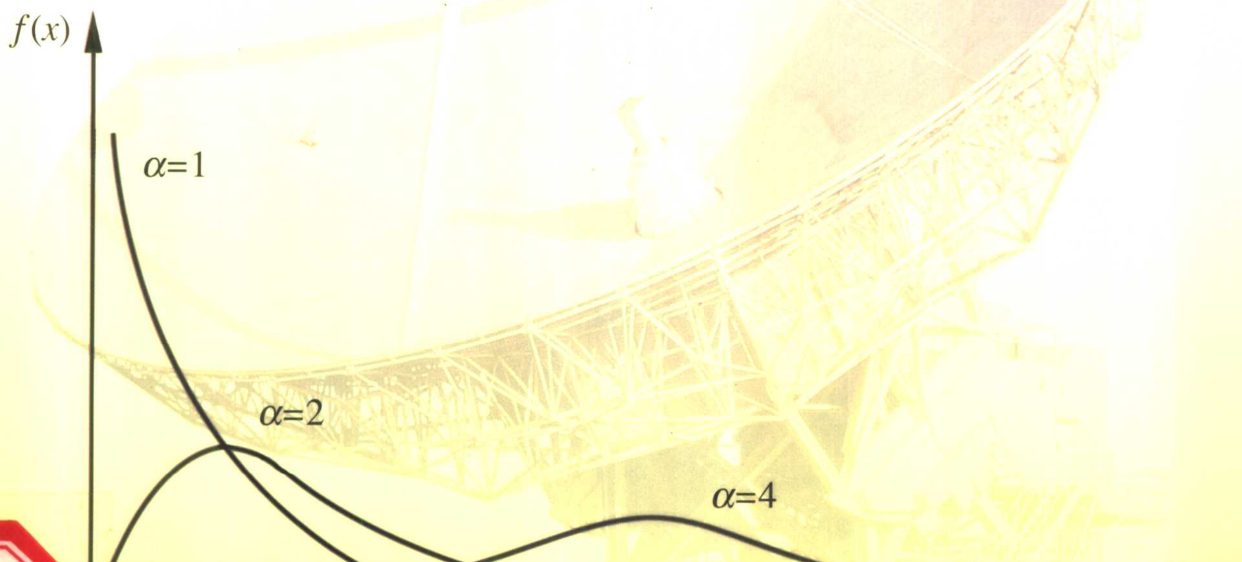
水文气象统计通用模型

中国水利水电科学研究院

孙济良　秦大庸　孙翰光　著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

水文气象统计通用模型

中国水利水电科学研究院
孙济良　秦大庸　孙翰光　著

国家重点基础研究发展规划 (973) 项目 (G1999043602)

水利部科技专著出版基金资助项目

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书根据我国水文气象特征值的不同分布，推出了一个通用的概率模型，这个模型包括了当前水文气象统计中经常使用的和其他科学领域中所采用的共15种(国外专家提出的)概率模型，通用的含义也就在其中。在实践中，它可以适应不同地区的水文、气象特征值的分布。书中还将通用概率模型联合风能密度公式，推导了一个新的风能统计数学模型，并建立了通用概率模型及风能数学模型的计算软件及查算用表（供手算)。

本书可供从事水文气象计算的科研、设计和工程管理人员阅读，亦可供大专院校有关专业师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

水文气象统计通用模型/孙济良，秦大庸，孙翰光著．北京：中国水利水电出版社，2001

ISBN 7-5084-0620-6

Ⅰ．水… Ⅱ．①孙…②秦…③孙… Ⅲ．水文气象学-数学模型 Ⅳ．P339

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第16193号

书　　名	**水文气象统计通用模型**
作　　者	中国水利水电科学研究院 孙济良　秦大庸　孙翰光　著
出版、发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路6号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sale@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68331835（发行部）
经　　售	全国各地新华书店
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	水利电力出版社印刷厂
规　　格	787×1092毫米　16开本　9.75印张　231千字
版　　次	2001年5月第一版　2001年5月北京第一次印刷
印　　数	0001—1100册
定　　价	**29.00**元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换

出版说明

书籍是人类进步的阶梯。科技图书集聚着科学技术研究和发明创造的成果，凝结着人们生产活动、科学实验的实践经验和聪明才智。当今，在振兴中华的“四化”建设中，要把科学技术转化为现实的生产力，科技图书的出版是一个重要的环节。它担负着传播科技信息，扩大科技交流，推广科技成果，普及科技知识，培养科技人才，积累科学文化，提高全民族科技意识和劳动者素质的重任，是科技事业的一个重要组成部分。

改革开放以来，我国的科技出版事业取得了飞速的发展。但在还很不完善的社会主义市场经济中，科技图书出版的合理经营机制尚未形成，“出书难、买书难、卖书难”一直困扰着许多科技人员和出版工作者。特别是一些专业性很强的科学专著，发行范围有限，出版更为困难，影响了科学技术的发展。广大知识分子在不断呼吁，出版界也竭力探索解决这一问题的途径。1985 年以来，中央领导同志和中宣部曾多次指示，要求国家和各主管部门筹款，为专家学者撰写学术专著建立出版基金。其后，从中央到地方各类出版基金陆续建立，有力地推动了学术专著的出版。

水利在我国具有悠久的历史，对治国安邦起着重要的作用。新中国建立 40 多年来，水利建设事业取得了举世瞩目的成就，已成为我国国民经济的基础设施和基础产业，是发展工农业生产的命脉。为了支持水利科技专著的出版，以适应我国水利科研、设计、建设、管理、教学的需要，水利部于 1991 年 9 月 5 日向全国发布了《水利部科技专著出版基金试行条例》，拨出专款用于资助科技专著的出版，并相应地建立了出版基金评审委员会和办公室。

本出版基金主要用于资助有明显社会效益而印数较少的水利优秀科技著作的出版，包括：学术水平高、内容有创见、在学科上居领

先地位的水利基础学科理论专著；反映水利重大科研成果或填补我国水利科技某个空白领域的学术专著；在水利工程技术和经济管理方面有重大科学和实用价值的专著；对我国水利科技发展有重要参考价值的国外水利科技著作的中译本。申请者在已有详细编写提纲和部分样稿时，即可向本基金办公室提出申请。

本出版基金申请项目的评审，坚持“专家评议，公平竞争，择优支持”的原则，其做法是：对所有申请项目，先由基金办送请三名同行专家评议，然后再提交评审委员会讨论、评选。对被通过的申请项目，即转入中国水利水电出版社的计划，由基金赞助出版。

我们希望本出版基金的实施对推动水利科技的进步和人才培养，对促进水利建设事业的发展，会起到积极的作用。为此，我们热切地希望水利界的学者、专家，能潜心将自己的创见和经验撰写成专著，踊跃向本出版基金提出申请出版，为繁荣我国的水利科技事业添砖加瓦，奉献自己的才智和力量。

水利部科技专著出版基金委员会

1997 年 11 月

前　言

到目前为止，水文气象科学还不能对诸如降雨、洪水、径流、风速，以及洪涝灾害等各种水文气象现象作出长期定量预报。因此，也就不能确切地推算水利水电工程、风力工程等在运营期间会必然遭遇到的各种水文气象特征值。但是利用概率统计方法，通过对所发生的“大量现象”规律的归纳，从中揭示其内在的分布规律，就可以估算这些工程在运营期间可能遭遇到的各种水文气象情况，从而解决水利水电工程、风力工程规划设计中所提出的有关问题。

现在的水文气象记录，仅仅是无穷水文气象记录总体中的一个小小样本，这个样本并非人为规定或控制出现的，而是具有某种概率（机会）随机出现的随机样本，过去和未来的记录都是随机样本，由现有记录直观求得的水文气象分布规律，往往只是真实水文气象特征一时的实现，从这样片断的记录不会直观认识到既全面而又真实的水文气象特征，只有等到无穷年代之后，才能从记录总体中找出完全正确的变化规律。但是无穷年代是永远不会达到的，数理统计中的分布函数、统计推断以及水文气象的专业知识和统计本身的特征发展与创新，为解决这个困难的问题提供了一个途径，使我们能够根据现有记录样本所给出的信息来最优模拟记录总体，估计与推断记录总体特征。

最优模拟是一个核心问题，如何做到最优模拟?

在我国水文气象统计计算中，长期以来，广泛采用由国外学者所提出的各种概率模型，如皮尔逊（Pearson）Ⅲ型分布、对数正态分布（Logarithmic normal Distribution）、耿贝尔（Gumbel）或极值Ⅰ型分布、韦布尔（Weibull）分布、瑞利（Raylcigh）分布，以及克里茨基-闵克里（Kritsky-Menkel）等分布，来模拟各种水文气象特征值的分布规律，以便外延和内插各种频率的水文气象特征设计值。但由于我国疆域辽阔，自然地理和气象因素极其复杂，因此由它所形成的水文气象现象也是十分复杂的，在各种气候和地理区域内的水文气象现象的分布规律必然呈多种形式，它们决不可能服从现有的同一种分布模型。

综上所述，著者认为如果要由同一种概率模型来概括所有的分布规律，那么这一概率模型必须是可变动的，即随模式参数的变动而改变模型结构，使它能够转化成为现有的各种概率模型。只有这样，才能适应各种不同自然条件下变化多端的水文气象分布规律。

著者经过长期的摸索和研究，推导出一种新概率模型，它包括了当前在各

领域里通常使用的概率模型。除了前面所提到的概率模型外，尚有 χ^2—分布、指数分布、半正态分布、三参数韦布尔分布、麦克斯威尔（Maxwell）分布、泊松（Poisson）分布和半拉普拉斯（Laplace）分布等。由于这一概率模型包括了多种其他概率模型，扩展了它的适用功能，著者称它为通用概率模型。

通用概率模型的出现，不仅将水文气象统计中的线型统一起来，而且也将线型选配与参数估计融为一体，这就初步解决了频率分析中的线型选优和参数估计所带来的困惑，为参数的时空综合提供了极为有利的条件。

本书中，概述了概率统计基本知识，比较详细地推导了通用概率模型，将它引进水文气象频率计算中，并且还导出了风能资源计算公式，根据各统计模型又编制了计算软件，利用该软件可以方便地进行各种水文气象特征值计算。

随着通用概率模型的推出和应用，相应地对模型拟合、求参方法和参数综合等一系列问题，提出了和已往不同的方法和观点。由于作者水平局限，很多地方还不够全面，错误在所难免，恭请读者批评指正。

著　者

2000 年 6 月　北京

目　录

第一章 概率论简述

人类在社会的生产实践和经济活动中，逐步认识到自然现象和科学实验的结果不都是确定性的，在相同的条件下，同一现象可能出现的结果也不一定是相同的。于是，经常运用“可能性”这一概念，并估计各种不同结果“可能性”的大小。但是这种概念通常是含糊不清的，对它的估计也是粗糙的，带着主观因素的。人们继续不断地进行了大量观察或多次重复试验后，发现这些在一次观察或试验中不能肯定的现象具有近乎必然的客观规律，而且发现应用数学的方法可以研究各种结果出现的“可能性”的大小。概率论的中心课题就是要给这种“可能性”以确切的描述，并给出科学的估计方法。

概率是纯数学，是近代数学的一个重要分支，它产生于社会客观实际的需要，是一门从数量的角度来确定随机事件内部所隐藏的必然规律性的学科，所以它又是数理统计的基础。由于随机事件的普遍性，也就决定了概率论这门科学的重要性，以及应用方面的广泛性。概率论几乎已经渗透到自然科学的各个领域中，在水文、水资源、气象、自动控制、通信技术、军事、电子、经济、地质、地理、生物和医学等部门都有着广泛的应用。

由于概率论所研究的现象与其他的数学分支是完全不相同的，所以对它也有特殊的学习和研究的方法，关键在于必须要始终贯穿分析偶然性和必然性这一对矛盾的产生、发展以及特别是转化这一基本思想。

第一节 随机现象

在自然界和人类社会里的生产实践与科学试验中，人们观察到的现象可以分为两种类型：

一类是事前可预测的，即在相同的条件下，多次观察其结果总是肯定的。例如在标准大气压力下，水加热到100℃时必然沸腾；将一枚钱币向上抛，受地心引力作用必然下落；在没有外力作用的条件下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动等等，将这类现象称之为确定性现象或必然现象。研究这一类现象的数量规律性，所应用的数学工具是诸如数学分析、几何、代数、微分方程等。

另一类现象是与必然现象存在着本质的区别，它在事前是不可预测的。即在相同条件下，重复进行试验，每次结果也未必相同，即使知道它过去状况，在相同条件下，未来情况也未必相同。例如，用一仪器多次测量一物体的长度或重量，所得到的结果总是略有差异；在相同的条件下，多次抛掷一枚均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；远距离射击一目标，可能射中，也可能射不中；工厂里制造的产品，可能是合格的也可能是不合格的等等。这类现象的共同特点是在相同条件下，经过多次试验观察得到一系列不同的结果，而且每次试验之前，是不知道会出现哪一种结果，这类现象称为偶然现象或随机现象。

人们经过长时期的实践并深入研究之后，发现随机现象虽然每次试验或观察下，它的结果是不确定性，但却呈现出某种规律性。例如，多次重复抛掷一枚均匀的硬币，得到正面朝上或反面朝上的次数，大致各为1/2；多次远距离射击同一目标，其弹着点按照一定规律分布等等。这种在大量重复试验中呈现出明显的某些规律，我们把这些规律称为随机现象的统计规律性。

这样，随机现象有一个共同的特点：在一定的条件下，个别试验中可能出现这种结果抑或那种结果，但在大量重复试验中，却具有统计规律性可循。正像恩格斯所说："在表面上偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律"。

第二节　随　机　试　验

对随机现象进行的观察总是在一定条件下进行的，若把一次观察视为一次试验，观察的结果就是试验的结果。每次试验的结果，事前是不可预测的，我们称这种试验为随机试验，或简称试验。例如，一年一度观测到的某流域某江河在某一断面的最大洪峰流量，就可视为一次试验结果；某气象站一年一度观测到的最大风速，同样可视为一次试验的结果等等。于是，在概率论中把满足下列三个条件的试验，称为随机试验。

（1）试验可以在相同的条件下重复地进行。

（2）每次试验结果不一定相同。

（3）试验之前不知道会出现怎样的结果。

所以，我们通常所指的试验都属于随机试验。这是一个广泛的名词，它包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观测都认为是一种随机试验。

第三节　随机事件与基本空间

随机试验的结果，可能出现也可能不出现的事件，称随机事件或称偶然事件，简称事件，通常我们用字母 A、B、X、Y…表示随机事件，如：

例 1　在掷硬币试验中，"正面朝上"。

例 2　在掷一颗骰子的试验中，"出现一点"，"出现二点"等。

例 3　在一段时间内，一个电话总机"接收到呼唤的次数"。

例 4　测得"某一水库的水温"。

例 5　江河某断面出现的"最大流量"，某地的"最大风速"等。

由上可知，随机事件可以是随机试验的某一个结果，也可以是若干个试验结果组合而成的事件。

在随机事件中，每一个可能出现的结果都是随机事件，它是这个试验的最简单的随机事件，称为基本事件。其他一些随机事件可由若干个基本事件组成。例如，掷硬币的试验中，"出现正面"和"出现反面"的这个试验的基本事件；掷骰子试验中，"出现一点"、"出现两点"、……"出现六点"就是这个试验的基本事件。而"出现偶数点"也是随机事

件，它是由“出现两点”、“出现四点”和“出现六点”三个基本事件组成的。

在随机试验中，必然会出现的事件叫做必然事件，并用 U 来表示；必然不出现的事件叫做不可能事件，并用 V 来表示。必然事件 U 和不可能事件 V 是随机事件的两个特例。或称为一种特殊的随机事件。

为了研究随机事件，我们把所有可能的试验结果或者所有基本事件的全体所构成的集合，叫做基本空间或称样本空间，记作 Ω。而把基本空间 Ω 中的每一个可能出现的结果或者每一个基本事件称为一个样本点，记作 ω。

一般来说，基本空间（样本空间）Ω 可以由有限个基本事件（样本点）ω 所组成，也可以由无限个基本事件所组成，甚至是某范围内的全体实数所组成。如：

在例 1 中，令

$$\omega_1=\{\text{出现正面}\}\qquad \omega_2=\{\text{出现反面}\}$$

则

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$$

在例 2 中，任掷一次，令

$$i=\{\text{出现的点子}\}$$

则

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

在例 3 中，令

$$i=\{\text{接收到呼唤的次数}\}$$

则

$$\Omega=\{0,1,2\cdots\}$$

在例 4 中，令

$$t=\{\text{测得的水温}\}$$

则

$$\Omega=\{0,100\}$$

我们已经知道样本空间 Ω 包含了全体基本事件 ω，而随机事件不过是由某些特征的基本事件 ω 所组成，所以从集合论的观点来看，一个随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集而已。又因为 Ω 是由所有基本事件所组成，因而在任一次试验中，必然要出现 Ω 中某一基本事件 ω，记作 $\omega\in\Omega$，也就是在试验中，Ω 必然会发生。所以，必然事件 U 就是样本空间 Ω，又可用 Ω 来代表一个必然事件。相应地，空集 $\varnothing$ 可以看作是 Ω 的子集，在任一次试验中，不可能出现 $\omega\in\varnothing$。这就是说 $\varnothing$ 永远不可能发生。所以，不可能事件是空集，$\varnothing$ 又代表不可能事件 V。必然事件和不可能事件的发生与否，已经不属于“不确定性”，因而本质上它们不是随机事件。但是，为了方便起见，我们还是把它们看作随机事件，它们不过是随机事件的两个极端情形而已。

第四节　随　机　变　量

在随机现象中，有各种可能结果，我们对每一个结果都给予一个实数值，亦即用一个

实数值去代表某一种随机试验的结果，这个实数值称之为随机变量。用数字来代替试验结果的优点，实乃便于数学上的探讨。所以，只要知道了随机变量的某个数值，也就能求出它的概率，相反，知道了某个概率，也就知道了某个随机变量。

许多随机现象的结果，表现为数量。于是任何一个随机事件都可以用随机变量的各种不同的取值来表示。简单举例如下。

例 1 设一口袋中，装有依次标有 1、2、2、3、3、3 数字的 6 个球。从这口袋中任取一个球，取得球上标有的数字用一个变量 X 来表示，则 X 是随着试验结果的不同而变化，当试验结果确定后，X 的值也就相应地确定了。

例 2 从一批灯泡中任取一个，所取灯泡在指定条件下的寿命用 Y 来表示，则 Y 是随着试验结果的不同而变化，当试验结果确定后，Y 的值也就相应地确定了。

例 3 抽查 100 件产品，知道其中有 5 件是次品，现从中取 20 件，用 Z 表示取得 20 件产品中所含次品的件数，则 Z 的取值是随着抽样结果的不同而变化，当抽样结果确定后，它的取值也就相应地确定了。

以上三例中，都因各种偶然因素的影响而取不同的数值，我们把这种变量称为随机变量，用英文字母 X、Y、Z 等来表示。于是任何一个随机事件都可用随机变量的各种不同取值来表示。如若用 Z 表示抽查 100 件产品所得的次品数，那么抽查 100 件产品得 3 件次品和抽查 100 件产品得次品不超过 5 件，这两个事件就可分别用“$Z=3$”和“$Z\leqslant5$”来表示。这样，随机事件就被量化了。

由于任何一个随机事件都可用随机变量的不同取值来表示，所以只要掌握了随机变量的变化规律，也就了解了随机现象结果的整体性质。

随机事件可通过随机变量来表示。例 1 中，“取得球上标有数字 2”这一事件可用 $\{X=2\}$ 来表示；例 2 中，“灯泡寿命小于 1000 小时”这一事件可用 $\{Y<1000\}$ 来表示；例 3 中，“取得产品中次品件数不大于 3”这一事件可用 $\{Z\leqslant3\}$ 来表示。于是，对随机事件的研究就转化为对随机变量的研究。

随机变量是随着试验结果的不同而取得不同值的，试验之前是不知道它取什么值，有的也仅知道它取值的范围。因此，随机变量是随机试验结果的函数，它与普通函数是有区别的。随机变量的取值具有“不确定性”，且取这些值具有一定的概率。例如，例 1 中 $\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$ 等，都是随机事件，相应地它具有不同的概率。当然，定义域也不完全相同，因为试验结果不一定是实数，而普通的函数都是定义在实轴上的。

以上仅简单地定义一下随机变量，以后将在第二章里作进一步讨论。

第五节　概率的古典定义

在第四节里，以随机变量来量化随机事件，于是已知随机变量后，可以求出它的概率。相反，给定某个概率后，便可以求出某随机变量。那么概率是什么？我们将在本节和以下各节里进行讨论。

在特殊情况下，可以直接计算随机事件的概率，这种计算是概率的古典定义的基础。

投掷硬币，只有“出现正面”和“出现反面”两种试验结果或称两种事件。由于通常

假设硬币是“均匀”的，所以出现这两种结果的可能性是相同的；从 100 台彩电中任抽一台，共有 100 种不同的结果，只要检验员事先不带主观偏见，抽到任何一台的可能性都是相同的。

以上两例随机现象有两个共同特点：

（1）每次试验只可能出现有限种不同的结果，即有限个基本事件。

（2）由于其自然对称性，出现每个基本事件的可能性是相等的，也就是等可能的。

这是一类最为简单但却是常见的随机现象，我们称它为古典概率模型。如何来描述这类事件的可能性的大小？如 100 台彩电中有 1 台是次品，从中任抽一台，抽得次品的可能性有多大？可用“次品率”来描述这种可能性。这时，次品数 1 和全部产品 100 之比为次品率 1%。因此，对于古典概率模型，如果试验的基本事件的总数为 n，随机事件 A 所包含的基本事件数为 m，我们就用数 m/n 来描述每次试验中事件 A 出现的可能性的大小，称它为事件 A 的概率，记作 $P(A)$，则事件 A 的概率定义为

$$P(A)=m/n$$

现在我们可以叙述概率的古典定义。

定义 设试验的样本空间总共为 n 个等可能的基本事件，其中有且仅有 m 个基本事件是包含于随机事件 A 的，则随机事件 A 所包含的基本事件数 m 与基本事件的总数 n 之比值 m/n，叫做随机事件 A 的概率 $P(A)$。

第六节 概率的统计定义

先以投掷一枚均匀硬币这个随机试验为例来说明确定“出现正面”这一事件的概率的方法，将硬币投掷 n 次，观察在 n 次试验中“出现正面”的次数为 m 次。m/n 称为出现正面的概率。

历史上有些人作成千上万次掷硬币的试验，其记录如表 1-1 所示。

表 1-1 投掷硬币试验的频数及频率

实验者	投掷次数	出现正面次数 m（频数）	频率 P
德莫根(Demoken)	2048	1061	0.5181
蒲丰（Buffon）	4040	2048	0.5069
皮尔逊（K. Pearson）	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

从表 1-1 中看出，当实验次数逐渐增多时，“正面朝上”的频率越来越明显地稳定并接近于 1/2。这个数能反映出“出现正面”的可能性的大小。所以，我们将用表 1-1 中最后一行中的频率作为投掷硬币“出现正面”的概率的近似值，并认为 $P(A)$ 近似等于 1/2。

再来分析一个例子，在一个口袋里装有 4 只白球和 2 只红球，从袋中任取一球，取到白球的可能性有多大。设定 A 表示取出白球这一事件。现在作许多次试验，观察白球事件 A 的次数，并算出它出现的频率。有人曾做过达 600 次的试验，即从袋中任取一球，观察其颜色后再放回袋中，搅匀后又任取一球，观察其颜色，这样重复 600 次，得到实验数据如表 1-2。

表 1-2 白球事件的频数及频率

试验次数 n	100	200	300	400	500	600
白球事件 m	69	139	198	261	337	401
频率 m/n	0.690	0.695	0.660	0.653	0.674	0.668

从表 1-2 中可以看出，频率随着试验次数的增加而逐渐稳定于 2/3。这个数能反映

事件 A 出现的可能性的大小。这一事实不因人而异，说明在相同的条件下，无论是谁只要做大量重复试验，其频率最终总可以稳定于这个常数。

经验证明，任何随机事件 A，只要试验是在相同的条件下多次重复进行，那么事件 A 出现的频率就具有稳定性，就是说，当试验次数充分大时，事件 A 出现的频率总在 $[0, 1]$ 区间的某个确定的数字 P 附近摆动。因为频率总是介于 0 与 1 之间的一个数，这个常数 P 是客观存在的。

因此，在一个随机试验中，如果事件 A 出现的频率 m/n 随着试验次数 n 的增大呈现出稳定性，并在区间 $[0, 1]$ 上的某个常数 P 附近摆动，则 P 反映了随机事件 A 本身所蕴含的必然规律性。所以，可以用它来描述事件 A 发生的可能性的大小。也就是说，我们把频率 m/n 的稳定值 p 定义为事件 A 发生的概率，记作

$$P(A) = p$$

概率的这种定义通常称为概率的统计意义。

第七节　概率的几何定义

古典概率考虑的是有限个等可能出现的基本事件的情形；按统计概率定义求事件的概率，需作大量重复试验，虽可考虑无限基本事件，但实际上我们不可能同时进行无穷多次试验。于是，必须从另外的途径来考虑随机事件发生的概率。

下面举一个试验的全部可能结果的数目是无限的，而且各个可能结果又是具有等可能性的例子。

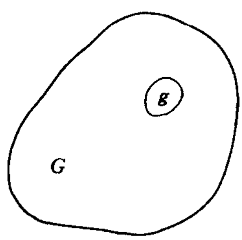


图 1-1　“等可能性”随机投点示意图

设有一平面区域 G，其中有一小区 g，如图 1-1 所示。今若向区域 G 内随机地投掷一点，试问此点落于 g 内的概率为多少？这里，被投掷的点落在区域 G 内任一点处都是等可能的，并且落在区域 G 内的任何部分内的概率只与这部分的面积成正比例，而与其位置和形状无关。于是，在区域 G 内任意投掷一点而该点落在区域 g 内的概率就可定义为

$$p = \frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$$

这样借助于几何上的度量（比如面积）来合理地规定的概率称为概率的几何定义。

此定义不仅对平面区域适用，而且也适用于直线区域和空间区域，只需将几何度量相应地改变为长度和体积。于是，概率的几何定义可更一般地叙述为：

设有一区域 G（这个区域可以是直线区域，也可以是平面区域或空间区域），向 G 内任意投掷一点，此点落于 G 内任一位置是等可能的。又域 G 内有一小区 g，则所投掷之点落于 g 中的概率为

$$p = \frac{g\text{ 的几何度量}}{G\text{ 的几何度量}}$$

这里几何度量应理解为：当域是直线域时，它表示长度；当域是平面域时，它表示面

积；当域是空间域时，它表示为体积。

由此可见，概率的几何定义实际上是概率的古典定义的推广，公式中 G 的几何度量和 g 的几何度量，分别代替了古典定义中的 n 和 m。

第八节　概率的公理化定义

概率的统计定义虽然一般而且直观，但数学上不严密，因为它所依据的是试验次数很大时频率所呈现出的稳定性这一事实。然而次数应该多大，摆动应如何理解，都没有确切地说明。要直接估计某一事件的概率也非常困难，甚至是不可能的。概率的古典定义或几何定义是在一种特殊的情况下给出的，这就是试验的所有可能结果需有限（或无限）且等可能。而实际问题往往不满足这些条件，这时就不能用古典定义或几何定义来计算概率了。因此，人们希望找到一个一般的概率模型，以便更广泛更确切地描述随机现象。

通过对随机现象的数学本质的研究和对上述古典概率模型、几何概率模型的分析，知道了概率具有一些基本性质，我们就把它作为公理，并由此得到新的更严格的定义。

定义　设 A 为随机事件，$P(A)$ 为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数且满足下列三条公理：

公理 1　对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

公理 2　对于必然事件 U，$P(U)=1$；

公理 3　对于两两互斥的可数多个随机事件 A_1、A_2、…有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

这个定义称为概率的公理化定义，可直接验证，它包含着概率的统计定义、概率的古典定义和概率的几何定义。

第九节　条　件　概　率

前所述及的事件 A 的概率 $P(A)$ 是相对于某些固定条件下事件 A 出现的概率，为简略起见，固定条件一般不提。在实际问题中往往除这些固定条件外，通常提出某些附加的限制条件，即某事件出现的前提下另一事件出现的概率。例如，从 1、2、3、4、5、6 六个数字中任取一个数，用 A 表示“得到 >2 的数”；用 B 表示“得到 $\leqslant 5$ 的数”。显然，事件 A 的概率 $P(A)=4/6$、事件 B 的概率 $P(B)=5/6$。如果考虑事件在得到的数 $\leqslant 5$ 的条件下得到 >2 的数，即在出现事件 B 的条件下出现事件 A，也即在已知数 $\leqslant 5$ 的前提下讨论的。因此，基本事件共有 5 个（“1”、“2”、“3”、“4”、“5”），在此条件下“得到 >2 的数”共包含“3”、“4”、“5”三个基本事件。所以这一事件的概率等于 3/5。

因此，事件 A 出现的概率 $P(A)$ 是相对于某些条件下事件 A 出现的概率。也就是要求在“事件 B 已经出现”的前提下事件 A 出现的概率，称这种概率为事件 B 出现的条件下，事件 A 出现的条件概率，记作 $P(A|B)$，读作在条件 B 下，事件 A 的概率。

定义　设 A、B 是两个随机事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$$

或 $$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)\qquad \{P(B)>0\}$$

类似地可得 $$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)\qquad \{P(A)>0\}$$

为事件 B（或 A）出现条件下，事件 A（或 B）出现的条件概率（或称事件 A（或 B）对于事件 B（或 A）的条件概率）。这也就是概率的乘法定理或乘法公式。

概率乘法定理 综上所述，得任两个事件 A、B 的积事件的概率 $P(A\cap B)$ 或 $P(AB)$，（读作"A 乘 B"或"A 与 B 的积"的概率），等于其中一个事件的概率与另一事件在前一事件出现的条件下的条件概率的乘积：

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B|A)\\&=P(B)P(A|B)\end{aligned}$$

这一定理不难推广到有限多个随机事件的情形，例如对于三个事件 A、B、C 有

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap C)&=P(ABC)\\&=P\{P(AB)C\}\\&=P(AB)P(C|AB)\\&=P(A)P(B|A)P(C|AB)\end{aligned}$$

同理，对于 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

第十节 全概率公式

概率论中往往希望从已知的简单事件的概率推算出未知的复杂事件的概率，为达到这个目的，经常把一个复杂事件分解成为若干个不相容的简单事件之和，再通过分别计算这些简单事件的概率，最后利用概率的可加性得到最终结果。

假设 事件 A_1、A_2、…、A_n 两两互斥，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，$P(A_i)>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则对任一事件 B 皆有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

证：因为 A_1、A_2、…、A_n 两两互斥，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，因此任一事件 B 能且只能与事件 A_1、A_2、…、A_n 之一同时出现，即

$$B=BU=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$$

由于 A_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 两两互斥，所以 BA_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 也两两互斥。于是，由概率的加法定理有

$$P(B)=P(BA_1+BA_2+\cdots+BA_n)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)$$

再由概率的乘法定理，得

$$P(BA_i)=P(A_i)P(B|A_i)\quad i=1,2,3,\cdots,n$$

可推得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

或简写为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$