经济应用数学基础二

线性代数、线性规划和概率论

《经济应用数学基础》编委会 组编
冯　泰 刘德荫 编著

XIANXINGDAISHU
XIANXINGGUIHUA
HE　GAILÜLUN

北京工业大学出版社

经济应用数学基础二

线性代数、线性规划
和概率论

《经济应用数学基础》编委会　组编
冯　泰　刘德荫　编著

北京工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数、线性规划和概率论/冯泰，刘德荫编著. 北京：北京工业大学出版社，2004.8
（经济应用数学基础；2）
ISBN 7-5639-1378-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①冯… ②刘… Ⅲ.①线性代数一高等学校：技术学校一教材②线性规划一高等学校：技术学校一教材③概率论一高等学校：技术学校一教材
Ⅳ.①O151.2②O221.1③O211

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第049549号

线性代数、线性规划和概率论

《经济应用数学基础》编委会　组编

冯　泰　刘德荫　编著

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编：100022　电话：(010) 67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷

787 mm×960 mm　16开本　17印张　243千字

印数：1～6000册

ISBN 7-5639-1378-5/G·719

定价：22.00元

《经济应用数学基础》编委会

编 者 的 话

本教材是在北京市成人院校师资数学学科研修中心校的领导组织下，按照北京市教育委员会审定的“北京市高职高专财经类专业经济应用数学基础教学大纲”的要求编写的.

在编写教材时，充分考虑到高职高专财经类数学教学的基本要求，慎重选择教材的内容，以“适度、够用”为原则，力求与本科层次同类教材有所区别. 文字叙述上，在保证科学性的前提下，注意通俗易懂，易教易学，不追求数学的严谨性.

本教材的线性代数与线性规划部分以初等行变换为主线，介绍线性代数和线性规划的基本内容，突出计算能力的培养，也适当提出一些归纳推理和逻辑思维方面的训练. 概率论部分介绍了随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数学特征，还介绍了大数定律和中心极限定律，培训学生对随机现象的理解，为今后学习数理统计打下基础.

从“学以致用”考虑，本教材注意数学在经济问题中的应用，使学生初步学会经济分析中的定量方法. 结构上以学生易接受为准，或以热点问题为实例介绍内容.

本教材每章配有习题，分为单项选择题、填空题和解答题3类，供教学时选用. 答案附在配套的辅导教材中.

为了使用者查找方便，书末附有索引，给出了教材中主要名词第一次出现的章节.

本教材内容编排如下.

第1，2章包括线性代数的基本内容. 第1章由消元法引出矩阵观念、矩阵的运算、矩阵可逆等，矩阵的初等行变换贯串全章，并介绍了行列式的知识. 第2章讲线性方程组理论和向量.

第3，4章包括线性规划问题的基本概念以及图解法和单纯形法.

第5章包括随机事件与概率、计算随机事件概率的4个公式及2个概型.

第6，7章包括随机变量及其分布、数字特征、大数定律以及中心极限定理.

线性代数和线性规划与概率论是两块独立的内容，可以分头教学，也可以齐头并进.

根据专业的类型，学时不同，我们建议以下各种方案：

档次	教学章节
第一等级，学时较少	第1章1.1～1.5节，第2章2.1节，第3章，第5章，第6章6.1～6.4节，第7章7.1～7.2节
第二等级，学时稍多	第1章1.1～1.5节；第2章2.1～2.3节；第3章；第4章4.1～4.2节；第5章；第6章6.1～6.4、6.6节；第7章7.1～7.2，7.4节
第三等级，学时较多	全部内容

本套教材可供各类高等院校经济与管理学科各专业根据其教学需要自行选用. 对于广大经济管理工作者来说，本书在充实数学知识和掌握定量分析方法上也大有裨益.

参加本书编写的有冯泰（第1～4章）、刘德荫（第5～7章）. 本书编写过程中得到北京市成人院校师资数学学科研修中心校领导和北京工业大学出版社领导的支持与关心，在此对他们表示衷心感谢. 由于作者水平和经验所限，书中难免有不当之处，敬请使用本教材的师生和其他读者，毫不保留地提出批评和建议，以期及时修正.

我们真诚地希望这本书能有助于学生更主动、更有效、更轻松地学好线性代数与线性规划和概率论这些重要公共基础课程. 希望读者及时将学习中的有关情况告诉我们，以便我们为大家及后来的读者提供更好的教学服务.

编　者

2004年3月于北京

目　　录

第1部分　线性代数、线性规划

第2部分　概率论

第 1 部 分

线性代数、线性规划

第 1 章 矩　　阵

1.1　矩阵的概念

线性代数的重要任务之一是解线性方程组，对一个线性方程组，首先必须回答它是否有解. 当有解时，讨论它有多少个解；当有多个解时，研究如何表述它的解. 而矩阵又是处理以上问题的得力工具. 在正式引进矩阵之前，先看一个例子.

1.1.1　高斯消元法

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 & \text{①} \\ -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 17 & \text{②} \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 & \text{③} \end{cases} \tag{1.1}$$

解　我们用中学的方法解这个线性方程组.

第一步：在方程组(1.1)中交换第①个方程与第③个方程的位置，得到

$$\xrightarrow{(\text{①},\text{③})} \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 & \text{①} \\ -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 17 & \text{②} \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 & \text{③} \end{cases} \tag{1.2}$$

我们将方程组(1.1)中第①个方程与第③个方程交换位置，得到方程组(1.2)，记作“→”，并用(①,③)表示方程组(1.1)两个相应方程交换位置，记在“→”的上方.

第二步：保留方程组(1.2)的第①个方程，消去第②个和第③个方程中的未知数 x_1 项，即将第①个方程的两边乘以 3 和 -2，分别加到第②个和第③个方程上，得到并记作

$$\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\cdot(-2)]{\text{②}+\text{①}\cdot 3} \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 & \text{①} \\ 23x_2 - 23x_3 = 23 & \text{②} \\ -19x_2 + 13x_3 = -1 & \text{③} \end{cases} \tag{1.3}$$

第三步：将方程组(1.3)的第②个方程两边乘以$\frac{1}{23}$，得到并记作

$$\xrightarrow{②\cdot(1/23)}\begin{cases} x_1+7x_2-5x_3=2 & ① \\ x_2-x_3=1 & ② \\ -19x_2+13x_3=-1 & ③ \end{cases} \tag{1.4}$$

第四步：保留方程组(1.4)的第①②两个方程，消去第③个方程中的未知数x_2项，即将第②个方程的两边乘以19加到第③个方程上，得到并记作

$$\xrightarrow{③+②\cdot 19}\begin{cases} x_1+7x_2-5x_3=2 & ① \\ x_2-x_3=1 & ② \\ -6x_3=18 & ③ \end{cases} \tag{1.5}$$

第五步：将方程组(1.5)的第③个方程的两边乘以$-\frac{1}{6}$，得到

$$\xrightarrow{③\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}\begin{cases} x_1+7x_2-5x_3=2 & ① \\ x_2-x_3=1 & ② \\ x_3=-3 & ③ \end{cases} \tag{1.6}$$

第六步：将方程组(1.6)的第③个方程的两边乘以1和5，分别加到第②个和第①个方程上，得到

$$\xrightarrow[①+③\cdot 5]{②+③}\begin{cases} x_1+7x_2=-13 & ① \\ x_2=-2 & ② \\ x_3=-3 & ③ \end{cases} \tag{1.7}$$

第七步：将方程组(1.7)的第②个方程乘以-7加到第①个方程上，得到

$$\xrightarrow{①+②\cdot(-7)}\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \\ x_3=-3 \end{cases} \tag{1.8}$$

在中学我们就知道，方程组(1.1)～(1.8)都是同解方程组，就是说方程组(1.8)的解就是方程组(1.1)的解，所以原方程组(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \\ x_3=-3 \end{cases}$$

我们将方程组(1.5)～(1.8)均称为阶梯形方程组. 在解题过程中，我们只对方程组做了如下运算：

(1) 交换两个方程的位置；

(2) 用一个非零常数乘某个方程的两边；

(3) 将某一个方程的倍数加到另一个方程上.

对方程组施行的这 3 种运算称为方程组的**初等变换**.

可见,经初等变换总可以将方程组化为阶梯形方程组.

纵观方程组(1.1) ~ (1.8) 的变换过程,方程组的初等变换只是对方程组中各方程的系数进行运算,完全可以将以上的变换用表格表示出来,因为未知数并未参与运算,而且它们在表中的位置始终不变,我们不再写出它们.我们将方程组(1.1) ~ (1.8) 分别记作

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -8 & 17 \\ 1 & 7 & -5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(①,③)} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & -8 & 17 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot 3}$$

对应的方程组:(1.1) (1.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 23 & -23 & 23 \\ 0 & -19 & 13 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\cdot(1/23)} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -19 & 13 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③+②\cdot 19}$$

对应的方程组:(1.3) (1.4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\cdot(-1/6)} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[①+③\cdot 5]{②+③}$$

对应的方程组:(1.5) (1.6)

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+②\cdot(-7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

对应的方程组:(1.7) (1.8)

我们将这样的表格称为矩阵.

1.1.2 矩阵概念与初等行变换

定义 1.1 设有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,排成 m 行 n 列的一张矩形阵表,记作如下形式:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵,常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},...$ 表示.矩阵(1.9) 记作

$A_{m\times n}$，即

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵中水平的数为行，竖直的数为列. 矩阵中的每个数称为矩阵的元素，第 i 行第 j 列交叉处的元素记作 a_{ij}. 元素 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 有两个下脚 标：第一个下脚标表示元素 a_{ij} 的行数，叫行标；第二个下脚标表示元素 a_{ij} 的列数，叫列标. 如 a_{34} 就是矩阵$A_{m\times n}$的第 3 行第 4 列的元素. 矩阵也可以简记作

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \text{ 或 } A_{m\times n}=[a_{ij}]$$

式(1. 9) 的第 i 行可以记作

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

第 j 列可以记作

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

当矩阵的行数与列数相等，即 $m=n$ 时，称为方阵或 n 阶矩阵或 n 阶方阵. 如

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 11 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

分别为 2 阶和 3 阶矩阵.

在 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

中，从左上角到右下角称为矩阵 A 的主对角线，其上的元素为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$；从右上角到左下角称为矩阵 A 的次(副) 对角线，其上的元素为 $a_{1n},a_{2n-1},\cdots,a_{n1}$.

如果矩阵的所有元素为 0，则称该矩阵为零矩阵，记作 $O_{m\times n}$ 或简记作 O.

如

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是 2×3 零矩阵和 3 阶零矩阵，即 $\boldsymbol{O}_{2\times 3}$，$\boldsymbol{O}_{3\times 3}$，或简记作 $\boldsymbol{O}$.

在方程组的初等变换中，对方程的 3 种变换，改为对矩阵的行的变换，就是矩阵的初等行变换.

定义 1.2　对矩阵的行施行以下 3 种运算：

(1) 交换矩阵的任意两行的位置；

(2) 用一个非零数乘以矩阵的某一行；

(3) 将矩阵任意一行的倍数加到另一行上.

称这 3 种运算为**初等行变换**.

将定义 1.2 中对行进行的变换，改为对列进行的变换，称为初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换. 矩阵的初等变换用符号"$\rightarrow$"表示，并规定：

(1) 交换矩阵的第 ⓘ 行和第 ⓙ 行的位置，记作 $\xrightarrow{(ⓘ,ⓙ)}$；

(2) 用非零数 c 乘矩阵的第 ⓘ 行，是用 c 乘第 i 行的每一个元素，记作 $\xrightarrow{(ⓘ\cdot c)}$；

(3) 矩阵的第 ⓙ 行加上第 ⓘ 行的 k 倍，或者说第 ⓘ 行的 k 倍加到第 ⓙ 行上，记作 $\xrightarrow{(ⓙ+ⓘ\cdot k)}$.

显然，用矩阵表示并求解线性方程组，比用方程组表示要简洁得多.

阶梯形方程组对应的矩阵，我们称其为阶梯形矩阵.

1.1.3　阶梯形矩阵与行简化阶梯形矩阵

定义 1.3　若矩阵满足条件：

(1) 零行(矩阵该行的元素全为 0) 在矩阵的下方；

(2) 各非零行(元素不全为 0 的行) 的首非零元(非零行的元素从左向右第一个不为 0 的元素) 的列标随着行标的递增而严格增大.

则称为**阶梯形矩阵**. 如果阶梯形矩阵还满足条件：

(3) 各非零行的首非零元都是 1；

(4) 每个首非零元为 1 的元素所在列的其余元素全为 0.

则称该阶梯形矩阵为**行简化阶梯形矩阵**.

如阶梯形方程组(1.5) ~ (1.8) 所对应的矩阵，都是阶梯形矩阵，其中最后一个矩阵是行简化阶梯形矩阵.

又例如

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 3 & 3\\0 & -9 & 6 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1 & -5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7 & 0 & 8\\0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & 10 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

等都是阶梯形矩阵，而

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -10\\0 & 2 & 1 & 9\\0 & -4 & 0 & 6\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 0 & 8\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 4\\0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

等不是阶梯形矩阵. 再如

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

是行简化阶梯形矩阵，而

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 2 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 6\\0 & 1 & 1 & 5\\0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

不是行简化阶梯形矩阵.

例 2　用初等行变换求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -2 & -4\\2 & 3 & -1 & -1 & -6\\1 & 2 & 3 & -1 & -4\\1 & 1 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

的阶梯形矩阵和行简化阶梯形矩阵.

解 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{①},\text{③})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+\text{①}\cdot(-1)]{\substack{\text{②}+\text{①}\cdot(-2) \\ \text{③}+\text{①}\cdot(-3)}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{③}+\text{②}\cdot(-7) \\ \text{④}+\text{②}\cdot(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 39 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}+\text{④}\cdot(-6)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -24 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}+\text{④}\cdot(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -24 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 51 \end{bmatrix}$$ (矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯形矩阵)

继续进行初等行变换求行简化阶梯形矩阵.

$$\text{上式} \xrightarrow{\substack{\text{③}\cdot(1/3) \\ \text{④}\cdot(1/51)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{①}+\text{④} \\ \text{②}+\text{④}\cdot(-1) \\ \text{③}+\text{④}\cdot(8)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{①}+\text{③}\cdot(-3) \\ \text{②}+\text{③}\cdot(7)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}+\text{②}\cdot(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ (矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形矩阵)

显然,一个矩阵的阶梯形矩阵是不惟一的,而行简化阶梯形矩阵是惟一的.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵相等

设 $m \times n$ 矩阵