周概容　主编

全国硕士研究生入学统一考试
数学复习指导（三）

线性代数

[数学一至数学四适用]

马薇　编著

讲解考试的内容和要求
指点复习的重点和难点
演示解题的方法和技巧
理清命题的思路和趋势

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

周概容　主编

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习指导（二）

线性代数

（数学一至数学四适用）

马　薇　编著

南开大学出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学复习指导. 2,线性代数 / 周概容主编;马薇编著. 一天津:南开大学出版社,2004.11

(全国硕士研究生入学统一考试数学复习指导系列丛书)

ISBN 7-310-02158-4

Ⅰ.全... Ⅱ.①周...②马... Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080821 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

天津市宝坻区第二印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2004 年 11 月第 1 版 2004 年 11 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 12.75 印张 320 千字

定价:20.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

序　言

数学是理工科类、经济类和管理类各专业必修的基础课，又是理工科类、经济类和管理类各专业硕士研究生入学全国统一考试的必考课程。自 1987 年始，由教育部组织全国统一命题和统一考试，是目前我国最高层次的统一考试。在全国硕士研究生入学统一考试的政治理论、外语和数学等三科中，数学满分为 150 分，而其他两科均为 100 分。

数学考试包括三部分内容：高等数学（微积分、向量代数和空间解析几何）、线性代数、概率论与数理统计。鉴于这三门课都是大学一年级和二年级的课程，对于在职考生学习有关课程的时间更久，有些同等学力的考生也有同样的情况，因此同时复习三门课程有一定的困难。为了帮助考生有效地准备入学考试，我们根据教育部颁发的“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”，参照历年硕士研究生入学统一考试数学试题的题型、结构、性质和特点，编写了这套考研“数学复习指导”，分为四册：

第一分册《高等数学》

第二分册《线性代数》

第三分册《概率论与数理统计》

第四分册《实战模拟试卷》

为了读者使用方便，四个分册的内容各自成体系，且前三分册的格式一致。

（一）全国硕士研究生入学数学统一考试分为“数学一”、“数学二”、“数学三”、“数学四”等 4 套试卷。4 套试卷只是在某些知识点的要求上有所区别，其中“数学二”不考“概率论与数理统计”，“数学四”只考“概率论”但是不考“数理统计”。其他区别均在每一“章”的开始指出，并在相应的例题上标明。

（二）每本书的“章”也与《考试大纲》一致。例如，“高等数学”部分的《考试大纲》为：“一、函数、极限、连续”，“二、一元函数微分学”，“三、一元函数积分学”等，每分册的“章”的编号也是一、二、三、……与《考试大纲》完全一致。

（三）每一“章”的内容都分为四个专题展开：Ⅰ　考试大纲要求；Ⅱ　考试内容提要；Ⅲ　典型例题分析；Ⅳ　自测练习题（附：自测练习题解答）。

（四）例题按照全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的题型，分为“填空题”、“选择题”和“解答题”。不过，为了突出证明题，特别把“证明题”从“解答题”中分出来单列。

〖**填空题**〗　填空题主要涉及一些概念、性质和简单的计算题，主要作用是保障整个试卷考试内容的覆盖面。填空题还可以缓解考生的紧张心理，有利于考生逐步进入答题状态并充分发挥水平。

〖**选择题**〗　研究生入学数学考试的选择题都是单项选择题。选择题是一种客观性试题，有计算性、概念性和理论性等三种基本类型。计算性选择题是通过简单的计算来找出正确选项，一般较少采用；概念性选择题主要考核对于概念、定义和性质的理解和掌握；理论性选择题主要考核对于定理、法则、性质、公式的条件与结论的理解和掌握，以及考查分析、判断、类比、归纳等逻辑思维能力。后两种形式的选择题采用得较多。

〖**解答题**〗　解答题包括计算题、应用题和证明题，有时各种形式出现在同一道试题中，

以增加试题的综合性。

〖**证明题**〗 全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的证明题出现在“解答题”一类中。由于证明题一般对考生是难点，所以我们将其单列出来。

（五）第四分册包括最近一年的统一考试的试卷，以及供考生练习的模拟试卷，可以帮助考生熟悉统一考试试卷的形式和结构。

需要指出，本书的目的不是“押题”，而是为读者提供试题的各种可能题型的范例，通过例题向读者剖析解题的思路、演示各种典型的解题方法和技巧。

本书的主编参加了“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的起草和历次修订，连续 17 年参加了全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题组，并担任组长。编写组的其他成员，有的多年参与研究生入学统一考试的命题，有的多年从事考研的辅导工作和研究生入学统一考试数学试卷的评阅工作，都十分熟悉研究生入学统一考试的内容和要求，掌握命题的思路和试题结构，了解试题欲考查的知识点和难点。我们的目的是通过这套书把这一切介绍给读者。我们把这套书奉献给立志进一步深造、准备攻读硕士学位的考生，并预祝本书的读者成功。

周概容

2004 年 5 月

前　言

全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》规定：数学一、数学二、数学三、数学四必考线性代数，但是数学二、数学四不考“二次型”部分，其余部分数学一、数学二、数学三、数学四基本相同。有鉴于此，本书中每一部分都详细介绍了数学一、数学二、数学三、数学四的考试大纲内容与考试要求，复习的时候可供参考。

本书每一部分都详细介绍了考试内容、解题技巧以及考试中常见的题型，并将常用的结论和定理整理成表格的形式，非常便于复习、记忆、理解。

本书特别注重考生基础知识和解题技巧的培养。题目的难度是循序渐进的，主要的题型都作了重点的讲解，这样可以增强考生的自信心。书中的题目，都作了非常详细的解答，这有助于考生复习。

无论考哪类数学的考生，在复习线性代数的时候，都应把复习的重点放在线性方程组解的理论与矩阵的特征值和特征向量的应用上。这两部分是线性代数各个知识点的交汇处。解这类题的时候会涉及线性代数每个章节的知识：行列式、矩阵、向量组的相关性、秩等都会在解题的过程中得到体现。

本书特别提醒考生要注意基本功的训练，比如能快速、准确地将一个矩阵化为需要的形式、掌握各种行列式的求法等。从历年的数学试卷来看，线性代数的卷子上一般共有5个题，但题型的分布各不相同。根据最新样卷分析，数学一：一个填空题，两个选择题，两个解答题；数学二：一个填空题，两个选择题，两个解答题；数学三：一个填空题，两个选择题，两个解答题；数学四：两个填空题，一个选择题，两个解答题。

本书的读者对象，首先是准备报考硕士学位研究生和MBA者，包括在校本科生、在职考生和同等学力考生。本书对于正在学习“线性代数”的学生，也是一本很好的参考书。

在本书的编写过程中，得到了本书主编、南开大学教授周概容先生的许多帮助和指导，对于本书的完成起到了关键作用. 周概容先生多年从事考研数学的命题工作，具有丰富的经验。在这里向周概容先生表示由衷的感谢。

作者　马　薇

2004年5月

目 录

一、行列式

行列式的考试内容与要求，数学一、数学二、数学三、数学四是一样的.

I 考试大纲要求

（一）考试内容

《考试大纲》规定的考试内容

行列式的概念和基本性质；行列式按行（列）展开定理.

（二）考试要求

根据《考试大纲》规定的考试内容，考生应特别注意以下几点：

1.了解行列式的概念、掌握行列式的性质.

2.会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

II 考试内容提要

（一）行列式的概念

1. 排列与逆序

排列：由自然数 1，2，…，n 组成的一个有序数组 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 称为一个 n 级排列.

逆序：在一个排列中，若一个大数排在小数之前，就称此两个数构成一个逆序.

逆序数：一个排列中逆序的总数，称为此排列的逆序数. 一般记为$\tau\left(j_1, j_2, \cdots, j_n\right)$或记为$N\left(j_1, j_2, \cdots, j_n\right)$.

奇排列：若一个排列中逆序的总数为奇数，则称之为奇排列.

偶排列：若一个排列中逆序的总数为偶数，则称之为偶排列.

排列的奇偶性在行列式的定义中起着重要的作用，排列的奇偶性决定了行列式按定义展开后，每一项的符号. 深入理解行列式的定义，对于掌握行列式的性质、计算行列式、证明一些与行列式相关的结论是非常必要的.

2. n 阶行列式的定义

设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行、不同列的 n 个数的乘积，并在每项前赋予符号 $(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$，得到$n!$个乘积，它们代数和的值就定义为 n 阶行列式.

n 阶行列式用符号表示为：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和．事实上“$\begin{vmatrix} & \end{vmatrix}$”是一种运算符号，是将所有可能的取自不同行、不同列的元素之积，按其行标或列标排列的奇偶性确定每个乘积的符号，并求其代数和．所以，行列式有两种常用等价的表示形式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n};$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 表示对排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有可能求和，共有$n!$项.

关于行列式的定义有两个必须掌握的地方：

（1）给定了一个类似于行列式中的乘积项，要会判定它是否为行列式中的乘积项．若是，要会判定它的符号.

（2）要会充分利用行列式的定义，计算行列元素取值比较特殊的行列式.

（二）行列式的性质

根据行列式定义方式的特点，导出了行列式许多重要的性质．利用这些性质使某些行列式的计算变得简单，应用行列式的性质也可以证明一些重要的结论.

（1）行列式与其转置行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（2）互换行列式的两行（列），行列式变号.

（3）如果行列式的某两行（列）完全相同，则此行列式为零.

（4）行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘以此行列式.

（5）行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

（6）如果行列式中有两行（列）元素成比例，则此行列式的值为零.

（7）如果行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，不妨设成下面的形式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+c_{i1} & \cdots & a_{ij}+c_{ij} & \cdots & a_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D_n 等于下列两个行列式之和

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（8）行列式的某一行（列）的各元素都乘以同一数后加到另一行（列）对应的元素上去，该行列式的值不变.

行列式的性质是计算行列式的重要工具．特别值得注意的是应用了几次性质后得到的新行列式的值与原行列式的值之间的关系.

（三）行列式按行（列）展开定理（拉普拉斯定理）

行列式按行（列）展开定理对于行列式的计算、某些问题的证明是相当重要的．将行列式按行（列）展开，可以降低行列式的阶数，一般情况下，低阶行列式的计算要比高阶行列式的计算容易一些．行列式的性质与行列式按行（列）展开定理的综合应用，会使行列式的计算变得简单.

1. 行列式的余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} .

令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式．值得注意的是，M_{ij} 与 A_{ij} 都是比原行列式低一阶的 $n-1$ 阶行列式.

2. 行列式按行（列）展开定理

（1）行列式的值等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即按第 i 行展开，

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}；\quad i=1,2,\cdots,n；$$

按第 j 列展开，

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}，\quad j=1,2,\cdots,n .$$

（2）行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于

零. 即当$i \neq j$时,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0;$$

或者当$i \neq j$时,

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0.$$

综合上述两种情况有:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(四)行列式的应用

在线性代数中行列式是一个重要的知识点，虽然在考试中占的比例并不大，但与其他知识有着千丝万缕的联系. 行列式与方阵、方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组、个数与维数相等的向量组之间有着密切的关系. 方阵有一个重要的数量特征，就是其行列式的取值情况，即根据其行列式的值可以判断该方阵的某些性质. 所以行列式的应用非常重要.

(1) 利用行列式可以判定方阵的可逆性.

(2) 利用行列式可以求方阵的特征值.

(3) 利用行列式可以讨论方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组的解，并且当此方程组有唯一解时，可以利用行列式求解(克莱姆法则).

(4) 利用行列式可以讨论个数与维数相等的向量组的相关性.

(5) 借助于行列式可以证明某些相关的问题.

(6) 掌握特殊矩阵的行列式值的特征.

同学们在复习行列式的时候，除了行列式的定义、性质、计算方法以外，更要掌握行列式与其他知识点的联系. 比如，当矩阵为方阵时，可以利用方阵的行列式的特征来讨论方阵的性质; 当向量组所含向量的个数与其维数相等时，可以通过用其构造的行列式的特征来研究该向量组的线性相关性; 当线性方程组的未知量的个数与方程组中所含方程的个数相等时，可以利用其系数行列式的特征来讨论方程组解的情况，当系数行列式不等于零时，也可以利用行列式来求非齐次线性方程组的解(克莱姆法则).

(五)几个需要记住的行列式

1. 次对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

2. 范得蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^{n-1}\\1&x_3&x_3^2&\cdots&x_3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(x_i-x_j\right).$$

3. 准对角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&c_{11}&\cdots&c_{1m}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&c_{n1}&\cdots&c_{nm}\\0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&b_{m1}&\cdots&b_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1n}&b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&\cdots&c_{mn}&b_{m1}&\cdots&b_{mm}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1m}\\\vdots&&\vdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mm}\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&\cdots&c_{mn}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\\b_{11}&\cdots&b_{1m}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mm}&0&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\\b_{11}&\cdots&b_{1m}&c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mm}&c_{m1}&\cdots&c_{mn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}_2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|.$$

4. 利用已知行列式构造一个与其值相同的行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&*&\cdots&*\\0&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\ *&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ *&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{vmatrix}.$$

注 利用行列式加边的方法，可以计算某些行列式的值．加边时，$*$ 的取值要根据所求行列式的需要来定．

III 典型例题分析

〖填空题〗

例 1.1 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$________.

答案 应填 $(1-a)(1+a^2+a^4)$.

分析 此行列式是一个五阶行列式，其特点是，对角线上方与下方有非零元素，而其他元素均为零．由于此行列式的零元素多，且阶数较低，故可以直接用行列式的定义计算．

原行列式的值$=(1-a)^5+4a(1-a)^3+3a^2(1-a)=(1-a)(1+a^2+a^4)$.

此行列式的值也可以利用行列式的性质来求．首先将行列式的所有列加到第一列上，然后按第一列展开．

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}+(-a)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}.$$

这样就得到两个四阶行列式，第一个与原行列式同形，而第二个行列式是对角形行列式，对第一个行列式施行同样的步骤，最后得到下面的式子：

$$\text{原行列式的值}=\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}-a^3+a^4-a^5=(1-a)^2+a-a^3+a^4-a^5$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5=(1-a)(1+a^2+a^4).$$

例 1.2 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

答案 应填 $(-1)^{n-1}(n-1)$.

分析 此行列式对角线两侧的元素全相等，如果将所有的元素加到第一列（全加到第一行也行），会造成第一列（或第一行）的元素全相等，然后将对角线上方或对角线下方的元素全化为零．这种“全部压上”的方法适合于具有行（列）特征的行列式．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例 1.3 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix} =$ ________.

答案 应填 -25.

分析 此行列式是简单的三阶数字行列式，但元素之间有特殊的关系．将行列式的第二行的（−1）倍加到第一行上去，然后将第一行的（−1）倍加到第三行上去，得到下面的式子：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 199 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 199 \\ 1 & 2 & 102 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 2 & 199 \\ 1 & 102 \end{vmatrix} = -25.$$

注 遇到阶数较低的数字行列式，应观察一下“数”之间的关系．

例 1.4 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

答案 应填 $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

分析 此题主要考查行列式的性质与矩阵运算的不同之处以及矩阵行列式的性质.

$$\left|2A^*B^{-1}\right|=2^n\left|A^*\right|\left|B^{-1}\right|=2^n\left|A\right|^{n-1}\frac{1}{\left|B\right|}=2^n2^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

注 $\left|kA\right|=k^n\left|A\right|$，在做此类题时要注意这一点.

例 1.5 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}=$ ________.

答案 应填 $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

分析 此行列式是典型用行列式定义来计算的题目，行列式展开后的$n!$项中只有一项不是零.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}=(-1)^{N[(n-1),(n-2),\cdots,2,1]}a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

注 当行列式的零元素比较多时，可以考虑利用行列式定义来计算.

例 1.6 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}=$ ________ 其中$a_i\neq b,i=1,2\cdots n$.

答案 应填 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-b)\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)+1\right]$，其中 $\frac{a_1}{a_1-b}=1+\frac{b}{a_1-b}$.

分析 此行列式对角线两侧的元素均相同，但对角线元素各不相同，因此不能采用例 1.2 的方法计算，但仍可考虑将行列式化简为一个上（下）三角形行列式. 用化三角形行列式的方法计算行列式比较容易掌握，也是计算行列式的常用方法. 首先将第一行的(-1)倍加到各行上去，然后提出各列的因子，再将各列分别加到第一列上去，就得到一个三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b-a_1 & a_2-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a_1 & 0 & a_3-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-b} & \dfrac{b}{a_2-b} & \dfrac{b}{a_3-b} & \cdots & \dfrac{b}{a_n-b} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\begin{vmatrix} \left(\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b}{a_i-b}\right)+\dfrac{a_1}{a_1-b} & \dfrac{b}{a_2-b} & \dfrac{b}{a_3-b} & \cdots & \dfrac{b}{a_n-b} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\left[\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)+\frac{a_1}{a_1-b}\right]=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)+1\right],$$

其中 $\dfrac{a_1}{a_1-b}=1+\dfrac{b}{a_1-b}$.

注 此行列式的计算方法非常典型，形如 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ z & y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ z & 0 & y_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & 0 & 0 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$ 的行列式都可以考虑用此方法来计算.

例 1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵，则 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=$______，$\left|\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^*\right|=$______，$\left|\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*\right|=$______，$\left|\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*\right|=$______.

答案 应填 $|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$，$|\boldsymbol{A}|^{1-n}$.

分析 本题主要考查可逆矩阵的行列式与其各种“朋友”的行列式之间的关系，结果希望考生记住，这对知识的综合应用是非常有益的.