

ZEN YANG XUE CONG SHU

第二版

高中数学 怎样学



《怎样学》丛书

鲁鹤鸣 编著

与你探讨学习方法
为你指点学习捷径
助你进入高等学府

上海科学技术文献出版社

高中数学怎样学

(第2版)

鲁鹤鸣 编著

上海科学技术文献出版社

数学怎样学
PDG

图书在版编目(CIP)数据

高中数学怎样学/鲁鹤鸣编著. —2版. —上海: 上海科学技术文献出版社, 2003. 6

ISBN 7-5439-2049-2

I. 高... II. 鲁... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第101199号

责任编辑: 忻静芬

封面设计: 何永平

高中数学怎样学

(第2版)

鲁鹤鸣 编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号 邮政编码200031)

全国新华书店经销

江苏常熟人民印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张20.5 字数569 000

2003年6月第2版 2004年8月第4次印刷

印数: 20 001—26 000

ISBN 7-5439-2049-2 / O · 138

定价: 22.00元



丛书第2版前言

三年前,这套面向高中学生的《怎样学》丛书出版.不久,它就引起教育界的关注,也受到高中学生的欢迎,短短三年中,已多次印刷.

这是因为,丛书以崭新的面貌一扫那种以习题为主的辅导类读物的老面孔,而是放下架子与学生面对面地研讨学习的方法,探寻知识的规律.高中生朋友在这套丛书中得到的不仅仅是知识,更是高于知识的“方法”和“规律”.古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷.这正是丛书的宗旨.

人类的教育、学习从本质上讲是学会生存,即学会与大自然和谐共存,学会在社会中健康生活.高中阶段是从少年向青年、成年的转型期,在学习上也面临着一个很大转变,那就是从以前的注重知识本身转到注重学习知识的方法、探寻知识的规律.摆在每个高中学生面前的,已不仅仅是“学什么”,而是“怎样学”的问题.

爱因斯坦说过这样的话:“走出校门后,把学校里学的知识全部忘记,剩下的就是教育.”爱因斯坦显然不是在否定学校教育,他还有更深一层的意思:对学生而言,有比知识更重要的东西要学.如学习前人获得知识的思想、方法和手段;学会学习、学会应用、学会创新.对一个真正有所作为的人来说,后者才是受用终生的.

这就是我们出版这套丛书的初衷.丛书出版三年来,素质教育在不断深化,教学大纲、教材、教法也在变化.趁这次修订再版,作者对丛书作了一次全面的审视,修正了部分内容,充实了不少内容.力求从一个更高的层次,把高中阶段的知识结构和技能结构呈现在同学们面前.

丛书修订后继续保持初版的风格:以学习过程中思维的逻辑流向为线索,归纳出学习、思考、理解的规律性,让同学们更容易理

解高中各学科知识框架的内在构成规律及系统性,让同学们在学习丛书过程中学到各学科发展的科学思想和方法,培养严谨而又不刻板的学习思想和方法,从而发展同学们的思考能力和想象空间。

丛书修订后还力求更加贴近学生的学习实际,既依据现行的教材与大纲,又追踪最新的教学改革思路;既加强学生的综合素质,又使学生能从容面对未来的高考。两者结合,具有很强的实践性和可操作性。

参加修订都是原作者。这些来自上海外国语大学附中、复旦大学附中、华东师范大学二附中、浙江大学附中、上海市新中高级中学等名校的特级教师和高级教师,长年辛勤耕耘在教学第一线,成就颇多,著作颇丰。他们用现身说法的形式,把最新的教学经验和体会慷慨地奉献给读者,以使同学们能紧跟教学改革最新形势,进入一个最佳的学习状态和积极的学习氛围,获得事半功倍的学习效果。这也是丛书的精华和特色之一。

从“学什么”到“怎样学”的转变,是一个艰难的过程,出版这套丛书仅是抛砖引玉或探路,是想使千千万万莘莘学子爱学习,学会学习,走向学习的成功。

上海科学技术文献出版社

2003年1月

第 2 版 前 言

怎样学好高中数学——是每位高中学生经常思考的问题。

随着教学改革的深入,学者、教师也从研究如何教深入到研究学生如何学.其实“教学”原本就是“教”与“学”两个方面,不能只研究如何教;也不能只研究如何学。

但如何学好高中数学,学好的成果要由学生反映出来.毕竟在整个教学活动过程中学生是主体;学习活动是主体的活动。

根据我国教育部公布的新教学大纲(试验修订版)、高考考纲及作者 30 余年的教学经验,再版本书想给学习者一个如何学好高中数学的启示;是研究了“教”与“学”两个方面的一些积累。

本书共有 110 个条目.代数学习方法 70 个条目;立体几何学习方法 15 个条目;解析几何学习方法 25 个条目.每个条目配有例题、说明和习题,书末附有习题参考答案。

最后还讲述了研究性学习的指导意见及它与高考的关系。

学生可以系统地学,也可以根据自身学习情况学习某些条目.帮助你学好高中数学。

学习是无止境的,就高中数学而言,知识的结构在整个数学教学中起着承上启下的作用,但就数学思想、方法而言为学生继续深造打下坚实的基础.本书想通过这些条目,让学生形成较好的数学思想与方法。

新的探索难免有不成熟的地方,望读者指正,并能在再版时更趋完善。

编 者

2002.12 于西子湖畔

目 录

第一章 数学学习的基本方法	1
一、教材说明了什么	1
二、教师教授知识的作用	2
三、基本学习方法是什么	2
第二章 代数的学习方法	4
一、理解集合概念并正确表示集合	4
二、用集合性质理解集合运算	7
三、理解“或、且、非”并掌握命题之间的关系	14
四、用集合概念及两集合的元素对应理解映射、函数	17
五、利用定义以及集合概念理解充要条件	24
习题一	30
六、用图象理解函数图象的变换	31
七、用“ f ”概念理解函数解析式	36
八、用“ f ”概念理解复合函数的定义域、值域	39
九、用基本函数性质理解复合函数性质	45
习题二	65
十、用函数图象的特征比较函数值的大小	69
十一、用定义熟悉简单指数和对数方程	73
十二、用方程变形求解复杂指数和对数方程	74
十三、用图象求解含参数的对数方程	78
十四、用一元二次函数图象讨论一元二次方程根与系数的关系	81
十五、利用基本不等式讨论一元二次方程根与系数的关系	85

十六、用图象理解方程根的个数	88
习题三	91
十七、利用向量概念、运算法则及几何意义,掌握平面图形 中线段的平行、垂直及平移等变换	94
十八、利用向量运算的典型例题解有关几何问题	98
习题四	106
十九、用非负数概念、实数运算法则、不等定义理解 不等式的性质	109
二十、用不等式性质求解整式、分式不等式	116
二十一、用典型例题理解无理不等式的解法	125
二十二、用绝对值概念理解绝对值不等式的解法	131
二十三、化同底,用函数单调性理解指数、对数不等式的 解法	135
习题五	141
二十四、用不等定义理解比较法并证明不等式	144
二十五、用不等式性质理解综合法和分析法并证明不等式	149
二十六、用分类讨论的方法理解含参数的不等式解法	157
二十七、把方程和函数等问题化归为不等式问题,理解不等 式的应用	167
习题六	171
二十八、用类比的方法理解角的扩充及弧度制	173
二十九、用定义理解三角函数概念	177
三十、用单位圆中的函数线理解函数值的大小及角的 范围	183
三十一、用五点法确定 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	187
三十二、利用基本函数图象的变化确定 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	191
三十三、利用 A 、 ω 、 φ 的特征确定 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	192

三十四、用周期概念求解三角函数的周期	198
三十五、利用三角函数值的有界性理解复合函数的值域	201
习题七	206
三十六、利用两角和的正弦、余弦公式理解倍角、半角、 和差化积、积化和差等公式	210
三十七、用角的和、差组合求三角函数值	216
三十八、用公式变形求三角函数的和、差、积、商	219
三十九、用典型例题求三角函数的和、差、积、商	223
四十、用万能公式求复角的三角函数值	227
四十一、利用三角函数理解三角形内的角、边等元素	229
四十二、利用三角函数值的有界性求复合函数的最大、最 小值	236
习题八	241
四十三、利用反三角函数的定义理解三角函数的反函数	243
四十四、利用反三角函数图象理解反三角函数的性质	247
四十五、利用最简三角方程求解三角方程	252
习题九	254
四十六、用归纳法理解数列通项公式	257
四十七、用等差数列性质理解等差数列元素之间的 关系	260
四十八、用等比数列性质理解等比数列元素之间的 关系	268
四十九、用等差、等比数列性质及数列的一般性质解 数列综合题	275
五十、用数列的递推关系式求得数列的通项公式	284
五十一、利用典型例题理解数列的求和	289
习题十	294
五十二、用数列极限的定义理解数列极限存在与否	

及求数列的极限	297
五十三、用数列极限的定义理解无穷递缩等比数列求 所有项的和	301
五十四、用数学归纳法证明的两个步骤的意义理解 数学归纳法	305
五十五、利用递推方法,用数学归纳法证明几何问题	310
习题十一	313
五十六、用复数定义及数的扩充理解复数的概念	315
五十七、用复数三角形式的特征理解化复数的三角形式	320
五十八、利用角与其终边位置“多对一”的特征理解 复数的辐角主值	326
五十九、利用复数概念理解复数代数形式及向量形式 的运算法则	330
六十、利用复数三角形式的乘、除、乘方、开方的运算 法则理解它们的几何意义	334
六十一、利用 $ Z - P $ 两点间距离概念理解复平面中的 曲线方程	339
六十二、利用方程 $z^3 = 1$ 熟悉 1 的立方根性质	343
六十三、利用复数辐角主值的取值范围及复数模的概念 理解复数运算中的最大最小值问题	346
六十四、利用两复数相等的法则及复数的开方求 解复数方程	350
六十五、利用复数中方程与轨迹、不等式与区域的对应 解复数中的综合问题	355
习题十二	364
六十六、利用加法原理、乘法原理完成一件事分类 或分步骤	367
六十七、用组合数性质理解二项式展开式的系数	374
六十八、用通项理解二项式展开式中的各项	379

六十九、利用二项式展开式的特征,理解各项的系数和 及近似计算、整除性问题等应用	382
七十、理解概率的概念并解决实际问题	384
习题十三	389
第三章 立体几何的学习方法	392
一、利用平面概念与公理正确理解平面与共面	393
二、利用异面直线所成角、距离的概念理解两异面直线 之间的关系	395
三、利用直线与平面所成角理解直线与平面的位置关系	400
四、利用两个半平面所成角理解平面与平面的位置关系	406
五、利用两异面直线上任意两点的距离公式理解平面图 形的翻折	410
六、利用典型例题理解线线、线面、面面角之间的关系	414
习题十四	416
七、利用空间向量的运算法则,理解直线的方向向量、 异面直线所成角、距离以及直线与平面的关系	420
八、利用棱柱概念理解其各元素之间关系	426
九、利用棱锥概念理解其各元素之间关系	432
十、利用棱台概念理解其各元素之间关系	440
十一、利用圆柱概念理解其各元素之间关系	448
十二、利用圆锥概念理解其各元素之间关系	450
十三、利用圆台概念理解其各元素之间关系	457
十四、利用球概念理解其各元素之间关系	462
十五、利用旋转体的轴截面理解其内接几何体问题	466
习题十五	469

第四章 解析几何的学习方法	474
一、利用确定直线的两个条件理解直线方程	475
二、利用斜率的概念理解斜率概念的多种应用	481
三、利用解析法理解直线围成的三角形问题	487
四、利用确定圆方程的条件理解圆及其性质	492
五、了解平面上圆与直线的位置关系,理解它们的解析 关系	494
六、利用充要条件理解曲线与方程的关系	499
习题十六	504
七、利用椭圆曲线定义理解椭圆方程	507
八、利用以 $ F_1 F_2 $ 为底边、顶点在椭圆上的三角形,理解 椭圆的性质	511
九、利用双曲线定义解双曲线方程	513
十、利用以 $ F_1 F_2 $ 为底边、顶点在双曲线上的三角形, 理解双曲线的性质	520
十一、利用抛物线定义解抛物线方程	524
十二、利用圆锥曲线的定义,理解椭圆、双曲线、抛物线中的 最大、最小值问题	528
十三、利用直线的参数方程理解其应用	531
十四、利用参数方程理解椭圆、双曲线、抛物线及其应用	534
十五、利用平移、对称理解曲线图象的变化	541
十六、利用韦达定理理解二次曲线的弦长问题	545
十七、利用弦的斜率与中点理解直线被二次曲线所截弦 问题	551
十八、利用弦的斜率与中点理解曲线上是否存在关于某 一直线对称的点	555
十九、用方程的 $\Delta = 0$ 理解直线与二次曲线相切	557
二十、利用弦的斜率与中点理解一些定值与定点问题	560

二十一、用曲线的定义求轨迹方程	562
二十二、用平面几何中的图形特征求轨迹方程	564
二十三、利用一元二次函数理解一定点与已知轨迹上 点的距离的最大、最小值问题	565
二十四、利用典型例题解解析几何综合题	568
二十五、用轨迹思想理解极坐标系中的直线方程、圆方程	577
习题十七	583
第五章 实施高中数学研究性学习的基本方法	588
参考答案	595

第一章 数学学习的基本方法

数学学习方法指导,是一个很久远的话题,从有学校以来,教师们做的就是这一项工作;学生们做的是在寻找适应自己的学习方法.共同的是想探索一条行之有效的学习途径.

俗话说:“教无定法”、“学无定数”.那么到底有没有“法”和“数”呢?从编者多年从事教学实践中得出的结论是:有“基本学习方法”,没有“根本学习方法”,就是说:有入门的基本学习方法,但要深入地学习,并且能有所发现,有所创造,那要随教授者、学习者综合素质的变化而定了.

但不论道路有多么曲折,“路漫漫兮,其修远”,数学学习方法的探索与数学历史的发展一样在一步步前进.人们总是在摸索中慢慢了解事物的本质,人们的认识也在慢慢地贴近事物的本来面目.

一、教材说明了什么

教材,有学校以来就有之,到现今为止.中外教材无论它如何变化,就中学数学教材而言,基本上给学生的是一个知识的结构以及这个结构的形成.有定义的给予和概念的描述;有逻辑的合理推理;有定义,概念内涵、外延的拓宽;有解决新问题要求的提出,再下定义再推理、再拓宽.

这样,数学教材揭示了两点:一是数学知识的结构;二是数学发展的历史.

就学习方法而言,教材一般很少论述,甚至不论述.

二、教师教授知识的作用

只“照本宣科”显然不是现代教师教授知识的方法,但又必须有“照本宣科”的环节.就是说要把数学知识传授给学生,但更重要的是要教会学生如何学习,如何学好数学.这是教师工作的“创造性”.或者说教学过程是教师对教材进行再创造的过程.对自学者而言,也是学习过程中的再创造过程.在教授知识、学习知识的同时更重要的是学会学习.

三、基本学习方法是什么

数学是关于模式和秩序的科学.我们在学习“模式”与“秩序”,还可以不断发现问题、创造模式、使用模式.

基本学习方法:是对数学定义、概念的深刻理解、对数学图形的熟知;进而学会逻辑的推理、数学符号的运用;最终达到掌握知识目的的一种方法.

1. 深刻理解数学定义与概念

数学的每一个分支学科都是在公理与定义下建立的一个严密体系.所以数学的定义、概念一般都是无懈可击的.理解它,应该做到“咬文嚼字”,反复推敲;并且在比较中确立.这是学习的第一步.这一点教授者和学习者往往容易忽视.

2. 数学的逻辑推理与数学符号的运用

数学问题的解答,实际上就是用定义、概念理解问题,用数学的逻辑推理,并用约定的数学符号表达出来.给人一个显而易见的结论.

3. 数形结合

数学研究的对象是“数与形”,由笛卡儿引进了直角坐标系后,使数与形联系起来了,反过来,也给学习者一个很重要的启示:用数形结合的方法来学习数学,是抽象与形象结合的学习方法.

4. 空间想象

就立体几何这门学科而言;画好图,读懂图是学习、学好立体几何的主要途径.因为弄清空间的“点、线、面、体”之间的关系,即学习者在头脑中建立“图”与实物的对应,那么立体几何的学习就入门了,就有了初步的空间想象能力.在学习立体几何时,学生不妨可花较多的时间练习实物与“图”之间的画图与读图.

5. 讨论与分类

正因为数学是一门严密性很强的学科,因此它要求我们考虑问题必须十分全面,“点水不漏”.从小学学习算术到中学的代数、几何.从具体的自然数 $0, 1, 2, 3, \dots$ 到字母 $x, y, z, \dots$ 反过来,也告诉我们必须考虑字母的适用范围,及图形的位置关系.简言之,“讨论”与“分类”是真正进入中学数学学习的必要途径.

本书想告诉读者的就是这样一种基本的高中数学的学习方法,方法的掌握是“造桥”,掌握了方法就能成功地走到掌握知识的“彼岸”.

第二章 代数的学习方法

研究关于式的运算及方程等的数学分支叫做代数学(*Algebra*).

Algebra 这个词,来源于 820 年阿拉伯数学家阿尔·花拉子模(*Alehwariزمي*)所著的代数书的标题“*Algebr w'al muquabala*”. *Algebr* 意为把负项移向另一边,*al muquabala* 意为消去两边相等的项.

其实随着数学的发展,代数学的内容在不断地扩展.我国目前高中数学设置的有:集合、简易逻辑;不等式;平面向量;数列、数学归纳法;复数;排列、组合、二项式定理;函数;三角函数等八块内容.

学习、学好代数的基本学习方法:深刻理解定义、概念;合理进行逻辑推理;正确运用数学符号.巧妙利用数形结合,严密地分类、讨论.

一、理解集合概念并正确表示集合

例 1 下列几组集合中哪些是表示相同的集合.

(1) 集合 $A = \{(3, -5)\}$, $B = \{(-5, 3)\}$;

(2) 集合 $M = \{1, -3\}$, $N = \{-3, 1\}$;

(3) 集合 $M = \emptyset$, $N = \{0\}$;

(4) 集合 $M = \{\pi\}$, $N = \{3.1415\}$;

(5) 集合 $M = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$;

(6) 集合 $M = \{\text{小数}\}$, $N = \{\text{实数}\}$;

(7) 集合 $M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $N = \{y \mid y^2 - 3y + 2 = 0\}$;