{x}{3},-\infty<x<3$

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4\Rightarrow x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$

于是，反函数为：$y=\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16$

由 $y=2^x,4<x<+\infty\Rightarrow x=\log_2 y,16<y<+\infty$

于是，反函数为：$y=\log_2 x,16<x<+\infty$

综上所述，$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x, & -\infty<x<3\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\Phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

x—— 自变量；　u—— 中间变量；　y—— 因变量。

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点，以下根据函数的特点分别讲几种复合的方法。

(1) 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法，该法适用于初等函数的复合。

例 1.12　设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots)}_{n次}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$。

〔解〕　$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

由以上二式可推测

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

由数学归纳法可证明上式成立。

(2)分析法

所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法，该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合。

例 1.13　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$

〔解〕 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$

① 当 $\varphi(x)<1$ 时，

或 $x<0, \varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$

或 $x\geqslant 0, \varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$

② 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，

或 $x<0, \varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$

或 $x\geqslant 0, \varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant \sqrt{2}$

综上所述，$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$

例 1.14　设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$，求 $f[f(x)]$。

〔解〕 $f[f(x)]=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2\\ 0, & |f(x)|>2\end{cases}$

① 当 $|f(x)|\leqslant 2$ 时，

或 $|x|\leqslant 2, |f(x)|=|4-x^2|\leqslant 2, \Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ 2\leqslant x^2\leqslant 6\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$

或 $|x|>2, |f(x)|=0\leqslant 2\Rightarrow|x|>2$

② 当 $|f(x)|>2$

或 $|x|\leqslant 2, |f(x)|=|4-x^2|>2, \Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |x|>\sqrt{6} \text{ 或 } |x|<\sqrt{2}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |x|<\sqrt{2}\end{cases}, \Rightarrow|x|<\sqrt{2}$

或 $|x|>2, |f(x)|=0>2$ 矛盾。

综上所述

$$f[f(x)]=\begin{cases}0, & |x|<\sqrt{2}\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2\end{cases}$$

(3)图示法

所谓图示法是借助于图形的直观性达到复合函数的一种方法。适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合。

解题步骤：

① 先画出中间变量函数 $u=\varphi(x)$ 的图象；

② 把 $y=f(u)$ 的分界点在 xou 平面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线)；

③ 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间；

④ 将 ③ 所得结果代入 $y=f(u)$ 中，便得 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间。

例 1.15　设 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$，$\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$

求 $\psi(\varphi(x))$。

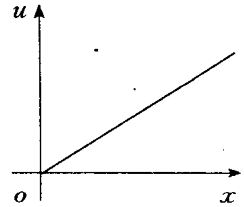

图 1- 1

〔解〕　令 $\varphi(x)=u$，则 $\psi(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0\\ -u^2, & u>0\end{cases}$

① 作出 $u=\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$ 的图象，见图 1-1

② 再在图 1－1 中作出 $y=\psi(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0\\ -u^2, & u>0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图象（x 轴）；

③ 从图中看出：当 $x\leqslant 0$ 时，$u=0$，当 $x>0$ 时，$u=x$；

④ 将 ③ 代入 $y=\psi(x)$ 中，得

$$\psi(\varphi(x))=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$$

例 1.16　设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $f[\varphi(x)]$

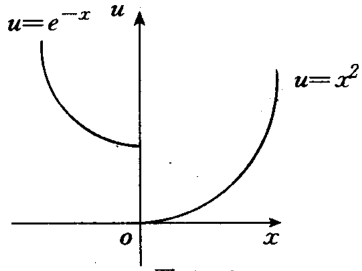

图 1- 2

〔解〕　$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

令 $u=\varphi(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

① 作出 $u=\varphi(x)$ 的图象，见图 1-2

② 再在图 1-2 作出 $y=f(u)=\begin{cases}u, & u\geqslant 0\\ 0, & u<0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图象（x 轴）。

③ 从图中看出：当 $x<0$ 时，$u=e^{-x}$，当 $x\geqslant 0$ 时，$u=x^2$。

④ 将 ③ 代入 $y=f(u)$ 中，得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$$

§1.2 函数的极限及其连续性

一、概念

1. 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

2. 函数极限

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 一个 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists$ 一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$（说明函数在某点有无定义与极限是否存在无关）时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

3. 左右极限

左极限：$f_-(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $\delta > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

右极限：$f_+(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

4. 无穷小：以 0 为极限的量称为无穷小量

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x)| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 一个 $\varepsilon > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x)| < \varepsilon$$

5. 无穷大（实际上是极限不存在的一种形式）

在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为无穷大量。

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0, \exists$ 一个 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x)| > M$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0, \exists$ 一个 $\varepsilon > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x)| > M$$

注意：无界变量与无穷大的区别：无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量，例如，$y = f(x) = x\sin x$ 是无界变量，但不是无穷大量。因为取 $x = x_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x_n) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，当 n 充分大时，$f(x_n)$ 可以大于一预先给定的正数 M；取 $x = x_n = 2n\pi$ 时，$f(x_n) = 0$

6. 无穷小的比较（重点）

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \alpha(x) = 0$，　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \beta(x) = 0$

1) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x)$

2) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小

3) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c, (c \neq 0)$ 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小

4) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

5) $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c\ (c \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 价无穷小。

常用的等价形式：

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \mathrm{tg} x \sim x, \mathrm{arctg} x \sim x$

$\ln(1 + x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2, (1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$

例 1.17　设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt, g(x) = x^3 + x^4$，当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是（　　）

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小；　(B) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小；

(C) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小；　(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小。

〔解〕　$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt}{x^3+x^4}(\dfrac{0}{0})\xlongequal{\text{用洛毕达法则}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2+4x^3}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 该选(D)

例 1.18　当 $x\to 0$ 时，下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小(　　)

$(A)x^2,(B)1-\cos x,(C)x-\text{tg}x,(D)\ln(1+x^2)$

〔解〕　$\because 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\ln(1+x^2)\sim x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\text{tg}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2x-1}{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin^2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=0$$

$\therefore$ 该选(C)

7. 函数连续性概念

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 Δx，相应地得到函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

定义 2　设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

注：一般讲，证明的命题用函数连续的第一个定义方便；判断函数在某点是否连续尤其是判断分段函数在分界点处是否连续用定义 2 方便。

定义　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续。

定义　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 处右连续(即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$) 在 $x=b$ 处左连续(即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$)，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

8. 间断点

定义　若 $f(x)$ 在 x_0 处发生如下三种情形之一：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

间断点 x_0 的类型：

第 I 类间断点 $\triangleq f_-(x_0),f_+(x_0)$ 均存在，

若 $f_-(x_0)=f_+(x_0)\neq f(x_0)$，$x=x_0$ 称为可去间断点

若 $f_-(x_0)\neq f_+(x_0)$，　　$x=x_0$ 称为跳跃间断点。

第 Ⅱ 类间断点 $\triangleq f_{-}(x_0), f_{+}(x_0)$ 至少有一个不存在

若 $f_{-}(x_0), f_{+}(x_0)$ 之中有一个为 ∞，则 $x = x_0$ 称为无穷间断点。

二、重要定理与公式

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_{-}(x_0) = f_{+}(x_0) = A$

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$

定理 3　(保号性定理) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, A > 0$，(或 $A < 0$) 则存在一个 $\delta > 0$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$ 时，$f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$)

定理 4　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > A, f(x) > 0$，(或 $f(x) < 0$) 则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$)

定理 5　单调有界数列必有极限。

定理 6　(夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\psi(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

例 1.19　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

〔解〕　$\because 0 \leqslant x \leqslant 1, \sqrt{3} \leqslant \sqrt{x+3} \leqslant 2$，(把含 n 的项留下来)

$\therefore \sqrt{3}x^n \leqslant x^n\sqrt{x+3} \leqslant 2x^n$

于是

$$\int_0^1 \sqrt{3}x^n dx \leqslant \int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx \leqslant \int_0^1 2x^n dx$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{3}x^n dx = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x^n dx = \lim_{n\to\infty}2\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx = 0$$

例 1.20　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

〔解〕　$3 \leqslant (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$

而

$$\lim_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3(\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a > 0))$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$$

例 1.21　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$　$(x \geqslant 0)$

〔解〕　i) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n} \leqslant \sqrt[n]{3}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$$