開天

徐 兵 编著

高等数学大讲堂

焦点运算与典型错误分析

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

開天

高等数学大讲堂

焦点运算与典型错误分析

徐　兵　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学大讲堂·焦点运算与典型错误分析 / 徐兵编著 .—大连 : 大连理工大学出版社，2004.9
ISBN 7-5611-2644-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 086919 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-84708842　传真:0411-84701466　邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:9　字数:333 千字
印数:1～8 000
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东　　责任校对:高继巍
封面设计:佟涤非

定　价:15.00 元

前　言

提高考试成绩是考生的普遍愿望，正确地把握复习方向是提高考试成绩的重要环节。关键在哪里呢？硕士研究生入学全国统一考试大纲清楚地解说了考试性质、命题的指导思想、命题的基本原则及数学试卷设计的基本要求。由此可以清楚地看到基本概念、基本性质、基本运算的掌握程度是考试成败的关键。

从历年对研究生入学考试试卷的分析可以看出，许多考生对数学"三基"的掌握还有较大的差距。考试大纲命题的基本原则中指出：试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查。因此对于考生来说，理解概念要求明确概念的要素，认清其实质。理解性质要求明确性质的基本特征。要尽力做到了解性质、概念的内涵与外延。内涵是指它的本质属性，外延是适用范围的拓展等。掌握基本方法要尽力做到明确方法的前提条件、适用范围、相关知识纵向、横向运算方法的共同点与不同之处及与概念、性质的结合运用等。

研究生考试大纲的"命题指导思想是有利于国家对高层次人才的选拔，又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高。要求数学考试试题编制能结合高等学校的教学实际。试题水平能反映教学实际水平，也能起到指挥棒的引导作用。"命题的指导思想中又强调"考查的内容不超过考试大纲的规定，试卷的难易度与样卷的难易度基本一致，试卷不出现超纲题，偏题和怪题。"本书的编写是基于上述思想，定位于研究生入学数学考试高等数学的基本运算。对焦点运算方法进行归纳、分析；指出其特点；考试中常见的错误分析。本书每个单元都分为两个部分：一是基本运算方法，二是范例解析。给出题目的求解思路分析。多数题后又加说明：或为解题过程的相关解说，或为考生的典型错误分析，或试题的难度值等。意在能引导考生复习时开拓思路，提高运算能力。

笔者在北京航空航天大学出版社从2001年出版《硕士研究生入学考试焦点概念·性质·百题百分》，到2004年3月已修订为第3版。而本书是为考生备考研究生复习数学所编写的专门针对提高运算能力的辅导书。经过三年研究生考前辅导班的运用，证明对于提高考生复习效率，提高运算能力有实效。因此将其推荐给考生，以与本书配合使用。

本书例题中的(010203)，(040310)等分别表示2001年数学(二)中分值为3分的试题，2004年数学(三)中分值为10分的试题。

本书也可以作为本科学生学习高等数学，提高运算能力的学习辅导书。

作者

于北京航空航天大学

2004年5月

目　　录

第一章 函数、极限与连续性

1.1 函数

函数的基本运算有：

函数符号的运用问题，包括分段函数、反函数、可变上(下)限积分形式的函数、可变限二(三)重积分、可变限线(面)积分等形式的函数。

讨论函数的基本性质。

基本运算方法

1. 函数符号的运用。

2. (1) 判定函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理。

(2) 判定函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理，并判定 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$。

(3) 求函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的值域，常常可以利用求 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值与最小值来确定。

3. 判定函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的单调性，常利用 $f'(x)$ 的符号来确定。

4. 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性常利用定义与性质来确定。

范例解析

1 函数符号的运用

【例 1】 (040210) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数。

(Ⅰ) 写出 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的表达式；

(Ⅱ) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

解析 所给问题(Ⅰ)为函数符号运算问题。

由于题设中只给出了在$[0,2]$上 $f(x)$ 的解析表达式，欲求 $f(x)$ 在$[-2,0]$

上的表达式，可以考虑变换，将 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时变到$[0,2]$中的新变量。

当$-2\leqslant x\leqslant 0$时，可得$0\leqslant x+2\leqslant 2$。因此当$-2\leqslant x\leqslant 0$时，设$y=x+2$，此时$0\leqslant y\leqslant 2$，从而

$$\begin{aligned} f(x) &= kf(x+2) = kf(y) = ky(y^2-4) \\ &= k(x+2)[(x+2)^2-4] = kx(x+2)(x+4) \end{aligned}$$

此处不再给出(Ⅱ)的解答。

本题难度值为0.691。函数符号的运用问题在导数、积分等综合试题中多次出现。如3.1节例13，例14等。

2 判定函数的有界性

【例2】 (040404) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界。(　　)

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

解析　所给问题为判定函数在区间(a,b)内有界性。依本节"基本运算方法"中的2可知，若$f(x)$在(a,b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则$f(x)$在$(a,b)$内有界。

由于$f(x)$为分段函数，分段点为$x=0$。$f(x)$在点$x=0,x=1,x=2$处无定义。在$(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,+\infty)$内$f(x)$为初等函数，且在上述区间内$f(x)$为连续函数。

$x=-1,x=3$属于$f(x)$的定义区间，可知$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$存在。

依题意可知只需考察

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4}$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\infty$$

可知$f(x)$在$(-1,0)$内有界。因此应选A。

本题难度值为0.461。

3 判定函数的单调性

【例3】 (970407) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$F(x)=\int_0^x(x-$

$2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减。

解析 所给 $F(x)$ 为可变上限积分形式的函数。问题(1) 为判定函数 $F(x)$ 的奇偶性，应利用奇偶函数的定义。问题(2) 为判定函数 $F(x)$ 的单调性，应利用导数符号判定。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则有 $f(-x)=f(x)$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t$$

令 $t=-u$，于是

$$F(-x)=-\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{x}(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x)$$

可知 $F(x)$ 为偶函数。

$$(2)F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]'$$
$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$$
$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x) \qquad (*)$$
$$=x[f(\xi)-f(x)]$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间。由已知 $f(x)$ 单调不增，

当 $x>0$ 时，$f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，可知 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x<0$ 时，$f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，可知 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x=0$ 时，由式$(*)$可知 $F'(0)=0$

因此对 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $F'(x)\geqslant 0$，从而知当 $f(x)$ 单调不增，必有 $F(x)$ 单调不减。

说明 本题难度值为 0.37。

4 判定函数的周期性

【例 4】 (040211) 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，

(Ⅰ) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的值域。

解析 所给函数是由可变上(下)限积分形式表示的函数。问题(Ⅰ)是判定 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，只需依周期的定义来判定。问题(Ⅱ)为求 $f(x)$ 的值域，由于 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，只需在一个周期上(如$[0,\pi]$)上，求出

$f(x)$ 的最大值与最小值，则可得 $f(x)$ 的值域。

（Ⅰ）依题设可知

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$t=u+\pi$，则当 $t=x+\pi$ 时，$u=x$；当 $t=x+\frac{3}{2}\pi$ 时，$u=x+\frac{\pi}{2}$；$\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$，因此

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,\mathrm{d}u=\int_{x}^{x-\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数。

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，只需讨论 $f(x)$ 在一个周期 $[0,\pi]$ 上的值域。

由于 $|\sin u|$ 为连续函数，因此

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$，可得 $f(x)$ 的驻点 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}\pi$，由于

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$$

$$f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\mathrm{d}t=1$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 $2-\sqrt{2}$，最大值为 $\sqrt{2}$。因此 $f(x)$ 的值域为 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

本题难度值为 0.424。

1.2 极限

极限是高等数学的基本概念。极限运算是高等数学的基本运算，也是历年来研究生数学入学考试的基本考核知识点。极限运算的基本问题为：

(1) 求极限；

(2) 无穷小量阶的比较。

基本运算方法

极限的定义指明了概念，也指明了极限值是个固定常数，它并没有提供求极限的方法，利用极限的定义验证了 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$，$\lim\limits_{x \to x_0} c = c$。并得到了下列方法：

1. 利用连续函数性质求极限。

(1) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，$f(u)$ 在点 u_0 处连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x))$。

2. 利用极限的四则运算法则求极限。

3. 利用两个重要极限公式求极限。

4. 利用等价无穷小量代换简化运算。

常见的等价无穷小量代换：当 $x \to 0$ 时

$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，

$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$

5. 利用无穷小量性质求极限。

6. 利用极限的概念与性质求极限。

7. 求分段函数在分段点处的极限时，当函数在分段点两侧表达式不同时，需利用左极限与右极限。

8. 利用极限存在的准则求极限。

9. 利用洛必达法则求极限。

10. 利用导数定义求极限。

11. 利用定积分的定义求极限。

12. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较。

范例解析

1 利用连续函数性质求极限

【例 1】 (020303) 设常数 $a \neq \dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} \ln\left[\dfrac{n - 2na + 1}{n(1-2a)}\right]^n = $ ________。

解析 根据连续函数的性质。

$$\lim_{n \to \infty} \ln\left[\frac{n - 2na + 1}{n(1-2a)}\right]^n = \lim_{n \to \infty} \ln\left[1 + \frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$

$$= \ln \lim_{n \to \infty}\left[1 + \frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$

$$= \ln e^{\frac{1}{1-2a}} = \frac{1}{1-2a} (a \neq \frac{1}{2})$$

本题难度值为 0.61。

2 利用极限的四则运算法则求极限

【例 2】 (010203) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} =$ ________。

解析 所给极限为$\frac{0}{0}$型,不能直接利用极限四则运算法则。

本例求极限的函数分子中含有根式,且在 $x\to 1$ 时,带有根式的分子表达式极限为零。对于含有根式的函数的求极限问题,通常可以先进行有理化,使恒等变形以后的表达式中带有根式的因子的极限不为零,能对其单独求极限。

若变形后问题化为分母极限不为零的分式极限,则可以利用极限四则运算法则求之。

若变形后问题仍为$\frac{0}{0}$型极限,则可以考虑利用洛必达法则等方法解之。

将求极限的函数恒等变形,可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(3-x)-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{(x+2)(x-1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}} \\
&= \frac{-\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

1° 本例也可以利用洛必达法则计算。

2° 本题难度值为 0.79。

【例 3】 (990205) 求$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$。

解析 所给极限为$\frac{0}{0}$型,求极限的函数表达式中含有根式,依例 2 的解析,先将分子有理化。

$$原式 = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x)-x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \right\} \qquad (*)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\ln(1+x)-x} \right] \qquad (**)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\right] \qquad (***)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1} = \frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}(1+x)\right] = -\frac{1}{2}$$

1° 上述运算(*)处非零因子$\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$单独求极限,可以简化运算。

上述运算(**)处,恒等变形,对因子$\frac{\sin x}{x}$利用重要极限公式单独求极限。

上述运算(***)中对因子$\frac{1}{\cos x}$单独求极限,对第二个因子利用洛必达法则求极限。

2° 本题满分为5分,从考核结果看,有40%的考生得零分或1分,有41%的考生得满分。考生的主要问题是有超过一半以上的考生不会在(*)处用$\frac{1}{2}$代替$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$,因此使运算复杂化,甚至出现运算错误。本题难度值为0.56。

3 利用两个重要极限公式求极限

【例4】 (900103,900203) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x =$ ______。

解析

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x} = \frac{e^a}{e^{-a}} = e^{2a}$$

将所给表达式变形为下述形式也可以求解:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right)^{2a}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{a}$$

$$= e^{2a}$$

不难发现两种方法的计算量相差很大。

【例5】 (960103,960203) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$,则$a =$ ______。

解析　本例为求极限的反问题，可以认为是例 4 的变式。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=e^{3a}=8$$

$$a=\ln 2$$

【例 6】（010306，010406）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$$

求 c。

解析　本题知识点为拉格朗日中值定理、重要极限公式。

由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}\right)^x=e^{2c}$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e,\xi\in(x-1,x)$$

可知 $e^{2c}=e,c=\dfrac{1}{2}$。

本题难度值为 0.58。该题没能得满分的，几乎都是在求右端极限时出现错误，主要有以下三种错误：

1° 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，得出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=ex$，从而得出

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=ex-e(x-1)=e$$

2° $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$

上述两种错误都是概念性错误。在 1° 中错用了极限的概念；在 2° 中错用了导数的定义。

4 利用等价无穷小量代换简化运算

【例 7】（970103）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________。

解析　所给极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，不能直接利用极限四则运算法则。先进行等价无穷小量代换，再分组，可简化运算。

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x}{x} + x\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}$$

1° 本题不能使用洛必达法则求解。它不满足洛必达法则的条件。

2° 注意无穷小量代换可以在乘除法中使用，不能随意在加减法中使用。

3° 本题难度值为 0.66。

【例 8】 (040210) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right]$。

解析 所给极限为$\frac{0}{0}$型，但是其中$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x$为$1^0$型的幂指函数，注意到

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x = e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}$$

利用等价无穷小量代换可以简化运算。

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}} - 1}{x^3} \qquad (*)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x - 1}{3}\right)}{x^2} \qquad (**)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} \qquad (***)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

1° 上述运算中利用代数恒等变形与等价无穷小量代换，使问题得到简化。其中式(*)处利用等价无穷小量代换

当 $x\to 0$ 时， $e^x - 1 \sim x$

在式(**)处利用等价无穷小量代换

当 $x\to 0$ 时， $\ln(1+x) \sim x$

在式(***)处利用等价无穷小量代换

当 $x\to 0$ 时， $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

2° 考生中一部分直接利用洛必达法则，致使运算复杂。也有一部分在上式(*)处利用洛必达法则求之。

3° 本题难度值为 0.520。

5 利用无穷小量的性质求极限

常用的无穷小量性质有：

有界变量与无穷小量之积为无穷小量。

无穷大量的倒数为无穷小量，等等。

【例 9】 (920103,920203) 当 $x \to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为(　　)。

A. 等于 2　　　　B. 等于 0

C. 为 ∞　　　　D. 不存在，但不为 ∞

解析　由于 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，又因为

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

因此
$$\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

可知 $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在，也不为零和无穷大。故知本题应选 D。

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，但是当 $x\to x_0$ 时，$a^{f(x)}$ 不一定为无穷大量。这里需要分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情形讨论。还需要讨论当 $x\to x_0$ 时，是 $f(x)\to+\infty$，还是 $f(x)\to-\infty$，否则必然导致错误！

【例 10】 (970205) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

解析　所给极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型问题，不能利用极限四则运算法则，也不能利用洛必达法则求之。

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$$

1° 上述运算(*)处，当 $x\to-\infty$，且 $|x|$ 足够大时，$\sqrt{x^2}=|x|=-x$，这是解题中的关键。相当多的考生在此处出现错误，误答为 3。

2° 本题难度值为 0.45。

3° 考虑以下两种变式：

变式 1　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$ ________。此变式较例 10 简单，只