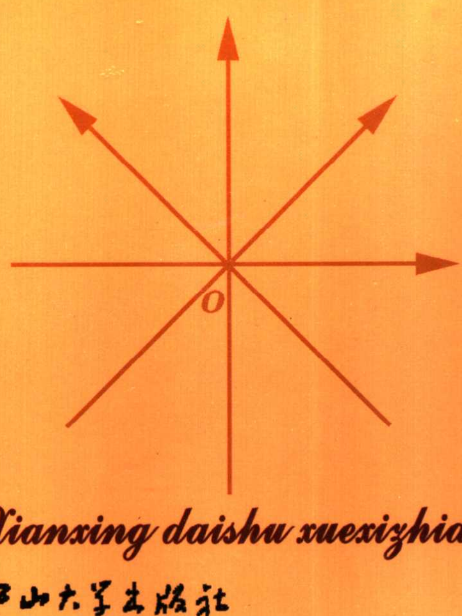
大学数学学习指导丛书

线性代数

学习指导与习题解析

张学元 主编



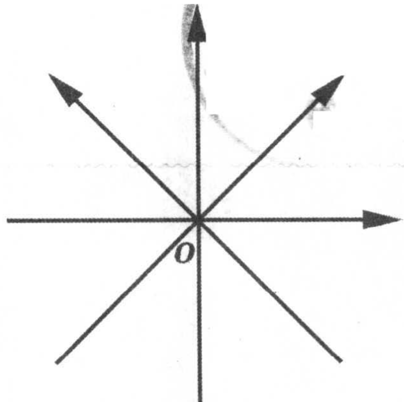
Xianxing daishu xuexizhidao yu xitijiexi

中山大学出版社

大学数学学习指导丛书

线性代数
学习指导与习题解析

张学元　主编



Xianxingdaishu xuexizhidao yu xitijiexi

中山大学出版社
·广　州·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题解析/张学元主编．—广州：中山大学出版社，2004.8
(大学数学学习指导丛书)
ISBN 7－306－02309－8
Ⅰ．线… Ⅱ．张… Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046623 号

选题策划：曾纪川
责任编辑：李 文 李立鹏
封面设计：朱霭华
责任校对：李春梅
责任技编：黄少伟
出版发行：中山大学出版社
编辑部电话(020)84111996，84113349
发行部电话(020)84111998，84111160
地 址：广州市新港西路 135 号
邮 编：510275 传真：(020)84036565
印 刷 者：江门市新教彩印有限公司
经 销 者：广东新华发行集团
规 格：787mm×1092mm 1/16 16.75 印张 422 千字
版次印次：2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
定 价：28.00 元

内容简介

本书是与高等工科院校现行《线性代数》教材紧密配套的辅导教材. 为方便读者使用，采用专题与教材相匹配的编写方式，每节的开头先归纳解题时要用到的基本理论和结果，然而精选范例给出分析解答；每章的后两节展示了历届理工类、经济类的该章的考研试题，并给出解答，旨在从整体上提高学生的综合运用能力与应试思维、应试能力.

本书可供普通高等工科院校学生在学习线性代数课程时同步使用，也可作为报考理工、经济、农林等类硕士研究生考前强化复习资料. 对于高等工科院校的数学教师，本书也是一本有收藏价值的教学参考书.

前　言

线性代数是高等工科院校数学学科的一门重要基础课，在全国硕士学位研究生入学考试中，也被指定为全国统考科目．为了帮助正在学习线性代数及报考硕士研究生的广大读者提高学习效率和应试能力，我们根据国家教育部制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》编写了本书．

本书的主要特点有：

1．侧重于基础知识（概念、定理、体系）和方法的归纳．我们采用专题与教材章节相匹配的编写方式，每节开始都归纳出解题所用到的基本理论和基本方法，并强调一些解题技巧．

2．突出解题思路分析．我们在每一节中都精选了具有启发性、典型性和针对性的范例，通过对这些范例的分析和解答，为引导读者运用必备的知识去独立解题提供了思维的钥匙，培养读者的综合、分析和应试能力．

3．展示历届考研试题．为了检测读者的学习水平和应试能力，我们在每章的最后两节分别展示出历届理工类、经济类的考研试题，并附有解答．

本书考虑了不同层次的需要，选题具有一定的难度，因此本书适用于各层次大学（理工、师范、财经、农林等）的本、专科学生学习《线性代数》时同步使用，同时也可作为报考工学、经济、农林等类硕士研究生考前强化训练的复习资料．

由于编者水平有限，错误在所难免，敬请读者批评指正．

目　录

第一章　行列式的计算 …………………………………………………………… (1)
1.1　排列逆序数的计算方法……………………………………………………… (1)
1.2　利用定义计算行列式的方法………………………………………………… (3)
1.3　行列式化为三角形行列式的计算法………………………………………… (6)
1.4　行列式的按行(列)展开法…………………………………………………… (14)
1.5　行列式的其他计算方法……………………………………………………… (20)
1.6　两类行列式证明题的证法…………………………………………………… (28)
1.7　克莱姆法则的应用…………………………………………………………… (31)
1.8　历届理工类、经济类考研试题及解答 ……………………………………… (39)

第二章　矩阵 ………………………………………………………………………… (43)
2.1　进行矩阵运算应注意些什么? ……………………………………………… (43)
2.2　抽象矩阵可逆的判定及其逆矩阵的表示法………………………………… (48)
2.3　数字矩阵可逆的判定及其逆矩阵的求法…………………………………… (50)
2.4　简单矩阵方程的解法………………………………………………………… (55)
2.5　抽象方阵的行列式的计算法………………………………………………… (60)
2.6　分块矩阵的乘法与求逆法…………………………………………………… (63)
2.7　矩阵的秩的求法……………………………………………………………… (72)
2.8　历届理工类考研试题及解答………………………………………………… (76)
2.9　历届经济类考研试题及解答………………………………………………… (83)

第三章　向量组的线性相关性 ……………………………………………………… (92)
3.1　概念性命题…………………………………………………………………… (92)
3.2　判定向量组的线性相关性的基本方法之一:视察法 ……………………… (96)
3.3　判定向量组的线性相关性的基本方法之二:齐次线性方程组解的情况的判定法……………………………………………………………… (98)
3.4　判定向量能否由向量组线性表出的方法:非齐次线性方程组解的情况的判定法 ……………………………………………………………… (104)
3.5　极大线性无关组的求法 ……………………………………………………… (108)
3.6　向量组和矩阵的秩的证题分析 ……………………………………………… (113)
3.7　历届理工类考研试题及解答 ………………………………………………… (117)
3.8　历届经济类考研试题及解答 ………………………………………………… (123)

第四章　线性方程组…………………………………………………………………… (129)
4.1　线性方程组解的判定 ………………………………………………………… (129)
4.2　线性方程组的解法 …………………………………………………………… (135)
4.3　含参数的线性方程组的解法 ………………………………………………… (140)

4.4 解向量和基础解系的证法 …………………………………………………… (147)
4.5 历届理工类考研试题及解答 ……………………………………………… (152)
4.6 历届经济类考研试题及解答 ……………………………………………… (157)

第五章 方阵的特征值和特征向量 …………………………………………… (168)
5.1 概念性命题 ………………………………………………………………… (168)
5.2 特征值和特征向量的求法 ………………………………………………… (172)
5.3 用方阵 A 的特征值计算 $|A|$ 及讨论 $\lambda E-A$ 的可逆性 ……………………… (178)
5.4 方阵可对角化的条件及其方法 …………………………………………… (181)
5.5 实对称方阵的对角化方法 ………………………………………………… (188)
5.6 已知矩阵 A 的特征值与特征向量,反求矩阵 A 的方法 ………………… (194)
5.7 对称矩阵的证法 …………………………………………………………… (200)
5.8 历届理工类考研试题及解答 ……………………………………………… (202)
5.9 历届经济类考研试题及解答 ……………………………………………… (206)

第六章 二次型 ……………………………………………………………… (214)
6.1 二次型的矩阵表示 ………………………………………………………… (214)
6.2 化二次型为标准形的方法之一:配方法 …………………………………… (217)
6.3 化二次型为标准形的方法之二:正交变换法 ……………………………… (223)
6.4 实二次型的规范形 ………………………………………………………… (228)
6.5 正定二次型和正定矩阵的判定方法 ……………………………………… (233)
6.6 历届理工类考研试题及解答 ……………………………………………… (241)
6.7 历届经济类考研试题及解答 ……………………………………………… (243)

附录 2002—2004 **年研究生入学考试线性代数试题与解答** ………………… (247)

第一章　行列式的计算

1.1　排列逆序数的计算方法

一、计算排列逆序数的常用方法

求一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，常用下面两种方法：

(1) 分别算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码个数之和，就是逐一算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个元素的逆序数，这 n 个元素与逆序数之总和即为所求 n 元排列的逆序数.

(2) 从左边起，分别算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之和，即为所求排列的逆序数.

二、确定排列奇偶性的常用方法

(1) 先求所给排列的逆序数，如果逆序数是偶数，则此排列是一个偶排列；如果逆序数是奇数，则此排列是一个奇排列.

(2) 将所给排列进行对换，该所给排列进行 k 次对换变成自然顺序排列，因为每对换一次就改变一次排列的奇偶性，而自然顺序排列的逆序数为零，所以原来排列的奇偶性与对换次数 k 的奇偶性相同.

1.1.1　计算下列各排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性：

1) 43521；　2) 217986534.

解法 1　1) 分别算出排在 1,2,3,4,5 前面比它大的数码个数之和，即分别算出 1,2,3,4,5 这 5 个元素的逆序数.

1 的前面比 1 大的数有四个(4,3,5,2)，故逆序数为 4；

2 的前面比 2 大的数有三个(4,3,5)，故逆序数为 3；

3 的前面比 3 大的数有一个(4)，故逆序数为 1；

4 排在首位，故逆序数为 0；

5 的前面没有比 5 大的数，故逆序数为 0.

于是排列的逆序数为

$$\tau(43521) = 4 + 3 + 1 + 0 + 0 = 8$$

故排列 43521 为偶排列.

2) 分别算出排在 $1,2,\cdots,8,9$ 前面比它大的数码个数之总和，即分别算出 $1,2,3,4,\cdots,8,9$ 这 9 个元素的逆序数.

1 的前面比 1 大的数有一个(2)，故逆序数为 1；

2 排在首位，故逆序数为 0；

3 的前面比 3 大的数有五个(7,9,8,6,5)，故逆序数为 5；

4 的前面比 4 大的数有五个(7,9,8,6,5)，故逆序数为 5；

5 的前面比 5 大的数有四个(7,9,8,6),故逆序数为 4;

6 的前面比 6 大的数有三个(7,9,8),故逆序数为 3;

7 的前面没有比 7 大的数,故逆序数为 0.

8 的前面比 8 大的数有一个(9),故逆序数为 1;

9 是最大数,故逆序数为 0.

于是排列的逆序数为

$$\tau(217986534) = 1 + 0 + 5 + 5 + 4 + 3 + 0 + 1 + 0 = 19$$

故所给排列为奇排列.

解法 2 从左边起,分别算出排列中每个元素前面比它大的数码的个数之和,即算出排列中每个元素的逆序数.

可在排列的每个元素的下边写上该元素所产生的逆序数,然后将它们相加即得排列的逆序数.

1) 43521

排列	4	3	5	2	1
逆序数	0	1	0	3	4

$$\tau(43521) = 0 + 1 + 0 + 3 + 4 = 8$$

故所给排列为偶排列.

2) 217986534

排列	2	1	7	9	8	6	5	3	4
逆序数	0	1	0	0	1	3	4	5	5

$$\tau(217986534) = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 3 + 4 + 5 + 5 = 19$$

故此排列为奇排列.

1.1.2 计算下列各排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

1) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$;

2) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$.

解 从左边起,分别算出排列中每个元素的逆序数,然后将它们相加即得.

1)

排列	$2k$	1	$2k-1$	2	$2k-2$	3	$2k-3$	$\cdots$	$k-1$	$k+1$	k
逆序数	0	1	1	2	2	3	3	$\cdots$	$k-1$	$k-1$	k

故逆序数为

$$\tau = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k$$

$$= \frac{1}{2}[2(1 + k - 1)(k-1)] + k = k^2$$

于是所给排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

2)

排列	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	2	1	n
逆序数	0	1	2	$\cdots$	$n-3$	$n-2$	0

逆序数为

$$\tau = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) + 0 = \frac{1}{2}[1 + (n-2)](n-2)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

当 $n = 4k$ 时，$\tau = (4k-1)(2k-1)$，故为奇排列；
当 $n = 4k+1$ 时，$\tau = 2k(4k-1)$，故为偶排列；
当 $n = 4k+2$ 时，$\tau = 2k(4k+1)$，故为偶排列；
当 $n = 4k+3$ 时，$\tau = 2k(2k+1)(4k+1)$，故为奇排列.

1.1.3 确定下列排列的奇偶性：

1) 315462； 2) 523146879.

分析 本题不要求计算排列的逆序数，而只要求讨论排列的奇偶性，故可以利用对换求解.

解 1) $315462 \xrightarrow{(6,2)} 315426 \xrightarrow{(5,2)} 312456 \xrightarrow{(3,2)} 213456 \xrightarrow{(2,1)} 123456$

共对换 4 次，所给排列成自然顺序排列，故为偶排列.

2) $523146879 \xrightarrow{(5,1)} 12354879 \xrightarrow{(5,4)} 123456879 \xrightarrow{(8,7)} 123456789$

共对换 3 次变成了自然顺序排列，故所给排列为奇排列.

注 记号 (i,j) 表示数 i 与数 j 对换. 对换的方式不是惟一的，但所作对换数的奇偶性不变.

1.1.4 选择 i 与 j 使排列 $1i25j4869$ 成为：1) 奇排列；2) 偶排列.

解 $1i25j4869$ 是 9 元排列，其中 i 与 j 可取的数有两种：$i = 3, j = 7$ 或 $i = 7, j = 3$. 考虑前者，有

$$132574869 \xrightarrow{(3,2)} 123574869 \xrightarrow{(5,4)}$$
$$1234754869 \xrightarrow{(5,7)} 123457869 \xrightarrow{(7,6)}$$
$$123456879 \xrightarrow{(8,7)} 123456789$$

共对换 5 次，故当 $i = 3, j = 7$ 时，9 元排列为奇排列. 考虑后者，可进行一次对换使 $i = 7, j = 3$，这样的 9 元排列一定是偶排列.

1.1.5 证明：在全部 n 元排列中，奇排列和偶排列的个数相等.

证 在由 $1,2,\cdots,n(n>1)$ 这 n 个数组的全部 n 元排列（共有 $n!$ 个）中，有一个排列 $p_1p_2\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$，就必然有一个排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 与之对应（注意，这里其他元素未动，只是 p_s 与 p_t 作了一次对换），若其中一个为偶排列，则另一个必是奇排列，反之亦然. 这样在全部 n 元排列中，两两配对，必然奇偶排列的个数相等，且各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

1.2 利用定义计算行列式的方法

对于含 0 元素较多的行列式可用定义计算，因为 n 阶行列式的值是位于不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，在行列式的项中有一个元素为 0 时，该项的值为 0，故只需求所有非零项即可. 为此 n 阶行列式 $|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的一般项

$$\pm\, a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

可知，只需求出非零元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的列下标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

为求出非零项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的列下标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 p_1 可能取的数码；再依次由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $p_2,p_3,\cdots,p_n$ 可能取的数码，在所有可能取的数码中，求出 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的所有 n 元排列. 然后对所有这样的 n 元排列 $p_1,p_2\cdots,p_n$ 求和即得行列式的值.

1.2.1 一个 n 阶行列式中等于 0 的元素的个数如果比 n^2-n 多，则此行列式的值等于 0. 为什么？

解 根据行列式定义，行列式的一般项都是 n 个元素的连乘积. 而 n 阶行列式共有 n^2 个元素，若等于 0 的元素个数大于 n^2-n，那么不等于 0 的元素个数就小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每一项至少含有一个 0 元素，所以每项都等于 0，故此行列式的值等于 0.

1.2.2 用行列式定义计算下列 n 阶行列式：

$$1)\quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};\quad 2)\quad D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 1) D_1 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,n-1}=1$，故 p_1 只能取 $n-1$，即 $p_1=n-1$. 同理 $p_2=n-2,p_3=n-3,\cdots,p_{n-1}=1,p_n=n$. 这样的 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 只能组成一个 n 元排列 $(n-1)(n-2)\cdots1$，故 D_1 只有一个非零项，即

$$(-1)^\tau a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}=(-1)^\tau 1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)n=(-1)^\tau n!$$

其中 τ 为列下标排列 $(n-1)(n-2)\cdots21n$ 的逆序数：

$$\tau=0+1+2+\cdots+(n-1)+(n-2)+0=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

故
$$D_1=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

2) 同法可求 D_2 中除去等于 0 的项外，非零项只有一项，即

$$(-1)^\tau a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^\tau 1\cdot2\cdots(n-1)n=(-1)^\tau n!$$

其中 τ 为列下标排列 $23\cdots(n-1)n!$ 的逆序数：

$$\tau=0+0+\cdots+0+(n-1)=n-1$$

故
$$D_2=(-1)^{n-1}n!.$$

1.2.3 用行列式定义计算下列 5 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}\quad (a_{ij}\neq 0)$$

解 由 D 中的第 1 行和第 2 行的非零元素分别得到 p_1,p_2 的可能取的数码，有

$$p_1=1,2,3,4,5;\quad p_2=1,2,3,4,5$$

其余三行各有两个非零元素，故 p_3,p_4,p_5 的可能取的数码为

$$p_3=4,5\quad p_4=4,5\quad p_5=4,5$$

因为 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 在上述可能取的数码中，一个 5 元排列也不能组成，即 D 中没有非零元

素，故 $D=0$.

1.2.4 用定义计算下列 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 D 中第 1 行的非零元素为 a_{1n}，故 $p_1=n$，同理可求得

$$p_2=n-1,n;\quad \cdots;p_n=1,2,\cdots,n.$$

下面求 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 在上述可能取的数码中，所能组成的 n 元排列.

因为 $p_1=n$，故 p_2 只能取 $p_2=n-1$；从而 p_3 只能取 $p_3=n-2$；$\cdots$；p_n 只能取 $p_n=1$. 即 $p_1p_2\cdots p_n$ 只能组成一个 n 元排列 $n(n-1)\cdots21$，于是 D 的非零项只有一项，即

$$(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

其中 τ 为列标排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

$$\tau=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故
$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

1.2.5 用定义计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解 因为 D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{11}=x,a_{12}=y$，故 p_1 可取的数码为 1,2，即 $p_1=1,2$；同理，

$$p_2=2,3;\cdots;p_{n-1}=n-1,n;p_n=1,n$$

下面求 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 在上述可能取的数码中所能组成的 n 元排列.

当 $p_1=1$ 时，若 $p_2=3$，则 $p_3=4,\cdots,p_{n-1}=n,p_n=1$，这时不能组成 n 元排列，故当 $p_1=1$ 时，只能 $p_2=2$，从而 $p_3=3,\cdots,p_n=n$. 它们组成自然顺序排列 $123\cdots n$，对应 D 中的一个非零项：

$$(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=(-1)^0x\cdot x\cdots x=x^n$$

当 $p_1=2$ 时，$p_2=3$，从而 $p_3=4,\cdots,p_{n-1}=n,p_n=1$. 它们组成一个 n 元排列 $23\cdots(n-1)n1$，对应 D 中另一非零项：

$$(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}y^n$$

D 的非零项只有上述两项，故

$$D=x^n+(-1)^{n-1}y^n$$

1.2.6 在 6 阶行列式 $|a_{ij}|_{6\times6}$ 中，下列两项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 各应带什么符号？

解 将这两项改写成行列式的一般项形式. 由于乘法有交换律，故可调换项中的元素，使

每项所对应的行标为自然顺序排列，即把所给的两项改写成

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}, \quad a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}.$$

这两项前面的符号由其列标排列的逆序数决定，而 $\tau(431265)=6$，$\tau(452316)=8$，均为偶排列，故所给的两项均应带正号.

1.2.7 写出 5 阶行列式 $|a_{ij}|_{5\times 5}$ 中包含 a_{13} 及 a_{25} 并带负号的所有项.

解 5 阶行列式中包含 a_{13} 及 a_{25} 的项的一般项为

$$(-1)^{\tau(35p_3p_4p_5)}a_{13}a_{25}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$$

故其含有 a_{13} 及 a_{25} 的所有项的项数为 5 元排列 $35p_3p_4p_5$ 的个数，因 p_3,p_4,p_5 所取的排列是 1，2，4 这三个数码的全排列，有 3! 个，故 $35p_3p_4p_5$ 能组成 6 个 5 元排列，即

$$35124;35142;35214;\quad 35241;35412;35421.$$

其中 35142，35214，35421 为偶排列，35124，35241，35412 为奇排列，故包含 a_{13} 及 a_{25} 且带负号的所有项为

$$-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54};\ -a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51};\ -a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}.$$

1.2.8 求多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

中 x^4 和 x^3 项的系数.

解 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素有

$$a_{11}=5x,a_{21}=x,a_{22}=x,a_{33}=x,a_{41}=x,a_{44}=2x$$

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij} 的列下标只能取 $j_1=1,j_2=1,2,j_3=3,j_4=1,4$.

于是含 x^4 的项中元素 a_{ij} 的列下标只能取 $j_1=1,j_2=2,j_3=3,j_4=4$，相应的 4 元排列只有一个自然顺序排列 1234，故含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0 5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$$

含 x^3 的项中元素 a_{ij} 的列下标只能取

$$j_2=1,j_3=3,j_4=4 \text{ 与 } j_2=2,j_3=3,j_4=1$$

相应的 4 元排列只有 2134，4231. 含 x^3 的相应项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3,(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$$

故 $f(x)$ 中，x^3 的系数 $-2-3=-5$，x^4 的系数为 10.

1.3 行列式化为三角形行列式的计算法

因为应用行列式的定义容易求得上(下)三角形行列式的值等于其主对角线上各元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

因此利用行列式的性质将行列式化为上(下)三角形行列式计算,这是计算行列式的最基本的方法,也是最重要的方法之一.

原则上,每个行列式都可以用行列式的性质化为三角形行列式,但对于阶数较高的行列式,若直接化为三角形行列式,则计算很繁,因此在许多情况下,若是先根据行列式元素的特征,应用行列式的性质将其作某种保值变形,再将其化为三角形行列式.

为方便计,本书以 r_i 表示行列式(或矩阵)的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列.

(i) 交换第 i,j 两行(列),记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

(ii) 第 i 行(列)乘以数 k,记作 $r_i(k)[c_i(k)]$.

(iii) 数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)上,记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

一、数字元素行列式化为三角形行列式的方法

先把首元 a_{11} 变换为 1 或 -1(一般可通过交换行(列)、$\dfrac{1}{a_{11}}$ 乘第 1 行(列)或 $r_1+kr_i(c_1+kc_i)$ 等变换来实现,但应注意保值,同时要避免元素变为分数,否则将给后面的计算增加困难),然后把第 1 行分别乘以 $-a_{21},-a_{31},\cdots,-a_{n1}$ 加到第 $2,3,\cdots,n$ 行对应元素上去,这样就把第 1 列 a_{11} 以下的元素全化为 0,再逐次用类似的方法把主对角线元素以下(或以上)的元素全部化为 0,则所给行列式就化成上(或下)三角形行列式了.

注意,在上述变换过程中,主对角线上元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 不能为 0,若出现 0,则可通过行(列)交换使得主对角线上元素不为 0.

1.3.1 计算下列 4 阶行列式:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$

解 1) $$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_3-2r_2\\ r_4+r_2}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times (-3) \times 3 = -9$$

2）这个行列式的大多数元素是分数，而且它们的分母各不相同. 为了避免分数运算，先将各行乘上适当的倍数(即各行的公分母)，把各元素化为整数，然后再通过其他变换，把行列式化成三角形行列式. 要注意的是，各行乘倍数时，行列式的值要除以同样的倍数，以使行列式保值.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 10 & -75 & 12 & 45 \\ 15 & -60 & 21 & 75 \\ 20 & -135 & 24 & 75 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} \frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \times (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 15 & -60 & 21 & 75 \\ 20 & -135 & 24 & 75 \\ 10 & -75 & 12 & 45 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3 + 20r_1 \\ r_4 + 10r_1}]{r_2 + 15r_1} (-1) \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -30 & 6 & 120 \\ 0 & -95 & 4 & 135 \\ 0 & -55 & 2 & 75 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \times 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 20 \\ 0 & -95 & 4 & 135 \\ 0 & -55 & 2 & 75 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 11r_2]{r_3 - 19r_2} -\frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \times 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -15 & -245 \\ 0 & 0 & -9 & -145 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - \frac{3}{5}r_3} -\frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \times 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -15 & -245 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{30} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{7} \times 6 \times (-1) \times (-5) \times (-15) \times 2 = \frac{1}{35}$$

二、行列式中有一行(列)与另一(些)行(列)的分行(列)成比例时，三角化的方法

所谓一行(列)与另一行(列)的分行(列)成比例，是指该行(列)元素与另一行(列)的分行(列)对应元素成比例. 根据行列式的第 i 行(列)乘以常数后加到第 j 行(列)$(i \neq j)$上，行列式的值不变的性质，计算这类行列式时，可先一次去掉所有成比例的分行(分列)，将原行列式

化成易于计算的行列式.如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{11}+a_{i1} & ka_{12}+a_{i2} & \cdots & ka_{1n}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{21}a_{j1} & \lambda a_{22}a_{j2} & \cdots & \lambda a_{2n}a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_j-\lambda r_2]{r_i-kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

就一次去掉了两个成比例的分行.

1.3.2 计算下列行列式:

$$1)\ D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix};2)\ \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

解 $1)\ D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1+0 & a_2+0 & \cdots & a_n+0 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2+0 & \cdots & a_n+0 \\ 1 & a_1+0 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1+0 & a_2+0 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

(一次去掉与第 1 列成比例的所有分列,即 $c_i - a_{i-1}c_1, i = 2,3,\cdots,n+1$)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n$$

2)

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1+(x-a_1) & a_2+(a_1-a_2) & a_3+(a_2-a_3) & \cdots & a_n+(a_{n-1}-a_n) & 1 \\ a_1+0 & a_2+(x-a_2) & a_3+(a_2-a_3) & \cdots & a_n+(a_{n-1}-a_n) & 1 \\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+(x-a_3) & \cdots & a_n+(a_{n-1}-a_n) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+(x-a_n) & 1 \\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{去掉与第 } n+1 \text{ 列成比例的所有分列}} \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

由本题可以看出，若行列式有一行(列)的元素都相同时，可试用此法，将其他各行(列)改写成两行分(列)之和，其中一分行(列)与该行(列)成比例，一次去掉成比例的分行，使行列式简化.

1.3.3 计算下列行列式：

$$1)\ D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&3&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&n\end{vmatrix};\quad 2)\ \Delta_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5&\cdots&n-1&n\\1&1&2&3&4&\cdots&n-2&n-1\\1&a&1&2&3&\cdots&n-3&n-2\\1&a&a&1&2&\cdots&n-4&n-3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&a&a&a&\cdots&a&1\end{vmatrix}$$

解 1) D_n 中第 1 行的元素相同，将其他各行改写成两分行之和，去掉与第 1 行成比例的分行，即可将行列式化简：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1+0&1+1&1+0&\cdots&1+0\\1+0&1+0&1+2&\cdots&1+0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1+0&1+0&1+0&\cdots&1+(n-1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot1\cdot2\cdots(n-1)=(n-1)!$$

2) Δ_n 虽有第 1 列元素相同，但将其他各列写成两分列之和，使其一分列与第 1 列成比例，去掉成比例的分列后，并不能将行列式化简，因此自第 n 列起，后列减去前列，再去掉与第 1 列成比例的分列，即得三角形行列式：

$$\Delta_n\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&1&\cdots&1&1\\1&a-1&1-a&1&\cdots&1&1\\1&a-1&0&1-a&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a-1&0&0&\cdots&1-a&1\\1&a-1&0&0&\cdots&0&1-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\1&-1&0&0&\cdots&0&0\\1&a-2&-a&0&\cdots&0&0\\1&a-2&-1&-a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a-2&-1&-1&\cdots&-a&0\\1&a-2&-1&-1&\cdots&-1&a\end{vmatrix}=(-1)(-a)^{n-2}=(-1)^{n-1}a^{n-2}$$

1.3.4 证明：

$$1)\ D_3=\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2\end{vmatrix}=4(a-b)(a-c)(b-c);$$