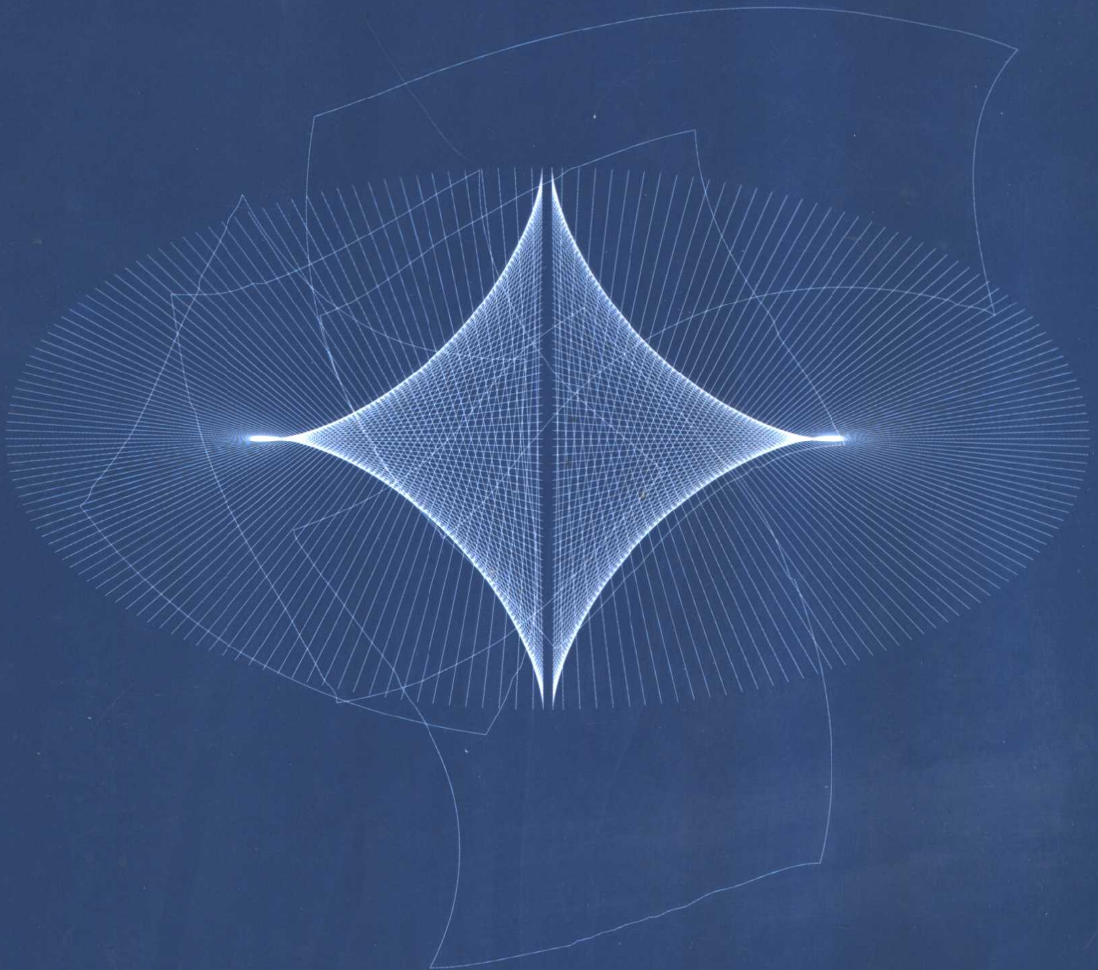
中国纺织大学出版社

李绍宽 舒慧生 编著



高等数学

GaoDeng ShuXue

上册

高　等　数　学

上　册

编著　李绍宽　舒慧生

中国纺织大学出版社

内容提要

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会指定的《高等数学课程教学基本要求》和《线性代数教学基本要求》编写的将高等数学和线性代数统一处理的工科教学用书。全书分上、下两册，上册的内容有函数与极限、導数与微分、不定积分、定积分、定积分的应用、级数、微分方程，每章节后都配置相应习题，书末附有习题答案。

本书适合工科大学师生使用，亦可供有关人员参考与自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/李绍宽，舒慧生编著．—上海：中国纺织大学出版社，2001.6

ISBN 7-81038-338-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①李…②舒…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第13719号

责任编辑　邵　静

封面设计　陶善丰

责任校对　季丽华

高等数学（上册）

李绍宽　舒慧生　编著

中国纺织大学出版社出版

（上海市延安西路1882号　邮政编码：200051）

展望照排印刷有限公司排版　上海崇明晨光印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行

开本：787×1092 1/16　印张：12.75　字数：300千

2001年6月第1版　2001年6月第1次印刷

印数：0001—5000

ISBN 7-81038-338-8/O·15

定价：20.00元

前　言

随着高等教育的发展，作为工科院校的主干基础课程高等数学、线性代数两门课程的教学时间被大大压缩，为了适应这种迅速的变化情况和进一步提高教学质量，有必要把这两门关系密切的课程实现一体化进行教学，从1997年开始我们进行了这方面的试点，但这样进行教学缺少一本合适的教材，为了适应这种情况，我们编写了这本高等教学与线性代数一体化教材。

本书分上、下两册，上册包括一元函数微积分的内容，其中包括级数与微分方程，下册包括线性代数和多元微积分的内容，各章配有习题，书末附有习题答案。

在编写本书的过程中，我们将多年教学经验反映在课本的内容之中，力求简洁、明了，在讲清概念的同时，加强对各种类型的问题分析，以帮助同学提高解决问题的能力，在下册我们力求将线性代数和多元微积分有机结合起来进行讲解。

在出版过程中，本书审稿的姜健飞同志认真地审读了全书，修正了不少错误，编辑同志也认真做了编辑工作，在此表示感谢。

由于时间限制和我们水平有限，因此教材中一定还存在不少问题和错误，希望广大读者提出批评和意见，以便今后进一步完善本书的内容。

编者

2001年2月

目　录

第一章　函数与极限

§1-1　实　　数

高等数学主要是研究实数集上的实值函数，因此实数是我们研究的基本对象。

一、实数及其性质

关于实数，我们在中学里学习后知道它有许多重要的性质：

1. 连续性　实数与数轴上的点可以建立一一对应，这是实数的连续性表示。

2. 有序性　对任意两个实数，可以比较它们的大小。即对实数 a 和 b 进行比较，在 $a > b, a = b, a < b$ 之中有且只有一个成立。

3. 代数运算封闭性　对两个实数 a,b，可以施行加、减、乘、除(除数不为 0)运算，所得的结果仍是一个实数。

4. 阿基米德原理　对 $b > a > 0$，一定存在自然数 n，$na > b$。

5. 稠密性　任意两个不同实数之间必有无限个实数，而且有理数与无理数在实数中稠密。

二、实数集

实数全体我们用 $\mathbf{R}$ 来表示。有时也用 $(-\infty, +\infty)$ 来表示实数全体。对两个实数 a，b $(a < b)$，我们用$[a,b]$表示位于 a,b 之间的实数全体，称为闭区间，即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

类似的有下面的记号：开区间，开闭区间和闭开区间

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\},$$
$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},$$
$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}。$$

一个实数集 $A \subset \mathbf{R}$ 称为有界的，指存在两个数 a,b，使

$$A \subset [a,b],$$

否则，就称 A 是一个无界集。

对 $a \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$，我们常用$O(a,\varepsilon)$表示集合 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，称它为 a 的 ε-邻域。我们称在 $x = a$ 的附近具有性质 P 是指存在 $\varepsilon > 0$，当 $x \in O(a,\varepsilon)\backslash\{a\}$ 时，性质 P 成立。对于 $\pm\infty$，我们称 $(X, +\infty)$ 为 $+\infty$ 的 X-邻域，而称 $(-\infty, -X)$ 为 $-\infty$ 的 X-邻域，而且把 $(-\infty, -X) \cup (X, +\infty)$ 称为 ∞ 的 X-邻域。而在 $\pm\infty$ 有性质 P 指存在 $\pm\infty$ 的 X

-邻域，在这个邻域上，性质 P 成立。

三、绝对值与不等式

1. 绝对值的意义 a,b 是两个实数，$|a-b|$ 表示 a 到 b 的距离，称为 $(a-b)$ 的绝对值，显然

$$|a-b|=\begin{cases}a-b & a\geqslant b\\ b-a & a<b\end{cases}。$$

关于绝对值有下面重要的不等式

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant |a-b|\leqslant |a|+|b|。$$

2. 平均不等式 在初等数学中知道，对 n 个正实数 $a_1,\cdots,a_n$，$\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 称为它们的算术平均，$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ 称为它们的几何平均，而 $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$ 称为它们的调和平均，关于这三个平均有下面重要的平均不等式

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}},$$

且等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

3. 不等式的解法 解不等式是高等数学中的重要运算。解不等式的主要依据是乘除法的符号法则。另外，显然 $(x-a)$ 在 $x>a$ 时为正，而 $x<a$ 时为负，相反 $(b-x)$ 在 $x>b$ 时为负，而 $x<b$ 时为正。

例 1 解不等式 $x^3-3x^2+2x<0$。

解 由于 $$f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2),$$
从而 $f(x)$ 的符号在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$ 上分别为 $-$，$+$，$-$，$+$，即

$f(x)$ 的符号：

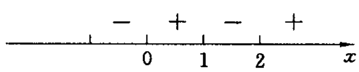


图 1-1

因此，不等式的解为 $$x<0\quad 或\quad 1<x<2。$$

例 2 解不等式 $\dfrac{2x}{x^2-3}<1$。

解 原不等式变形为 $$\frac{2x-x^2+3}{x^2-3}<0,$$

而 $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^2-3}=\dfrac{-(x-3)(x+1)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}$，因此有

$f(x)$ 的符号：

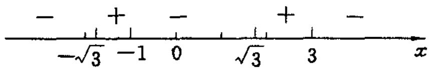


图 1-2

从而不等式的解为

$$x<-\sqrt{3}, \quad 或 \quad -1<x<\sqrt{3}, \quad 或 \quad x>3。$$

四、线性方程组与行列式

从中学学习知道,对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{*}$$

的求解方法是消元法,消元法有加减消元法和代入法。对方程组用加减消元法可得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1,$$

从而当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时,有 $$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

同样有 $$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}。$$

如果我们引入记号 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

称之为二阶行列式,那么方程组的解可写为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}。$$

习惯上,称 $$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为方程组(*)的系数行列式,而记

$$\boldsymbol{D}_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

此时(*)的解可记为 $$x=\frac{\boldsymbol{D}_x}{\boldsymbol{D}}, \qquad y=\frac{\boldsymbol{D}_y}{\boldsymbol{D}}。$$

对于三元一次方程组 $$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{**}$$

如果我们规定三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2,$$

并记

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

则当系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$ 时,方程组(* *)的解为

$$x = \frac{\boldsymbol{D}_x}{\boldsymbol{D}}, \qquad y = \frac{\boldsymbol{D}_y}{\boldsymbol{D}}, \qquad z = \frac{\boldsymbol{D}_z}{\boldsymbol{D}}。$$

例 3 用行列式解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$。

解 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5,$

$$\boldsymbol{D}_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5,$$

$$\boldsymbol{D}_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

从而 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$。

例 4 用行列式解方程组 $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ z + x = 5 \end{cases}$。

解 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2,$

$$\boldsymbol{D}_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 - 4 = 4,$$

$$\boldsymbol{D}_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 5 = 2,$$

$$\boldsymbol{D}_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 + 5 - 3 = 6, \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}。$$

习题 1-1

1. 证明：
$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2},$$
$$\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}。$$

2. $1<x<2$，求 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$ 的值。

3. 解下列不等式：

(1) $x^3>x$；　　(2) $|x-1|+|x-3|\leqslant 6$；

(3) $\dfrac{x^2}{x+2}<1$；　　(4) $\dfrac{x+2}{x^2}>1$。

4. $x>0$，求 $y=x+\dfrac{1}{x^2}$ 的最小值。

5. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+y=7\\2x-3y=1\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}2x+y-z=2\\x+y+2z=3\\x-2y+z=1\end{cases}$。

§1-2 数列与数列的极限

数列是按自然数编了次序的一串数 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，其中 a_n 称为这个数列的通项。或者说，数列是一个以自然数集 N 作为定义域的函数。数列的极限就是研究随着 n 增加，a_n 本身的变化趋势。

一、数列的极限

数列 a_n 的极限表示当 n 增加时，a_n 的变化趋势，例如

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \cdots,\quad \frac{1}{n},\quad \cdots$$

当 n 增加时在向 0 接近，我们称这个数列 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 的极限等于 0，记为 $\lim\ \dfrac{1}{n}=0$ $\left(\text{或简记为}\dfrac{1}{n}\to 0\right)$。同样，$a_n=\dfrac{n}{n+1}$，即

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \cdots,\quad \frac{n}{n+1},\quad \cdots$$

当 n 增加时 a_n 在向 1 接近，因此　　$\lim \dfrac{n}{n+1}=1$。

这里，当 n 增加时，a_n 接近一个常数 A，也就是任意给定一个小的正数 ε，总能找到一个自然数 N，从 $N+1$ 项开始，所有 a_n 与 A 的误差 $|a_n-A|$ 都小于 ε，即 $\lim a_n=A$ 可表述为：
对任意 $\varepsilon>0$，都存在 N，当 $n>N$ 时，

$$|a_n - A| < \varepsilon。$$

由上述定义知道 $\lim a_n = A$ 表示当 n 很大时，$a_n \approx A$，且误差可以任意小。而 $\lim a_n = A$ 的几何意义可表述为：以 A 为中心的任何 ε-邻域 $O(A,\varepsilon)$，包含 a_n 几乎所有的点(只有有限个点可能不属于 $O(A,\varepsilon)$)。

下面举例用极限的定义证明极限等式。

例 1 证明 $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$。

证 对 $\varepsilon > 0$ (分析：欲使 $\left|\dfrac{1}{n^k} - 0\right| = \dfrac{1}{n^k} < \varepsilon$,

只要
$$n^k > \frac{1}{\varepsilon},$$

即取 $n > \dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}$。)

取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}\right]$(这里$[a]$表示不超过 a 的最大整数)，则当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon,$$

所以
$$\lim \frac{1}{n^k} = 0。$$

例 2 证明 $\lim \dfrac{n^2 - 1}{2n^2 - n + 1} = \dfrac{1}{2}$。

证 对 $\varepsilon > 0$ (分析：由

$$\left|\frac{n^2 - 1}{2n^2 - n + 1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n - 3}{2(2n^2 - n + 1)}\right| = \left|\frac{2n^2 - 7n + 3}{2(2n^2 - n + 1)(2n - 1)}\right| < \frac{1}{2(2n - 1)} < \varepsilon,$$

知只要取 $n > \dfrac{1}{4\varepsilon} + \dfrac{1}{2}$。)

取 $N = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon} + \dfrac{1}{2}\right]$，则当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{n^2 - 1}{2n^2 - n + 1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

所以
$$\lim \frac{n^2 - 1}{2n^2 - n + 1} = \frac{1}{2}。$$

例 3 证明 $\lim \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 1)$。

证 记 $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha$，则

$$a = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \cdots + \alpha^n > 1 + n\alpha。$$

对 $\varepsilon > 0$ (分析：由 $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \dfrac{a - 1}{n} < \varepsilon$,

知只要取 $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$。)

取 $N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n > N$ 时,

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1。$$

二、数列极限的性质

这里讨论数列极限的一些基本性质。

性质 1(唯一性) 若数列 a_n 有极限,则极限只有一个。

证 若 a_n 有 $\lim a_n = A$,又假设有 $\lim a_n = B$,而 $A \neq B$。

取 $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2} > 0$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad |a_n - B| < \varepsilon,$$

这导出

$$|A - B| \leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon = |A - B|$$

的矛盾,从而只有 $A = B$。

性质 2(有界性) 若数列 a_n 有极限,则 a_n 必有界。

证 不妨设 $\lim a_n = A$,取 $\varepsilon = 1$,存在 N,$n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1,$$

从而有

$$|a_n| \leqslant 1 + |A|,$$

这样取 $M = \max(|a_1|, \cdots, |a_N|, 1 + |A|)$,则对一切 a_n 成立 $|a_n| \leqslant M$,即 $\{a_n\}$ 为有界。

性质 3(保号性) 若 $\lim a_n = A > 0$,则存在 N,$n > N$ 时,成立 $a_n > 0$。

证 取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$,由 $\lim a_n = A$,知存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \frac{A}{2},$$

从而 $0 < \frac{A}{2} < a_n < \frac{3A}{2}$。

性质 4(单调性) 若 $a_n \leqslant b_n$,$\lim a_n = A$,$\lim b_n = B$,则 $A \leqslant B$。

证 若 $A > B$,取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$,由 $\lim a_n = A$,$\lim b_n = B$,知存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad |b_n - B| < \varepsilon,$$

从而有

$$b_n < \frac{A+B}{2} < a_n,$$

这与 $a_n \leqslant b_n$ 矛盾。

性质 5(局部性) 若存在 N_1,当 $n > N_1$ 时,$a_n = b_n$,而且有 $\lim a_n = A$,则 $\lim b_n = A$。

证 对 $\varepsilon > 0$,由 $\lim a_n = A$,知存在 N_2,当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，$b_n = a_n$，从而

$$|b_n - A| < \varepsilon,$$

即有 $\lim b_n = A$。

以上这些性质反映了 $\lim a_n = A$ 所表示的与 a_n 随 n 增加的最终变化趋势有关的一些基本事实。

下面讨论一些极限的运算法则，它向我们提供了求极限的方法。

1. 四则运算法则

若 $\lim a_n = A, \lim b_n = B$，则

$$\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)。$$

证 对 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而
$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon,$$

即 $\lim (a_n + b_n) = A + B$。

若 $\lim b_n = B \neq 0$，不妨设 $B > 0$，存在 N_1，$n > N_1$ 时，

$$b_n > \frac{B}{2} > 0,$$

所以
$$\frac{1}{b_n} < \frac{2}{B},$$

这样，$\forall\, \varepsilon > 0$，存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon B^2}{2(|A| + B)}, \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon B^2}{2(|A| + B)},$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$，当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leqslant \frac{2|a_nB - b_nA|}{B^2} = \frac{2|B(a_n - A) + A(B - b_n)|}{B^2} \leqslant$$

$$\frac{2[B|a_n - A| + |A||B - b_n|]}{B^2} < \varepsilon,$$

从而 $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$。

其余的类似可证。

可利用上述法则与一些常见的公式，如 $\lim \dfrac{1}{n} = 0, \lim r^n = 0\ (|r| < 1)$，求某些数列的极限。

例 4 求极限 $\lim \dfrac{4n^2-5n+2}{n^2+2n+3}$。

解 原式 $=\lim \dfrac{4-\dfrac{5}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=\dfrac{4}{1}=4$。

例 5 求极限 $\lim \dfrac{3^{n+1}+2^n+1}{3^n+2^{n+1}+1}$。

解 原式 $=\lim \dfrac{3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{3}{1}=3$。

2. 两边夹法则

若 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n (n \geqslant N_1)$，且 $\lim a_n=\lim c_n=A$，则 $\lim b_n$ 存在，且 $\lim b_n=A$。

证 对 $\varepsilon>0$，由 $\lim a_n=\lim c_n=A$，知存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，

$$|a_n-A|<\varepsilon,\qquad |c_n-A|<\varepsilon,$$

取 $N=\max(N_1,N_2)$，则 $n>N$ 时，还有

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

从而有
$$|b_n-A|<\varepsilon,$$

即有 $\lim b_n=A$。

这个法则经常用于比较复杂的数列的极限计算。

例 6 求极限 $\lim \left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$。

解 由于
$$\frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2+1},$$

而
$$\lim \frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2+n}=\frac{1}{2},\qquad \lim \frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2+1}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim \left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}。$$

我们把满足 $\lim a_n=0$ 的数列 $\{a_n\}$ 称为无穷小数列，由两边夹法则可推出：

若 $\{a_n\}$ 为无穷小数列，$\{b_n\}$ 为有界数列，则 $\{a_nb_n\}$ 也是无穷小数列。

事实上，若 $|b_n| \leqslant M$，则

$$-M|a_n| \leqslant a_nb_n \leqslant M|a_n|,$$

而 $\lim M|a_n|=\lim(-M|a_n|)=0$，因此 $\lim a_nb_n=0$。

3. 单调准则

若 a_n 是一个单调有界数列，则 $\lim a_n$ 一定存在。

这是实数连续性的极限形式。它是用来证明数列极限存在的重要方法。

在银行利率的计算方法中，有一种称之为连续复利的方法。它是不断地由本金产生的利息转化为本金来计算利率的方法。设银行 T 年的利率为 100%，这样存 100 元，经过 T 年，可得本息为 200 元 $= 100$ 元 $\times (1+1)$。若存 $\frac{T}{2}$ 年时，利率为 50%，这样到 $\frac{T}{2}$ 年再转存 $\frac{T}{2}$ 年，到 T 年时，可得本息为 225 元 $= 100$ 元 $\times \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$，这多出的 25 元是前 $\frac{T}{2}$ 年的利息到后 $\frac{T}{2}$ 年得到的利息。若要不断把利息转化为本金来计算，可得本息为

$$\lim 100 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

这里就要求极限 $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。从以上分析，若记 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，则 a_n 是单调上升的。又记 $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，则 b_n 是单调下降的。事实上，根据平均不等式，我们有

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

$$\frac{1}{b_n} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1} \cdot 1 \leqslant \left(\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{b_{n+1}},$$

即 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调上升，$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调下降。又 $a_n < b_n < b_1 < 4$，从而 $\lim a_n$ 存在。我们把这个极限记为 e，同时 $\lim b_n = \mathrm{e}$，即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow \mathrm{e}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow \mathrm{e}。$$

下面我们再看一个用单调准则来解决极限问题的例子。

例 7 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$，证明 $\lim a_n$ 存在，并求出这极限。

证 $a_2 - a_1 > 0$，设 $a_n - a_{n-1} > 0$，则

$$a_{n+1} - a_n = \left(1+\frac{a_n}{1+a_n}\right) - \left(1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\right) = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} > 0,$$

从而 a_n 是单调上升的。

而 $1 < a_{n+1} < 2$，知极限 $\lim a_n$ 存在。设 $\lim a_n = A$，则由 $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$ 导出

$$A = 1 + \frac{A}{1+A},$$

从而
$$A^2 - A - 1 = 0, \quad A = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

即
$$\lim a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}。$$

4*. 柯西准则

数列$\{a_n\}$有极限的充要条件是对$\varepsilon > 0$，存在N，当$n > m > N$时，成立

$$|a_n - a_m| < \varepsilon。$$

人们把满足准则条件的数列称为柯西数列。必要性的证明是容易的，充分性的证明超过了课程的要求，柯西准则反映了实数的完备性。

柯西准则是证明一个数列收敛的重要方法。

例 8 证明 $\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 存在。

证 对$\varepsilon > 0$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n > m > N$时，

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{(-1)^{n-m}}{n}\right| < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

从而$\lim a_n$存在。

习题 1-2

1. 看出下列极限：

(1) $\lim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$； (2) $\lim \frac{n}{n+1}$； (3) $\lim \arctan n$； (4) $\lim \frac{\sin n}{n}$。

2. 用定义证明下列极限：

(1) $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$； (2) $\lim \frac{n^2}{n^2+n} = 1$；

(3) $\lim \frac{n}{2^n} = 0$； (4)* $\lim \sqrt[n]{n} = 1$。

3. 若$\lim a_n = A$，证明$\lim a_{n+2} = A$。

4. 若$\lim a_n = A$，证明$\lim |a_n| = |A|$。反之成立吗？若不成立，举一个反例。

5. 若$\lim a_{2n} = A$，$\lim a_{2n+1} = A$，证明$\lim a_n = A$。

6. 求下列极限：

(1) $\lim \frac{6n^3+5n+2}{n^3+2n^2+3}$； (2) $\lim \frac{n+2}{n^2+1}$；

(3) $\lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

(4) $\lim \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$；

(5) $\lim \frac{5^{n+1}+4^{n+1}}{5^n-4^n}$； (6) $\lim \frac{\cos n}{n}$；

(7) $\lim \frac{n+\sin n}{n-\sin n}$； (8) $\lim (\sqrt{n^2+1}-n)$；

(9) $\lim \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；(10) $\lim (1+q+q^2+\cdots+q^n)$ ($|q|<1$)。