

剛架結構之研究



剛架結構之研究

劉仁燮 編譯

中華書局出版

一九五一年十二月初版

大學用書

剛架結構之研究 (全一冊)

◎定價人民幣二萬元

編譯者 劉 仁 雙

出版者 上海河南中路二二一號 中華書局股份有限公司

印刷者 上海漢門路四七七號 中華書局上海印刷廠

發行者 三聯中華商務印書館聯合組織 中國圖書發行公司

各地分店

三聯中華商務印書館聯合組織
中國圖書發行公司
聯開商務印書館
聯明書局
聯印書局
聯書店
聯館店
聯局店
聯店

* 印翻得不 · 權作者有 *

總目編號(15563) 印數1—4,000

剛架結構之研究

目 錄

第一章 機械的作表法理論

	頁
前言.....	1
1. 基本公式之誘導.....	5
2. 載重項之準備計算.....	9
3. 未知量之選定.....	16
4. 剛構解法之假定與聯立方程式.....	17
5. 剛節點記號及部材記號之規定與標準記號.....	20
6. 機械的表示標準形及其對稱性.....	23
7. 固定腳與鉸腳標準形之差異.....	26
8. 聯立方程式之解法(消去法).....	28
9. 反復試索法.....	32
10. 直接決定未知量之假定值解法.....	37

第二章 機械的作表法及應用

1. 關於對稱性剛構之注意.....	41
2. 關於非對稱性剛構之注意.....	43
3. 關於半對稱性剛構之注意.....	44
4. 應用例解.....	50
(1) 對稱性剛構例解.....	50

	頁
(2) 非對稱性剛構例解.....	64
(3) 半對稱性剛構例解.....	75
(4) 雜例解.....	84

第三章 受任意水平載重之剛構

1. 基本公式及記號.....	105
2. 任意水平載重之例解.....	110

第四章 高架式剛構之理論與應用

1. 剛節點平衡方程式.....	116
2. 剛構全體平衡方程式.....	119
3. 平衡方程式之誘導.....	121
4. 高架式剛構之一般解法.....	131
5. 機械的作表法及應用.....	139

插頁 表 52.....	108 頁之後
--------------	---------

剛架結構之研究

第一章 機械的作表法理論

緒 論

構造材料之發達與構造樣式之進步，致使現代構造工學之理論及施工發生大變化，就中以幾筋混凝土構造物，當其受載重時，引起不靜定應力，呈極複雜之現象，研究此種應力，在先前時代，雖明知為不靜定構造，仍以近似計算法，作為靜定構造計算之，又在理論嚴正，足以闡明其問題之時，亦或以理論高遠，數學程度不夠，不能計算，或以計算費時，欲求迅速，因之亦以近似計算為滿足，此雖可以減少計算之時間，但對於構造材料之節約，毫無益處，故對於不靜定構造物，倘能求得一方法，以嚴正之理論，及程度較低之數學，解決此問題，實為技術者所急需。

本書以機械的作表法，使從來認為畏難之不靜定構造，化為極易，且能有規則的計算出來，其法以撓角撓度法 (Slope deflection method) 為基礎誘導而得，計算簡單，記憶容易。

1. 基本公式之誘導

設桁之材料彈性率為 E ，斷面慣性率為 I ，則桁之任意點對曲率 M 與其曲率半徑 ρ 之間，有如下之關係：

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

次取桁之極短長度 dx 考察之，因彎曲之結果，在中立軸上 m, m' 二點之切線所成之小角度命為 $d\varphi$ ，此角度與曲率半徑在中心所夾之

角相等,故

$$dx = \rho d\varphi, \quad (2)$$

將式(1)中 ρ 之值代入式(2),則

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dx. \quad (3)$$

桁之各點彎曲率,豫先作圖如圖1,則 Mdx 表示圖1(a)中影線

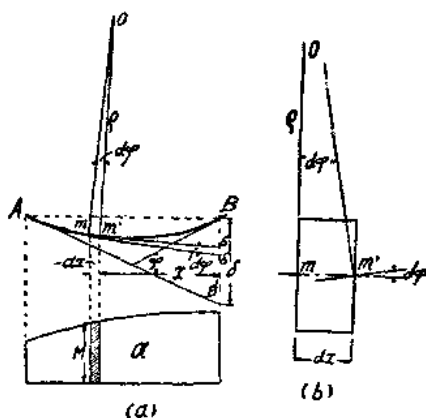


圖 1

部之小面積,故求 A, B 二點之切線所成之角度 φ , 祇須將式(3)從 A 至 B 積分之即得,故

$$\varphi = \int_A^B \frac{M}{EI} dx. \quad (4)$$

若 E, I 通全桁面積不變,則

$$\varphi = \frac{1}{EI} \int_A^B M dx. \quad (5)$$

今以 $\mathfrak{A}$ 表示自 A 點至 B 點之彎曲率面積,即

$$\mathfrak{A} = \int_A^B M dx, \quad (6)$$

則

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A}}{EI}. \quad (7)$$

m 及 m' 點之切線與通過 B 點之垂線相交點命為 b 及 b' , 則

$$bb' = x d\varphi. \quad (8)$$

A 點之切線與通過 B 點垂線相交之點命為 B' , 則

$$BB' = \int_A^B x d\varphi = \int_A^B \frac{Mx}{EI} dx. \quad (9)$$

然 Mdx 表示圖 1(a) 之影線面積素, 故 $x \cdot Mdx$ 乃係此面積素對於 B 點之靜力率。

若 AB 間彎曲率圖面積之重心至 B 點之距離命為 λ , 則

$$\int_A^B x M dx = \lambda \mathcal{M}.$$

命 $BB' = \delta$, 則對於一定值之 E, I , 為

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_A^B M x dx = \frac{\mathcal{M}}{EI} \lambda. \quad (10)$$

式(7)表示析之任意二點之切線所成角度 φ , 式(10)表示 δ , 此二式為此解法之基本公式。

設有一材 AB (圖 2), 其兩端受彎曲率與剪力, 從原位置 AB 移動至 $A'B'$, B 點對於 A 點之變位, 或與時針方向相同, 或與時針相反, A 點對於 B 點之變位亦然, 設以 d 表示此變位之大小, 則 d 稱為撓度, d 與時針同方向, 則符號為正, 與時針反方向, 則符號為負。

部材 AB 受彎曲率而引起彎曲, A 點或 B 點之切線與原位置 AB 成 φ_a 或 φ_b 之角變位, 稱之為撓角, 與時針同方向為正, 反之為負。

A 點彎曲率命為 M_{AB} , B 點彎曲率命為 M_{BA} , 與時針同方向為正, 反之為負。

圖 2 之 M_{AB} , M_{BA} , φ_a , φ_b 均與時針同方向, 惟 d 乃為反方向, $B'B'' = \delta$.

從圖, 則
$$\delta = l\varphi_a + d.$$

但 d 為負, 故可書為一般式

$$\delta = l\varphi_a - d. \quad (11)$$

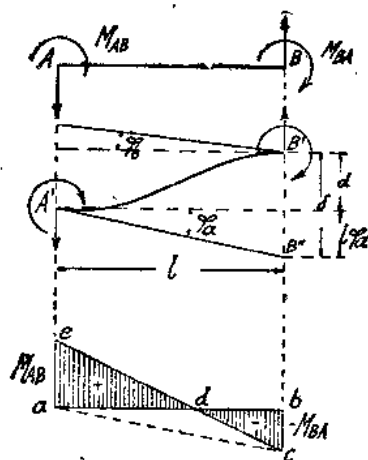


圖 2

式(11)內 d 之符號, B' 對於 A' 之變位, 與時針方向相同則為正, 相反則為負. 換言之, 式(11)為適用前述符號規定之公式.

依照式(10)與圖 2, 求得

$$\delta = \left\{ M_{AB} \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} - M_{BA} \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} \right\} \frac{1}{EI}.$$

將式(11)之 δ 代入, 並命

$$\frac{l}{I} = \xi, \quad \frac{d}{l} = \mu. \quad (12)$$

$$\text{則} \quad 2M_{AB} - M_{BA} = 6E\xi(\varphi_a - \mu). \quad (13)$$

以上係就 B 點直下之 δ 而求得之式. 同理, 就 A 點直下之 δ 計算之, 則得

$$2M_{BA} - M_{AB} = 6E\xi(\varphi_b - \mu). \quad (14)$$

若 $d=0$, 則 $\mu=0$, 從前兩式, 求得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a &= \frac{1}{6E\xi}(2M_{AB} - M_{BA}), \\ \varphi_b &= \frac{1}{6E\xi}(2M_{BA} - M_{AB}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

又從式(13)(14),求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2E\xi(2\varphi_a + \varphi_b - 3\mu), \\ M_{BA} &= 2E\xi(2\varphi_b + \varphi_a - 3\mu). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(15)稱為 Manderla 式,式(16)稱為 Mohr 式.

以上係部材中間無有載重者,倘中間有載重,將此載重所生之彎曲率圖加入考慮,則得

$$\left. \begin{aligned} 2M_{AB} - M_{BA} &= 6E\xi(\varphi_a - \mu) - \frac{6\mathfrak{M}\bar{\lambda}}{l^2}, \\ 2M_{BA} - M_{AB} &= 6E\xi(\varphi_b - \mu) + \frac{6\mathfrak{M}(l - \bar{\lambda})}{l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17) \quad (\text{參閱卷末補註})$$

上式中, $\bar{\lambda}$ 係新加入面積 $\mathfrak{M}$ 之重心至 B 點直下之距離.

由式(17),求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2E\xi(2\varphi_a + \varphi_b + \psi) - \mathfrak{M}_{AB}, \\ M_{BA} &= 2E\xi(2\varphi_b + \varphi_a + \psi) + \mathfrak{M}_{BA}, \\ \text{其中 } \mathfrak{M}_{AB} &= \frac{2\mathfrak{M}}{l^2}(3\bar{\lambda} - l), \\ \mathfrak{M}_{BA} &= \frac{2\mathfrak{M}}{l^2}(2l - 3\bar{\lambda}), \\ \psi &= -3\mu = -3\frac{d}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (18) \quad (\text{參閱卷末補註})$$

式(18)為此解法之基本公式, φ 係梁端剛節點之角變位,與時針方向相同者,規定為正,相反者為負.

吾人之主要目的,在於求 M_{AB} , M_{BA} 等之 M ,故 φ 及 ψ 係直接最初之未知量, M 乃間接最後之未知量.

2. 載重項之準備計算

上節式(18)中之 $\mathfrak{M}_{AB}$, $\mathfrak{M}_{BA}$ 須豫先計算之,方稱便利.

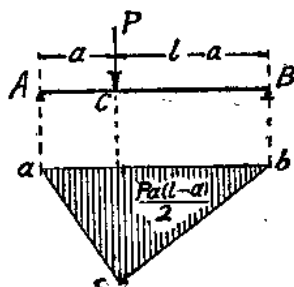


圖 3

如圖3, 實表示單桁受中間載重所生彎曲率圖全面積, 則

$$\mathfrak{M} = \frac{Pa(l-a)}{2}.$$

$\bar{\lambda}$ 係此面積重心至 B 點直下之距離, 故

$$\bar{\lambda} = \frac{2l-a}{3}.$$

以 $\mathfrak{M}$ 及 $\bar{\lambda}$ 代入式(18), 則得

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{Pa(l-a)^2}{l^2}, \quad \mathfrak{M}_{BA} = \frac{Pa^2(l-a)}{l^2}. \quad (19)$$

式(19)係對單一垂直載重而言, 至於對其他任意載重, 可以此式為基本, 用積分法求得之,

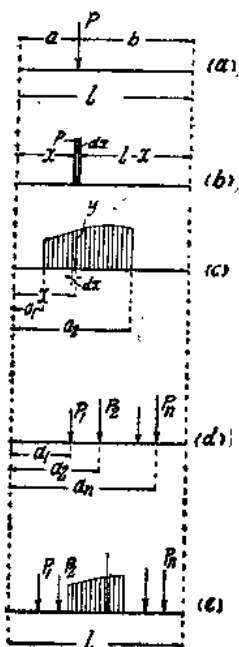


圖 4

如圖4(c)任意分布載重, 可以 $P = y dx$ 代入式(19), 則得

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{AB} &= \frac{1}{l^2} \int_{a_1}^{a_2} yx(l-x)^2 dx, \\ \mathfrak{M}_{BA} &= \frac{1}{l^2} \int_{a_1}^{a_2} yx^2(l-x) dx. \end{aligned} \right\} (20)$$

又如圖4(d)一羣之集中載重, 則得

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{AB} &= \frac{1}{l^2} \sum_{r=1}^n P_r a_r (l-a_r)^2, \\ \mathfrak{M}_{BA} &= \frac{1}{l^2} \sum_{r=1}^n P_r a_r^2 (l-a_r). \end{aligned} \right\} (21)$$

故如圖4(e)集中載重與分布載重同時作用, 則可以式(20)與式(21)累加得之。載重如係對稱, 則 $\bar{\lambda} = \frac{l}{2}$. 故

$$\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA} = \frac{\mathfrak{M}}{l}. \quad (22)$$

部材中央受單一集中載重 P , 則

$$\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA} = \frac{Pl}{8}. \quad (23)$$

如圖 5, 則

$$\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA} = \frac{Pa(l-a)}{l}. \quad (24)$$

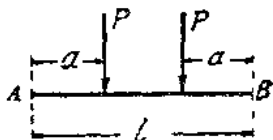


圖 5

如圖 6, 則

$$\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA} = \frac{1}{l} \int_a^b yx(l-x)dx. \quad (25)$$

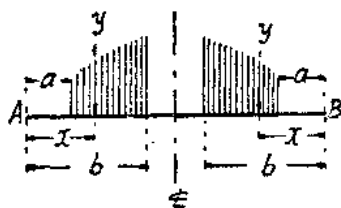


圖 6

如圖 7, 則

$$\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA} = \frac{1}{l} \sum_{r=1}^n P_r a_r (l - a_r). \quad (26)$$

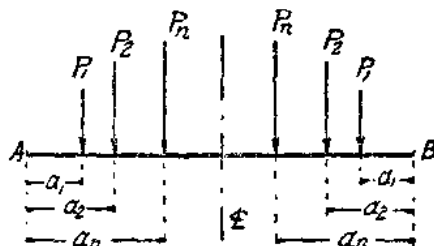
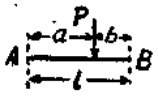
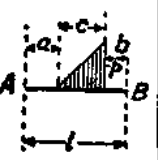


圖 7

下頁之表 1 示明對於種種載重之 $\mathfrak{M}_{AB}$ 及 $\mathfrak{M}_{BA}$ 之值, 其中

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{AB} + \frac{\mathfrak{M}_{BA}}{2} &= \mathfrak{P}_{AB}, \\ \mathfrak{M}_{BA} + \frac{\mathfrak{M}_{AB}}{2} &= \mathfrak{P}_{BA}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

表 1.

載重狀況	M_{AB}	M_{BA}
	$\frac{Pab^2}{l^3}$	$\frac{Pa^2b}{l^3}$
	$\frac{pc}{12l^3} \{ 12ab(b+c) + 6b^2c + 4c^2(a+b) + c^3 \}$	$\frac{pc}{12l^3} \{ 12ab(a+c) + 6a^2c + 4c^2(a+b) + c^3 \}$
$a=0, \frac{pc^3}{12l^3} \{ 6b^2 + 4bc + c^2 \}$	$\frac{pc^3}{12l^3} \{ 4b + c \}$	
$b=0, \frac{pc^3}{12l^3} \{ 4a + c \}$	$\frac{pc^3}{12l^3} \{ 6a^2 + 4ac + c^2 \}$	
$a=b=0, \frac{pl^2}{12}$ $c=l,$	$\frac{pl^2}{12}$	
	$\frac{pc}{60l^3} \{ 20bc(a+b) + 5c^2(a+2b) + 30ab^2 + 2c^3 \}$	$\frac{pc}{60l^3} \{ 10ac(a+c) + 15b(2a^2+c^2) + 40abc + 3c^3 \}$
$a=0, \frac{pc^3}{30l^3} \{ 10b^2 + 5bc + c^2 \}$	$\frac{pc^3}{20l^3} \{ 5b + c \}$	
$b=0, \frac{pc^3}{60l^3} \{ 5a + 2c \}$	$\frac{pc^3}{60l^3} \{ 10a(a+c) + 3c^2 \}$	
$a=b=0, \frac{pl^2}{30}$ $c=l,$	$\frac{pl^2}{20}$	
	$\frac{1}{l^3} \int_a^b yx(l-x)^2 dx$	$\frac{1}{l^3} \int_a^b yx^2(l-x) dx$
$a=0, \frac{1}{l^2} \int_0^l yx(l-x)^2 dx$ $b=l,$	$\frac{1}{l^2} \int_0^l yx^2(l-x) dx$	

$\mathfrak{P}_{AB}$	$\mathfrak{P}_{BA}$
$-\frac{Pab}{2l^2} \{a+2b\}$	$-\frac{Pah}{2l^2} \{2a+b\}$
$\frac{pc}{8l^2} \{4ab(2a+b+3c)+2c(a^2+2l^2)+4c^2(a+l)+c^3\}$	$\frac{pc}{8l^2} \{4ab(2a+b+3c)+2c(2a^2+b^2)+4c^2(a+b)+c^3\}$
$a=0, \quad \frac{pl^2}{8l^2} \{4l^2+4bc+c^2\}$	$-\frac{pl^2}{8l^2} \{2b^2+4lc+c^2\}$
$b=0, \quad \frac{pl^2}{8l^2} \{2l^2+4ac+c^2\}$	$-\frac{pl^2}{8l^2} \{4a^2+4ac+c^2\}$
$a=b=0, \quad \frac{pl^2}{8}$	$\frac{pl^2}{8}$
$\frac{pc}{120l^2} \{10ab(3a+6b+8c)+10c(a^2+4l^2)+5c^2(4a+7b)+7c^3\}$	$\frac{pc}{120l^2} \{10ab(6a+3b+10c)+20c(a^2+b^2)+5c^2(5a+8b)+8c^3\}$
$a=0, \quad \frac{pl^2}{120l^2} \{40b^2+33bc+7c^2\}$	$-\frac{pl^2}{30l^2} \{2l^2+10bc+2c^2\}$
$b=0, \quad \frac{pl^2}{120l^2} \{10a^2+20ac+7c^2\}$	$\frac{pl^2}{120l^2} \{20a^2+25ac+8c^2\}$
$a=b=0, \quad \frac{7pl^2}{120}$	$\frac{8pl^2}{120}$
$\frac{1}{2l^2} \int_a^b yx(l-x)(2l-x)dx$	$\frac{1}{2l^2} \int_a^b yx(l^2-x^2)dx$
$a=0, \quad \frac{1}{2l^2} \int_0^l yx(l-x)(2l-x)dx$	$-\frac{1}{2l^2} \int_c^l yx(l^2-x^2)dx$

表 1. (續)

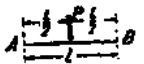
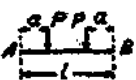
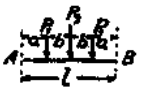
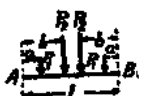
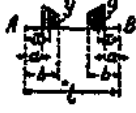
載重狀況	$M_{AB} = M_{BA}$	$\theta_{AB} = \theta_{BA}$
	$-\frac{Pl}{8}$	$-\frac{9}{16}Pl$
	$\frac{Pa(l-a)}{l}$	$\frac{3Pa(l-a)}{2l}$
	$a = \frac{l}{3}, P = \frac{2l}{9}$	$\frac{Pl}{3}$
	$\frac{(a+b)}{l^2} \{ 2P_1a(a+2b) + P_2(a+b)^2 \}$	$\frac{3(a+b)}{2l^2} \{ 2P_1a(a+2b) + P_2(a+b)^2 \}$
	$\begin{cases} a=b=\frac{l}{4} \\ P_1=P_2 \end{cases} \quad P = \frac{5l}{16}$	$-\frac{15}{32}Pl$
	$\frac{1}{l} \{ P_1a(l-a) + P_2b(l-b) \}$	$-\frac{9}{2l} \{ P_1a(l-a) + P_2b(l-b) \}$
	1) $\begin{cases} 2a=b \\ P_1=P_2 \end{cases} \quad \frac{Pa}{l} \{ 3l-5a \}$	$-\frac{3Pa}{2l} \{ 3l-5a \}$
	2) $\begin{cases} a=\frac{b}{2}=\frac{l}{6} \\ P_1=P_2 \end{cases} \quad P = \frac{2l}{5}$	$\frac{8}{6}Pl$
	$-\frac{Pc}{6l} \{ 6a(l-a) + 3bc + 4c^2 \}$	$-\frac{Pc}{4l} \{ 6a(l-a) + 3bc + 4c^2 \}$
	1) $a=0, -\frac{Pc^2}{6l} (3b+4c)$	$-\frac{Pc^2}{4l} (3b+4c)$
	2) $b=0, \frac{Pc}{3l} \{ 3a(l-a) + 2c^2 \}$	$\frac{Pc}{2l} \{ 3a(l-a) + 2c^2 \}$
	3) $a=b=c=\frac{l}{5}, P = \frac{3l^2}{750}$	$\frac{31}{500}Pl^2$
	4) $a=b=0, 2c=l, \frac{Pl^2}{12}$	$\frac{Pl^2}{8}$

表 1. (續)

載重狀況	$M_{AB} = M_{BA}$	$P_{AB} = P_{BA}$
	$\frac{wc}{12l} \{6ab + 4bc + 2ac + c^2\}$	$\frac{wc}{8l} \{6ab + 4bc + 2ac + c^2\}$
	1) $a=0, -\frac{wc^2}{12l} (4b+c)$	$-\frac{wc^2}{8l} (4b+c)$
	2) $a+c=b,$ $\frac{wc}{12l} \{6a^2 + 12ac + 5c^2\}$	$\frac{wc}{8l} \{6a^2 + 12ac + 5c^2\}$
	3) $\begin{cases} a=0, \\ b=c=\frac{l}{2}, \end{cases} \quad \frac{wl^2}{96}$	$\frac{5}{64} wl^2$
	$\frac{wc}{12l} \{6ab + 4ac + 2bc + c^2\}$	$\frac{wc}{8l} \{6ab + 4ac + 2bc + c^2\}$
	1) $a=0, -\frac{wc^2}{12l} (2b+c)$	$-\frac{wc^2}{8l} (2b+c)$
	2) $a+c=b,$ $-\frac{wc}{4l} \{2a^2 + 4ac + c^2\}$	$-\frac{3wc}{8l} \{2a^2 + 4ac + c^2\}$
	3) $\begin{cases} a=0, \\ b=c=\frac{l}{2}, \end{cases} \quad \frac{wl^2}{32}$	$-\frac{3}{64} wl^2$
	$\frac{1}{l} \int_a^b yx(l-x)dx$	$-\frac{3}{2l} \int_a^b yx(l-x)dx$
	$\begin{cases} a=0, \\ b=\frac{l}{2}, \end{cases} \quad \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} yx(l-x)dx$	$-\frac{3}{2l} \int_0^{\frac{l}{2}} yx(l-x)dx$

如上所求之 $\mathfrak{M}$ ，究係表示何意，參閱下文，即可明瞭。今於式 (18) 中，以 $\varphi_a = \varphi_b = 0$ 及 $\psi = 0$ 代入，則得

$$M_{AB} = -\mathfrak{M}_{AB}, \quad M_{BA} = \mathfrak{M}_{BA}.$$

即 $\mathfrak{M}_{AB}$ ， $\mathfrak{M}_{BA}$ 正為固定桁兩端之負彎曲率，而在架構計算中有重要應用者。

3. 未知量之選定

本書所選用 φ 及 ψ 表示不靜定未知量，其中 φ 表示各剛節點撓角之變化， ψ 所表示者，見式 (18)。

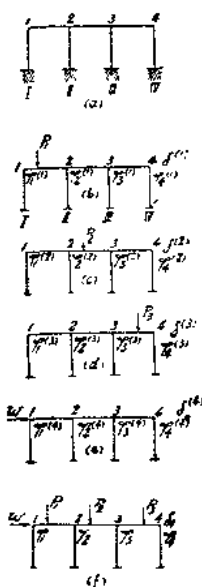


圖 8

圖 8(a) 中，部材 1—2 間任意點受載重，則接合點 1 發生水平移動 $\delta^{(1)}$ ，其他接合點 2, 3, 4 亦發生同值水平移動 $\delta^{(1)}$ ，故 $\delta^{(1)}$ 為不靜定未知量之一，而各接合點之角變位在接合點 1 為 $\varphi_1^{(1)}$ ，在接合點 2 為 $\varphi_2^{(1)}$ ，在接合點 3 為 $\varphi_3^{(1)}$ 在接合點 4 為 $\varphi_4^{(1)}$ 。

在固定腳架構與地盤連結之點，不能發生角變位，故圖 8(b) 之未知量，如上所述，應為 5 個，即 4 個角變位與 1 個水平移動。

圖 8(c) 中，部材 2—3 間任意點受載重時，與前同樣，未知量為 5 個，即 $\delta^{(2)}$ ， $\varphi_1^{(2)}$ ， $\varphi_2^{(2)}$ ， $\varphi_3^{(2)}$ ， $\varphi_4^{(2)}$ 。

圖 8(d) 中，部材 3—4 間任意點受載重時未知量為 5 個，即 $\delta^{(3)}$ ， $\varphi_1^{(3)}$ ， $\varphi_2^{(3)}$ ， $\varphi_3^{(3)}$ ， $\varphi_4^{(3)}$ 。

圖 8(e) 水平載重作用於架構之一側，則未知量為 $\delta^{(4)}$ ， $\varphi_1^{(4)}$ ， $\varphi_2^{(4)}$ ， $\varphi_3^{(4)}$ ， $\varphi_4^{(4)}$ 。此等未知量，由於架構之形狀與部材之斷面，或會發生等值者，以致未知量之個數，可能減少，但計算時，必如上述計入之。