不冲刷河槽中明渠水流的不稳定缓变流的計算

B. A. 阿尔漢盖里斯基 著

水利出版社

目　　錄

§1. 一 般 情 况

在明渠中为不穩定流时，水流的水力因素——过水断面面積、流量、流速等，不僅沿程变化，而且在每一断面上也随着时間而改变。我們用 R 表示这些水力因素中的任一个，这样我們就能把不穩定流的一般規律表示成下列形式：

$$R=R(S,t) \tag{1.1}$$

式中：S——从某一計算起点到所考慮的断面的距离；

t——从某一初始时刻算起的时間。

如果在任何一个断面上已經知道了任意兩个水力因素，例如过水断面面積和断面上的流速分布，那末明渠水流的流动形式就完全确定了。在大多数实际問題中，知道平均流速（亦即断面平均流速）就已經足够了。河床不受冲刷的水流的过水断面面積决定于河槽水深 H 或水面高程 z。因此 H 或 z 值是流态的一个水力因素。流态的第二个水力因素是流量 Q。

所以为了解决問題只要得到任意兩个水力因素的关系式（1.1）就足够了。

不穩定流有时也叫做“波”。当解釋这个概念时，我們將流动方程式具有下列解答的不穩定流动叫做“波”：

$$R_1=R_1(S,t); \qquad R_2=R_2(S,t) \tag{1.2}$$

上述二个解答在变数 S 和 t 的某一区域里是确定的，并且在这一区域里有連續的有限一階導数。

由于起始断面上的流量單純地增加或減少而產生的不穩

定流动是最簡單的一种型式。这种不穩定流动叫做單向波。这个波沿着流程傳播，从而使流程中愈來愈長的距离進入不穩定流动的狀态。波和原先穩定流动之間的界綫的移动速度叫做波前速度。

如果波前順着水流移动就叫做順波，流量減少的波叫做負波。

当正波傳播的时候，在緊接波前的一个短波段中，流量和水位剧烈地增漲；这一波段叫做波額。为了描述这一現象，可把波額归并到和波前重合的断面上去。这种波叫做不連續波。不連續性的数学表示式就是在波前的導数$\frac{\partial R}{\partial S}$和$\frac{\partial R}{\partial t}$为無限大。在这一篇文章里，我們不研究不連續波。

在圖 1 上繪示單向波的各种不同形式的縱断面（箭头表示流向）。水庫在充水和放水时，在其上下游所見到的流态就是單向波。

如果在初始断面里由于流量的变化所產生的不穩定流动，在开始的时候沿着某一个方向，而緊接着或隔一段时間以后又沿着相反的方向，則这种不穩定流动我們称之为运行波。河道里的洪水傳播就是这种波的例子。

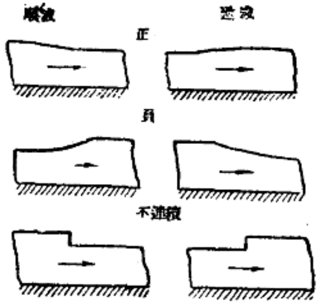

圖1.

由于在初始断面上流量沿不同方向連續变化所生的不穩定流动叫做复波，水电站在日調節时上下游的流态是这种波的例子。如果在沿流程許多断面上观察水位或流量随时間的变化，那末可以發現当断面离开初始断面愈远則变化愈

小，这种現象叫做波的衰减。这个現象可用日調節水电站下游許多断面上的流量过程綫和水位过程綫來說明（圖2）。

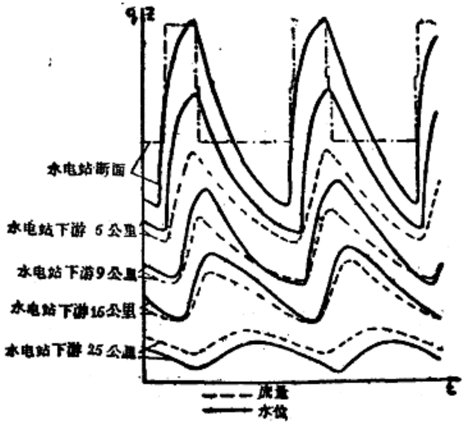

圖2.

§2. 明渠水流不穩定流的微分方程式

我們用兩个过水断面从不穩定流中截出一个單元体積 $F\delta l$（F 是过水断面，δl 是流段的長度）。把質点系統动力学的一般定理应用到这一个体積上去，我們就可以得到动力方程式。在推演公式中所引入的限制和假定可归并为下列几点：

流动假定是緩变的，而且是單維的流动。

不穩定流动方程式中的阻力項假定和穩定流动中的一样。

水流的底坡和实际中的情形相同，是很小的。

把質量中心运动的定理应用到所考慮的这个体積上去，并且把作用在体積上的力投影到平行于水流底、而且順着水

流方向的 S 軸上去，那末就可以得到

$$\frac{\gamma}{g}F\delta l\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial S}\delta l-dT+d\varphi\sin\alpha+R_s \quad (2.1)$$

式中：γ——水的重率；g——重力加速度；u——平均流速；P——截出的体積的頂上的总压力；dT——阻力；$d\varphi$——截出体積的重量；α——水流底与水平綫所成傾斜角（圖 3）；R_S——河槽表面的反作用力在 S 方向的分量。

由于 α 角很小，过水断面的面積可用垂直面的面積來代替。这样我們得到：

$$P=\int_0^H\gamma(H-h)B(h)dh=\gamma HF-\gamma\int_0^F hdF=\gamma\int_0^H F(h)dh$$

式中：H——水深；$B(h)$——离底为 h 深度处过水断面的寬度；$F(h)$——水深为 h 时过水断面的面積。

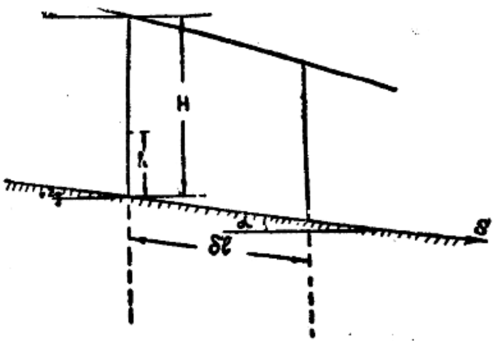

圖3.

一般在非棱柱形河槽的情形下 $F(h)$ 不僅是河槽水深的函数，而且也是断面位置的函数（也就是变数 S 的函数）。由此可得：

$$\frac{\partial P}{\partial S}=\gamma F\frac{\partial H}{\partial S}+\gamma\int_0^H\frac{\partial F(h)}{\partial S}dh \qquad (2.2)$$

流动的阻力，按照上述，可用下式來表示：

$$dT=\frac{u^2}{C^2R}\gamma F\delta l \qquad (2.3)$$

式中：C——謝才公式的系数；R——水力半徑。單元体積重量的分量可寫作如下的形式：

$$d\varphi=\gamma F\delta l i_g \qquad (2.4)$$

式中：$i_g=\sin\alpha$——一般常用的表示水流的底坡的符号。R_s 的表达式如下：

$$R_s=\gamma\int_0^H\frac{\partial F(h)}{\partial S}\delta l dh \qquad (2.5)$$

把(2.2)、(2.3)、(2.4)和(2.5)代入(2.1)中去，經簡化后便得到：

$$\frac{1}{g}\ \frac{du}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial S}-\frac{u^2}{C^2R}+i_g$$

或者$\left(考慮到\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial S}\right)$：

$$i_g-\frac{\partial H}{\partial S}=\frac{u^2}{C^2R}+\frac{1}{g}\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{g}u\frac{\partial u}{\partial S} \qquad (2.6)$$

对棱柱形河槽：$\frac{\partial H}{\partial S}=\frac{1}{B}\ \frac{\partial F}{\partial S}$，因而(2.6)式具有下列形式：

$$i_g-\frac{1}{B}\ \frac{\partial F}{\partial S}=\frac{u^2}{C^2R}+\frac{1}{g}\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{g}u\frac{\partial u}{\partial S} \qquad (2.7)$$

把連續性条件应用到运动着的体積 $F\delta l$ 上去，便得

$$d(F\delta l)=dF\delta l+Fd(\delta l)=0 \qquad (2.8)$$

但

$$dF=\frac{\partial F}{\partial S}dS+\frac{\partial F}{\partial t}\,dt$$

$$d(\delta l)=\left[\left(u+\frac{\partial u}{\partial S}\,\frac{\delta l}{2}\right)-\left(u-\frac{\partial u}{\partial S}\,\frac{\delta l}{2}\right)\right]dt$$

因此，(2.8)式具有如下形式：

$$\frac{\partial F}{\partial S}\,\frac{dS}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}+F\frac{\partial u}{\partial S}=0$$

考慮到$\frac{dS}{dt}=u$，并且采用下列符号：

$$g\left(i_g-\frac{u^2}{C^2R}\right)=N \qquad (2.9)$$

就可以把方程式(2.7)和(2.8)寫作下列形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial S}+\frac{g}{B}\,\frac{\partial F}{\partial S}=N \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+F\frac{\partial u}{\partial S}+u\frac{\partial F}{\partial S}+0 \qquad (2.11)$$

在許多情形下，適宜于把这些方程式寫成为另外一种形式。我們用 z 和 z_g 分别示水面和水底的高程；那末

$$H=z-z_g;\qquad \frac{\partial H}{\partial S}=\frac{\partial z}{\partial S}-\frac{\partial z_g}{\partial S}=\frac{\partial z}{\partial S}+i_g;$$

$$i_g-\frac{\partial H}{\partial S}=-\frac{\partial z}{\partial S}$$

其次

$$F\frac{\partial u}{\partial S}+u\frac{\partial F}{\partial S}=\frac{\partial(uF)}{\partial S}=\frac{\partial Q}{\partial S};$$

因此，(2.7)和(2.11)式即可改寫为：

$$\frac{\partial z}{\partial S}=-\frac{u^2}{C^2R}-\frac{1}{2g}\,\frac{\partial u^2}{\partial S}-\frac{1}{g}\,\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial S}=0 \tag{2.13}$$

§3. 特性綫方程式

§2中得到的各种形式的不穩定流动偏微分方程都是屬于双曲綫型的。这些方程式的求解可以归結为求解一組叫做特性綫方程式的普通微分方程式。

設在 St 坐标平面里，方程式(2.10) 和 (2.11)的解的区域內有曲綫

$$S=\varphi(t) \tag{3.1}$$

的一个綫段，沿这一綫段函数 u 和 F 的值为

$$u=u(S,t);\qquad F=F(S,t) \tag{3.2}$$

从物理的观点來看，这个命題相当于我們根据在不同时間沿某河段上所作的測量（例如从行進着的船只進行測量）已掌握了水流的水力指数的情形。

綫段 $S=\varphi(t)$的全微分式，有下列的形式:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial S}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.3}$$

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial S}\varphi'(t)+\frac{\partial F}{\partial t} \tag{3.4}$$

式中的$\frac{du}{dt}$，$\frac{dF}{dt}$和$\varphi'(t)$值可按(3.1)和(3.2)來确定；另一方面，曲綫$S=\varphi(t)$ 的每一点应該滿足方程式(2.10)和(2.11)。把这两个方程式和全微分式(3.3)和(3.4)联解，就可确定出曲綫(3.1)上任一点的全部偏導数的值。

把$\frac{\partial F}{\partial t}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$从(3.3)和(3.4)解出，得

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{dF}{dt}-\frac{\partial F}{\partial S}\frac{dS}{dt};\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{du}{dt}-\frac{\partial u}{\partial S}\frac{dS}{dt}$$

把这两个式子代入方程式(2.10)和(2.11)，就得到：

$$\frac{\partial F}{\partial S}\left(u-\frac{dS}{dt}\right)+\frac{\partial u}{\partial S}F+\frac{dF}{dt}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial S}\frac{g}{B}+\frac{\partial u}{\partial S}\left(u-\frac{dS}{dt}\right)=N-\frac{du}{dt}$$

把 $\frac{\partial F}{\partial S}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial S}$ 从这两个方程式中解出，得

$$\frac{\partial F}{\partial S}=-\frac{\left(u-\frac{dS}{dt}\right)\frac{dF}{dt}+\left(N-\frac{du}{dt}\right)F}{\left(u-\frac{dS}{dt}\right)^2-\frac{gF}{B}} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial S}=-\frac{\left(N-\frac{du}{dt}\right)\left(u-\frac{dS}{dt}\right)-\frac{g}{B}\frac{dF}{dt}}{\left(u-\frac{dS}{dt}\right)^2-\frac{gF}{B}} \quad (3.6)$$

对于上列的解，曲綫 $S=\varphi(t)$ 某一点上的各偏導数的值，与由 $\frac{dS}{dt}$ 值所确定的曲綫方向無关；顯然这种曲綫的方向可以設想有無限多个[●]。从这些方向里，我們現在來研究使(3.5)和(3.6)式的分母变成零的方向。

为了这个目的，解下列方程式

$$\left(u-\frac{dS}{dt}\right)^2-\frac{gF}{B}=0$$

由此可以看出，在每一点上曲綫 $S=\varphi(t)$ 有兩个这样的方向，其表示式为：

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_1=u+\sqrt{\frac{gF}{B}} \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_2=u-\sqrt{\frac{gF}{B}} \quad (3.8)$$

● 指在域内可以有無限条曲綫 $s=\varphi(t)$ 通过該点——譯者注。

为了使導数在方程式(2.10)和(2.11)的解的全部区域里的值为有限值，方程式(3.5)的分子在上面得到的$\frac{dS}{dt}$数值的条件下应该等于零。把$u-\frac{dS}{dt}=\pm\sqrt{\frac{gF}{B}}$的数值代入該分子，就得到兩个常微分方程：

$$du+\sqrt{\frac{g}{BF}}\,dF-Ndt=0 \tag{3.9}$$

$$du-\sqrt{\frac{g}{BF}}\,dF-Ndt=0 \tag{3.10}$$

这时方程式(3.6)的分子將恆等于零。

由此可見，如果变量t和S值并不是任意給定的，而受条件(3.7)和(3.8)的限制，那末函数u和F值就由(3.9)和(3.10)式联系起來。

方程式組(3.7)和(3.9)；(3.8)和(3.10)就是特性綫方程式；以后也把它們叫做St平面里的特性綫，这些特性綫的方向受着条件(3.7)和(3.8)的限制。这样一來，方程式(2.10)和(2.11)在St平面上有解的区域可繪出兩族特性綫。沿着特性綫行進，在所有的时刻里，我們都將遇到偏導数$\frac{\partial F}{\partial S}$和$\frac{\partial u}{\partial S}$的不定值。既然

$$i=i_g-\frac{1}{B}\,\frac{\partial F}{\partial S}$$

那末沿着特性綫，水面坡度同样也是不确定的；因此，$u\pm\sqrt{\frac{gF}{B}}$值是波前的傳播速度。

采用下列符号：

$$u+\sqrt{\frac{gF}{B}}=W \tag{3.11}$$

$$u-\sqrt{\frac{gF}{B}}=\Omega \tag{3.12}$$

引用这二个符号后，在棱柱形河槽情形下的特性綫方程式具有下列形式：

$$dS=Wdt \tag{3.13}$$

$$du=-\sqrt{\frac{g}{BF}}\,dF+Ndt \tag{3.14}$$

$$dS=\Omega dt \tag{3.15}$$

$$du=\sqrt{\frac{g}{BF}}\,dF+Ndt \tag{3.16}$$

在 $u<\sqrt{\frac{gF}{B}}$(緩流)的情形里，也就是 $\Omega<0$ 时，方程式(3.15)可定出波前的逆流傳播速度。和波的分类一样，在目前的情形里，將(3.13)～(3.14)称为順特性綫，而將(3.15)～(3.16)称为逆特性綫。在 $u>\sqrt{\frac{gF}{B}}$(急流)的情形里，波前不可能逆流傳播。对矩形断面的河槽，$\frac{F}{B}=H$，而方程式(3.13)和(3.14)就变为拉格朗日对于擾动(Возмущение)傳播速度的公式：

$$\frac{dS}{dt}=u\pm\sqrt{gH}$$

在下面我們列出棱柱形河槽条件下特性綫方程式的其他寫法。在研究中引用函数

$$\lambda=\int\sqrt{\frac{g}{BF}}\,dF$$

來代替 F 值，我們即可得到呈下列形式的特性綫方程式：

順特性綫：

$$
\begin{aligned}
dS &= Wdt \\
du &= -d\lambda + Ndt
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

逆特性綫：

$$
\left.
\begin{aligned}
dS &= \Omega dt \\
du &= d\lambda + Ndt
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.18)
$$

对于矩形河槽，$\lambda=\sqrt{2gH}$；对于抛物形河槽（其截面積和深度間具有指数关系 $F=AH^n$，式中 A 和 n 是常数），$\lambda=2\sqrt{gnH}$；对梯形河槽，λ 值用橢圓積分表示。

引用下列兩个新函数來代替函数 u 和 λ

$$\xi=u+\lambda; \quad \eta=u-\lambda$$

我們就可以得到如下形式的順特性綫方程式：

$$
\left.
\begin{aligned}
dS &= Wdt \\
d\xi &= Ndt
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.19)
$$

和逆特性綫的方程式

$$
\left.
\begin{aligned}
dS &= \Omega dt \\
d\eta &= Ndt
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.20)
$$

为了得到非棱柱形河槽中水流的特性綫，(2.6)式中的条件应有下列的形式：

$$\frac{\partial H}{\partial S}=\frac{1}{B}\ \frac{\partial F}{\partial S}+\frac{1}{B}\ \frac{\partial F^*}{\partial S}$$

式中：F^*——过水断面面積，为断面的位置 S 和深度 H 的函数〔$F^*(S,H)$〕；引用符号

$$\frac{1}{B}\ \frac{\partial F^*}{\partial S}=\mu$$

如果河槽形狀是用数学式表示的，則 μ 值也可以表示为 S 和 H 的函数。例如，对于槽底按直綫 $b=b_0+KS$ 加寬（式中 b_0 为初始断面上的底寬），而且边坡为 m 的梯形河槽，我

們得到

$$F^{*}=H(b_0+KS+mH),\frac{\partial F}{\partial S}=KH,\ B=b_0+KS+2mH$$

$$\mu=\frac{KH}{b_0+KS+2mH}$$

如果河槽形式不規則（例如天然河道），可計算出水流各个流段的 μ 的近似值，并根据流段的河槽形狀的資料求得各流段中偏導数 $\frac{\partial F^{*}}{\partial S}$ 的平均值。

考慮到上述，將方程式(2.5)表示成下列形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial S}+\frac{g}{B}\frac{\partial F}{\partial S}=N_1$$

式中：$N_1=g\left(i_g-\frac{u^2}{C^2R}-\mu\right)$ 这样我們就得到下列形式的特性綫方程式

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=u\pm\sqrt{\frac{gF}{B}}\\ du&=\pm\sqrt{\frac{g}{BF}}dF+N_1dt\end{aligned}\qquad(3.21)$$

在工程中，特别是在天然河道流动的計算中，通常运用流量 Q 和水位高程 z。如上所述，在計算中流程被分成許多流段，且都是按棱柱形的流段來考慮的。

$$du=\frac{FdQ-QdF}{F^2}=\frac{dQ}{F}-\frac{Q}{F^2}BdH$$

并把它代入(3.9)式，我們得到

$$\frac{dQ}{F}-\frac{Q}{F^2}BdH-Ndt+\sqrt{\frac{g}{BF}}BdH=0$$

或者乘上 F 再將 $dt=\frac{dS}{W}$ 代入，得

$$\left(\frac{Q}{F}-\sqrt{\frac{gF}{B}}\right)BdH=dQ-\frac{FN}{W}dS$$

由于

$$\frac{Q}{F}-\sqrt{\frac{gF}{B}}=\Omega;\quad N=g\left(i_g-\frac{u^2}{C^2R}\right)=g\left(i_g-\frac{Q^2}{K^2}\right)$$

式中：$K=CF\sqrt{R}$——流量模数。由上式可得

$$dH=\frac{1}{B\Omega}dQ-\frac{gF\left(i_g-\frac{Q^2}{K^2}\right)}{B\Omega W}dS \qquad (3.22)$$

然后如果將

$$B\Omega W=B\left(\frac{Q^2}{F^2}-\frac{gF}{B}\right)$$

代入，那末由（3.22）式可得

$$\frac{dH}{dS}=\frac{1}{B\Omega}\ \frac{dQ}{dS}+\frac{i_g-\frac{Q^2}{K^2}}{1-\frac{Q^2B}{gF^3}} \qquad (3.23)$$

將 $\frac{dH}{dS}=\frac{dz}{dS}-\frac{dz_g}{dS}=\frac{dz}{dS}+i_g$ 代入，从（3.23）式可得

$$\frac{dz}{dS}=\frac{1}{B\Omega}\ \frac{dQ}{dS}+\left(\frac{i_g-\frac{Q^2}{K^2}}{1-\frac{Q^2B}{gF^3}}-i_g\right) \qquad (3.24)$$

由（3.24）式可見，在順特性綫的条件下，水面坡度是由流量为 Q 时穩定流动的坡度加上由于水流不穩定性質所產生的附加坡度所組成。

引用符号

$$g\frac{F}{B}=\omega$$

于是（3.24）式可寫成下列形式

$$dz=\frac{1}{B\Omega}dQ+\left(\frac{i_g-\frac{Q^2}{K^2}}{1-\frac{u^2}{\omega^2}}-i_g\right)dS \quad (3.25)$$

在实际的条件下，特别是对壅水的流段中，常常是 $\frac{u}{\omega}\ll 1$；在这个条件下，方程式(3.25)就得到更簡單的形式

$$dz=\frac{1}{B\Omega}dQ-\frac{Q^2}{K^2}dS \qquad (3.26)$$

逆特性綫的方程式（3.10），也可以加以类似地变换，結果方程式組(3.7)～(3.10)在 $\frac{u}{\omega}\ll 1$ 的情况下变为如下形式：

$$\left.\begin{aligned} dS&=Wdt\\ dz&=\frac{1}{B\Omega}dQ-\frac{Q^2}{K^2}dS\\ dS&=\Omega dt\\ dz&=\frac{1}{BW}dQ-\frac{Q^2}{K^2}dS \end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

在其他的条件下，在方程式(3.24)中引用符号

$$1-\frac{Q^2B}{gF^3}=\nu \qquad (3.28)$$

就可以把該方程式寫成下列形式

$$dz=\frac{1}{B\Omega}dQ-\frac{Q^2}{\nu K^2}dS+\frac{i_gQ^2B}{\nu gF^3}dS$$

或

$$dz=\frac{1}{B\Omega}dQ-\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{K^2}-\frac{i_gB}{gF^3}\right)Q^2dS \qquad (3.29)$$

应当指出，在上面得到的这个方程式里，括弧里的式子是变量 z 和 S 的函数，ν 值还与流量 Q 有关。

引用符号

$$\frac{1}{K^2}-\frac{i_g B}{gF^3}=\frac{1}{M^2}$$

就可以把特性綫方程式寫成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} dS&=Wdt\\ dz&=\frac{1}{B\Omega}dQ-\frac{Q^2}{\nu M^2}dS \end{aligned}\right\}\qquad (3.30a)$$

$$\left.\begin{aligned} dS&=\Omega dt\\ dz&=\frac{1}{W}dQ-\frac{Q^2}{\nu M^2}dS \end{aligned}\right\}\qquad (2.30б)$$

§4. 用解特性綫方程式的方法來計算不穩定流

在 §2 里所給出的各种不同形式的不穩定流的方程式組，并不具有能寫成簡單数学式的通解；因此現有的解法是利用数值積分法。在利用这一方式來研究計算方法时，可以遵循兩条主要途徑。

第一条途徑是利用特性綫方程式來代替偏微分方程式，而特性綫方程式則用数值積分法求解。这一方法以后叫做特性綫法。

第二条途徑是引進一些补充的假定和限制，把基本方程式表示成有限差的形式，并且对許多 t 值（t=常数）進行数值積分。

積分后得到在預先給定的設計时刻中流量和水位沿流程的分布。这个解法以后叫做瞬时流态法（在 §5 叙述）。

設有某一个波，已知其在 St 平面上兩点 a 和 b 函数 uF 的数值。这个 St 平面以后叫做波平面。經过这兩点中的每一点，引兩条特性綫；設 m 点（圖 4）是通过 a 点的順特性