石 鑑 編 著

三角函數表的用法

机械工業出版社

親愛的讀者：

当您讀完这本書後，請尽量地指出本書內容、設計和校对上的錯誤和缺點，以及对我社有關出版工作的意見和要求，以幫助我們改進工作。來信請寄北京东交民巷二十七号本社收（將信封左上角剪開，註明郵資總付字樣，不必貼郵票），並請詳告您的通訊地址和工作職務，以便經常联系。　　機械工業出版社

No. 0894

1955年8月第一版　1956年5月第一版第三次印刷

850×1168 1/50　字數38千字　印張1 14/25　插頁2　17,001—37,000册

机械工業出版社（北京东交民巷27号）出版

机械工業出版社印刷廠印刷　新華書店發行

北京市書刊出版業營業許可証出字第008号

統一書号 15033·23

定價(8)0.47元

目　次

一 直角三角形角和边的關係

1 直角和銳角 請你按照圖1这樣用圓規在一張紙上畫出一個圓來，这個圓的半徑是 r，它的圓心是 O。然後，你再通过这個圓的圓心 O 畫出互相垂直的兩根直線 XX' 和 YY'。这樣，这兩根直線 XX' 和 YY' 就把这個圓劃分成了四個相等的部分。

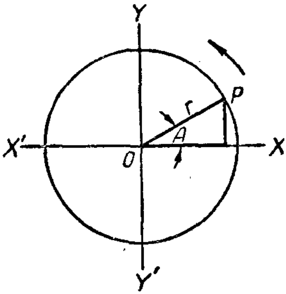

圖 1

我們再假定这個半徑是会移動的。在这個半徑移動的時候，它的一头是固定在圓心 O 上不動的，另一头 P 是搭在这個圓的圓周上，並且沿着这個圓周向箭头的方向移動的。如果这個圓的半徑最初是和 OX 这一段横線相重疊的，隨後，它的另一头 P 会慢慢地向箭头方向移動起來，这時候，半徑 r 和这根 OX 線之間就会出現一個角 A 來了。这個半徑 r 移動得越遠，所成的这個角 A 也就越大。最後，当

这個半徑 r 移動到和那根豎線 OY 相重叠的時候，这個角 A 也就成爲「直角」了。所以有時候我們說，OX 和 OY 之間所成的角，也就是「直角」。OX 和 OY 这兩根線是互相垂直的，所以凡是兩根互相垂直的線所夾成的角，我們就把它叫做「直角」。

什麽樣的角才叫做「銳角」呢？这就是說，凡是比直角小些的角，我們都把它叫做「銳角」。

2 量角的大小 上面已經把直角和銳角的意義搞清楚了。从上面这個解釋裏，我們可以知道，凡是直角一定比任何大小的銳角都大些。这裏發生了这樣一個問題：旣然凡是比直角小些的角都叫銳角，那麽各种大小不同的銳角就非常多了；可是大的銳角比小的銳角究竟大多少呢？相反的，小些的銳角又比大些的銳角小多少呢？或者說，用什麽办法來表示一個銳角的大小呢？

我們量一個工件的長短可以用尺，工廠裏所用的尺是公尺，而且工廠裏量一個工件的長短是以公尺、公分、公厘等作爲長度的單位的。角旣有大小，我們也可以確定一個很小的角來作爲角的單位。量角的大小所用的角的單位就是「度」「分」「秒」。

把一個直角劃分成相等的 90 個小角，这樣的一個小角，我們把它叫做一個度，所以一個直角就有 90 個度。在

習慣上，我們常把 90 個度就直接地叫做「90度」。有了这麽一种小角度作單位，我們当然就知道一個「45度」的銳角就比一個「30度」的銳角要大些，一個「30度」的銳角又比一個「25度」的銳角大些，而且也能体会出它們之間的大小相差多少。

但是，在我們測量一個精密零件的時候，常常感覺到僅僅用度來作單位还不够。比如說有这麽一個角，它比42度大些，但是又比 43 度要小些，或者說它的大小恰恰是在 42 度和 43 度之間，那我們又用什麽办法更精確地來表示出这個角的大小呢？这時候我們的办法就是把一個「度」这樣的小角再細分成 60 個相等的很小的角。这樣很小的角我們就把它叫做「分」。比如剛剛說过的那個角，我們可以說它是「45 度 30 分」，或者說它是「45 度 50 分」等等；这樣，我們又可以知道「45 度 30 分」是比「45 度50分」要小些，而且也能体会出前者究竟比後者小多少。

可是有時候我們所製造的零件是非常精確的。比如說，有一個精密零件的角度比 45度 30 分要大些，而又比 45 度 31 分要小些。那麽究竟比 45 度 30 分大多少，又比 45 度 31 分小多少呢？或者說我們怎麽來表示出这個高度精密的角度呢？这樣我們又不得不把这個很小的角度「分」再劃分下去，把「分」再劃分成 60 個更小的角。这個

更小的角也有一個名称，叫做「秒」。比如剛剛說过的那個角，我們可以說它的大小是「45 度 30 分 27 秒」，或者是「45 度 30 分 50 秒」，等等。

總結上面所說的關於角的大小的表示方法，我們就知道：一個直角有 90 度，1 度有 60 分，1 分有 60 秒。或者說，一個直角是 90 度，一共是 540(90×60)分，或者 32400(90×60×60)秒。

爲了書寫時候的方便，在數学裏，我們總是把角的大小單位「度」「分」「秒」，用「°」「′」「″」三种符号來代替。比如說，剛才所講的那個角是「45 度 30 分 27 秒」，我們總是把它簡單地寫成「45°30′27″」。如果一個角度寫成「27°42′30″」，那麼我們就知道这個角的大小是「27度 42 分 30 秒」了。

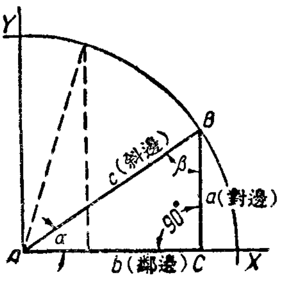

圖 2

3 角和边的關係 不管是一個什麼樣形狀的三角形，它都有三個「边」。这三個边兩個兩個所夾的角，都叫做「內角」。比如圖 2 ABC 这個三角形，它的三個边就是 AB、BC 和 AC。AB和 AC 所夾的角是一個內角，叫做內角 α。AB 和 BC 所夾的角也

是一個內角，叫做內角β。BC和AC也夾成一個內角，这個內角剛剛好是90°。

凡是一個三角形，如果它的三個內角之中有一個內角是90°，这樣的三角形我們總是把它叫做一個「直角三角形」。在这一本書上所学習的，都指的是一個直角三角形來說的。

就一個直角三角形來說(比如圖2这個ABC直角三角形)，我們在習慣上總是把直角对面的那個边的長度，叫做这個直角三角形的「斜边」的長度，並且常常用字母「c」來表示。如果就α角來說，那麼在α角对面的那個边的長度，我們總是把它叫做这個直角三角形的「对边」的長度，而且常常用字母「a」來表示。再就α角來說，在α角相鄰的那個边的長度，我們總是把它叫做「鄰边」的長度，而且總是用字母「b」來表示。

請大家再看圖2。圖2裏所畫的这個直角三角形的斜边c，也就是这個圓的半徑r。如果这個圓的大小不變，或者說这個圓的半徑大小不会變(也就是这個直角三角形的斜边長度不變)，而且这個三角形的对边a永遠是从B點引下來垂直於鄰边b，只是α角的大小在變的話，那麼，大家就可以想像得到，α角變得越大，对边a也就變得越長，鄰边b也就變得越短。相反地，当α角逐漸變小

的時候，对边 a 也就逐漸變得越短，而鄰边 b 反而逐漸變得越長了。

在一种特殊的情况下，当 α 角小到等於 0° 的時候，斜边 c 就和 AX 線重疊起來，这時候这個三角形的对边 a 的長度就会等於 0，而鄰边 b 就和斜边 c 一樣長了。要是 α 角逐漸變大，大到等於 90°，也就是說大到斜边 c 和 AY 線相重疊的時候，这時对边 a 的長度就和斜边 c 一樣長，而鄰边 b 的長度就等於 0 了。

从上面所說的这些情况來看，我們就能明確：一個直角三角形，在斜边長度不變、直角不變、对边永遠垂直於鄰边的條件下，而只有 α 角的大小在變化的時候，α 角越大，对边 a 越長，而鄰边 b 越短；相反地，α 角越小，对边 a 越短，而鄰边 b 就会越長。

二　什麼是正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割

1 比和比例　我們在算術裏已經把比和比例学过了。在算術裏告訴我們說，要比較兩個量（或者說要比較兩個數），可以把这兩個量相除，看其中一個量是另一個量的幾倍，或者是幾分之幾。这樣用除法所表示出來的这

兩個量的關係，我們就把它叫做「比」。由这兩個量相除所得的商，就是这兩個量的比的「比值」。

比如，要求得15公厘和5公厘的比(或者說15和5兩個數的比)，就可以把15公厘用5公厘來除，而所得的商3，就是15公厘和5公厘这兩個量的比的比值。又比如說要求12和6兩個數的比，用6去除12，所得的商2，就是12和6这兩個數的比的比值。

15和5的比，我們可以把它寫成$\frac{15}{5}$，也可以把它寫成$15\div5$，还可以把它寫成「15:5」。「:」就是表示「比」的一种符号。

假如現在有这樣的兩個比，一個是15:5，一個是12:4，因爲这兩個比的比值都是3，所以我們說这樣的兩個比是相等的，这兩個比的四個數(15、5、12、4)就構成了一個「比例」。它們可以寫成：

$$\frac{15}{5}=\frac{12}{4},$$

或者 $$15\div5=12\div4,$$

或者 $$15:5=12:4;$$

讀起來就是15比5等於12比4。

2 三角形三個边的比 現在，我們再回头看一看一個直角三角形三個边的比。請看圖3。这是一個三角形ABC，有一個內角α，它的斜边長度是c，α角的对边長

度是 a，α 角的鄰边長度是 b。我們可以按照算術裏所講的比，把这個三角形斜边長度 c、α 角的对边長度 a、α 角鄰边長度 b，兩個兩個地寫出它們的比。

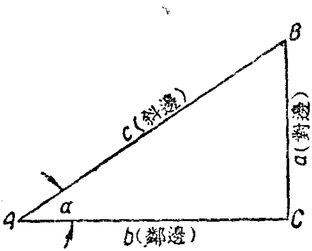

圖 3

首先，我們可以把斜边 c 做分母，把 α 角的对边 a 和 α 角的鄰边 b 分别做分子，得出这樣的兩個分數，也就是它們的比：

$$\frac{\alpha\text{ 角的对边}}{\text{斜　　边}}\text{和}\frac{\alpha\text{ 角的鄰边}}{\text{斜　　边}},$$

或者
$$\frac{a}{c}\text{ 和 }\frac{b}{c}\text{。}$$

其次，我們再把 α 角的对边和 α 角的鄰边分别做分子和分母，又得出这樣的兩個分數，也就是它們的比：

$$\frac{\alpha\text{ 角的对边}}{\alpha\text{ 角的鄰边}}\text{和}\frac{\alpha\text{ 角的鄰边}}{\alpha\text{ 角的对边}},$$

或者
$$\frac{a}{b}\text{ 和 }\frac{b}{a}\text{。}$$

再次，我們还可以把斜边 c 做分子，把 α 角的鄰边和 α 角的对边分别做分母，再得出这樣的兩個分數，也就是它們的比：

$$\frac{\text{斜　　边}}{\alpha\text{ 角的鄰边}}\text{和}\frac{\text{斜　　边}}{\alpha\text{ 角的对边}},$$

或者 $\frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$。

这樣，我們就可以从这個三角形的三個边的長度，得出了以下这六個分數，也就是六個比：

$$\frac{\alpha\text{ 角的对边}}{\text{斜　边}},\quad \frac{\alpha\text{ 角的鄰边}}{\text{斜　边}},\quad \frac{\alpha\text{ 角的对边}}{\alpha\text{ 角的鄰边}},$$

$$\frac{\alpha\text{ 角的鄰边}}{\alpha\text{ 角的对边}},\quad \frac{\text{斜　边}}{\alpha\text{ 角的鄰边}},\quad \frac{\text{斜　边}}{\alpha\text{ 角的对边}};$$

或者是 $\frac{a}{c}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{b}$，$\frac{c}{a}$。

3 正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割 上面所說的这樣一個直角三角形的三個边長所組成的六個分數，或者說是六個比，在〔三角学〕裏都分別有它們各自的名称，也就是，$\frac{a}{c}$叫做 α 角的正弦、$\frac{b}{c}$叫做 α 角的餘弦、$\frac{a}{b}$叫做 α 角的正切、$\frac{b}{a}$叫做 α 角的餘切、$\frac{c}{b}$叫做 α 角的正割、$\frac{c}{a}$叫做 α 角的餘割。

爲了書寫和演算時候的方便，在三角学裏，總是把

α 角的正弦	寫成	$\sin\alpha$；
α 角的餘弦	寫成	$\cos\alpha$；
α 角的正切	寫成	$\operatorname{tg}\alpha$；
α 角的餘切	寫成	$\operatorname{ctg}\alpha$；
α 角的正割	寫成	$\operatorname{sc}\alpha$；

α 角的餘割　　寫成　　csc α。

还有，这裏所説的「α 角的正弦」「α 角的餘弦」「α 角的正切」……，我們也常常簡單地把它們叫做「正弦」「餘弦」「正切」……。

綜合上面所説的，我們就可以得出这樣一些概念，就是：

$$正弦（\alpha 角的正弦）=\sin\alpha=\frac{a}{c};$$

$$餘弦（\alpha 角的餘弦）=\cos\alpha=\frac{b}{c};$$

$$正切（\alpha 角的正切）=\mathrm{tg}\ \alpha=\frac{a}{b};$$

$$餘切（\alpha 角的餘切）=\mathrm{ctg}\ \alpha=\frac{b}{a};$$

$$正割（\alpha 角的正割）=\mathrm{sc}\ \alpha=\frac{c}{b};$$

$$餘割（\alpha 角的餘割）=\csc\alpha=\frac{c}{a};$$

4 用線段説明六個比的比值　爲了使大家对 sin α、cos α、tg α、ctg α、sc α、csc α 等的概念更明確些，这裏我們再从一個單位圓內的直角三角形來加以研究。

請大家先看圖 4。在这個圖裏有一個圓弧，这段圓弧是以 AB（也就是 c）这一段直線長度做半徑所畫出來的一個圓的一段圓弧。現在，假定 AB 这一段直線的長度是

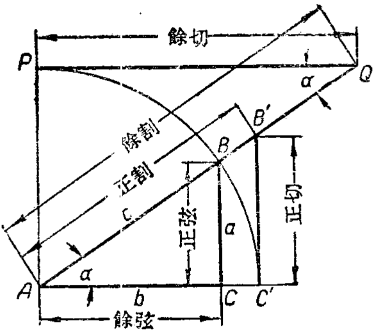

圖 4

1的話，那麽，用1这一長度做半徑所畫出來的圓，我們就把这個圓叫做單位圓。在这個單位圓裏畫出了一個直角三角形，它的三個边是 a, b, c，而且 c 边等於1。这樣就 α 角來說：

sin α（讀做 α 角的正弦）$=\frac{a}{c}$。因爲 c 是半徑而且等於1，所以，$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{a}{1}=a$。这裏的 a 就是指圖4中的 BC 这一段線的長度，也就是說，sin α 的值是 a。

cos α（讀做 α 角的餘弦）$=\frac{b}{c}$。因爲 c 是半徑，而且等於1，所以，$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{b}{1}=b$。这裏的 b 就是指圖4中的 AC 这一段線的長度，也就是說，cos α 的值是 b。

tg α（讀做 α 角的正切）$=\frac{a}{b}$。在幾何学裏告訴我們，兩個相似的三角形，它們兩兩对应的边的比是相等的。

在圖 4 裏，三角形 ABC 和三角形 $AB'C'$ 是兩個相似的三角形，它們对应的兩個边的比，也就是 BC 比 AC 和 $B'C'$ 比 AC' 是相等的。所以，$BC:AC=B'C':AC'$，或者說，$\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}=\frac{B'C'}{AC'}$。那麼我們就可以知道，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}$。同時因爲这裏的 AC' 正好是这個單位圓的半徑，正好等於 1，所以 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B'C'}{1}=B'C'$。这就是說，$\operatorname{tg}\alpha$ 的值等於 $B'C'$。

$\operatorname{ctg}\alpha$（讀做 α 角的餘切）$=\frac{b}{a}$。就圖 4 來看，三角形 ABC 和三角形 QAP 是兩個相似的三角形。这樣，$\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{QP}{AP}$，因爲 AP 正好是这個圓的半徑，正好等於 1，所以 $\frac{b}{a}=\frac{QP}{AP}=\frac{QP}{1}=QP$。这就是說，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值等於 QP。

$\operatorname{sc}\alpha$（讀做 α 角的正割）$=\frac{c}{b}$。因爲三角形 ABC 和三角形 $AB'C'$ 是兩個相似三角形，所以 $\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$。这裏的 AC' 正好等於半徑，正好等於 1，所以 $\frac{c}{b}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB'}{1}=AB'$。这就是說，$\operatorname{sc}\alpha$ 的值等於 AB'。

$\operatorname{csc}\alpha$（讀做 α 角的餘割）$=\frac{c}{a}$。前面講过，三角形

ABC 和三角形 QAP 是兩個相似三角形。这就說明了 $\frac{c}{a}=\frac{AB}{BC}=\frac{QA}{AP}$。因爲 AP 正好是半徑，正好等於 1，所以 $\frac{c}{a}=\frac{QA}{AP}=\frac{QA}{1}=QA$。这就是說，$\csc\alpha$ 的值等於 QA。

根據以上所說的情況，並且对照圖 4 來看，就能够使我們对於正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的含義得到了更多的認識。也就是說，它們的值，可以用圖 4 上的各個線段的長短表示出來了。

这裏我們还必須注意，α 角的大小不是永遠固定的：它可能是很小，小到等於 0°；它也可以變大，大到等於 90°。当它从 0° 慢慢變大，大到等於 90°，或者从 90° 慢慢變小，小到等於 0° 的時候，那麼，所有正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的長短，也都隨着 α 角的變大或變小而也隨着變化它們的長短。

三　三角函數的意義

1 函數的意義　在研究數学的時候，我們常常把數量和數量之間的關係加以考察。比如在一定距離的路程上，有一輛汽車从这一段路程的这一头開往那一头，这時候这輛汽車的速度和汽車行程所花的時間之間就有着一

定的關係。汽車从这一头開到那一头所花的時間越短，这一輛汽車的速度一定越快。相反地，如果所花的時間越多，就說明这一輛汽車的速度很慢。在我們研究这個問題的時候，我們可以說，汽車行程所花的時間是一個變數，它的速度是因時間的變化而也隨着變化的。在數学裏，我們就把時間这個變數叫做「自變數」，把速度这個變數叫做「因變數」或「函數」。相反地，我們也可以說，汽車在行程上的速度是一個「自變數」，而它所花的時間叫做「因變數」或「函數」。

比如我們用手鑽來鑽孔，如果我們的手所施的压力越大，那麼鑽头鑽進工件的速度也就越快。这時候我們也可以說手施的压力是一個「自變數」，而鑽头鑽進工件的速度就是一個「因變數」或「函數」。

又比如，一個車工在切削工件的時候，主軸旋轉得越快，切削下來的切屑也就越多。因此，我們也可以說，車床主軸旋轉得快慢是一個「自變數」，而切下的切屑的多少是一個「因變數」或「函數」。

現在，我們再回想一下在解釋圖 4 各個線段比值時候的情况吧。在解釋圖 4 的時候曾經說过，圖 4 上面所表示出來的那些正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割各個線段長度的變化是隨着 α 角的大小變化而變化的。因此，α