

天利 38 套

2005

透視高考

最新 十年高考 试题分类解析

全国高考命题研究组 编
北京天利考试信息网

- 2004 年全国各省市高考试题分类解析
- 1995-2004 7 年经典 + 3 年重点
- 搜狐教育频道推荐用书

数 学

西藏人民出版社

编写使用说明

很多高考专家在指导考生复习备考时都会提到做题是必不可省的,其中有三类试题更是非做不可:一、历年真题;二、各省市组织的模拟考试题;三、临考前的冲刺模拟练习。历年高考真题,试题编制经典,每一道都经过精心的设计,细心的人还发现,每年高考试题中偶有几道题与往年高考试题相似甚至相同。正是这些特点,历年高考真题才吸引了众多教师和考生去探究。

研究和练习历年高考试题有一些基本的路径和方法。第一是直接研学考试中心编写的试题分析,好处是专家研究好了,省了自己很多事,不足是有时不全或出版太迟;第二是把历年真题拿来练习;第三是对历年真题按知识点、专题进行分类。第二、第三种方法各有利弊,又相互补充。直接练习原题能把握全局,了解全貌,容易找到感觉,摸清自己底细,不足之处是试题太多,有些试题偏旧,另外这种练习在总复习后期进行比较有效。对真题分类解析恰好可以弥补第二种方法的不足,这就是本书出版的初衷。

本书是由北京、河北、天津、浙江、山东等地特级、高级教师在研究了历年考试说明(或大纲)、教材以及教育考试中心试题分析的基础上,结合当前实际编写的。在选材上,范围确定为十年,但大部分材料选自近几年真题。由于十年来,高考改革不断,高考科目、内容和要求都在不断地变化,入选本书的试题至少要符合两个条件:一是符合2005年高考要求,如旧内容或2005年不再要求的内容一律不选用;二是选用的试题尤其早些年试题须是经典试题。在体例结构上,书中各科专题知识点安排均遵照最新考试大纲要求,章节之前编有专家导学,所选试题均附解题提示,让读者能把握各科高考总体命题走向,同时集中掌握和巩固高考考核要求的知识和能力。

需要特别指出的是,与其他同类书只将当年考题原样收入不同,本书对2004年十余套高考真题也进行了分类解析。

本书各章节均按以下体例编写:

1. 各章均分为三部分:一、命题趋势与应试对策;二、试题类编;三、试题解析。对于占分比重较大的章,章下设节,每章均对该部分内容在十年高考中的情况进行详细分析。

2. 试题解析中大部分试题均有[分析]、[解答]、[注意]三个版块。[分析]说明该题的考查点和解题思路;[解答]中给出了一到几种不同解法;[注意]则指出了在解题过程中易混淆、易错的地方,提醒读者仔细分辨。

2004年高考,有11个省市单独命题,教育部考试中心也首次提供了4套统考试题。2004年北京、海南、广西、内蒙古、陕西、西藏采用的是旧课程卷(2005年高考,这些地区均改为新课程卷),2004年全国及各省命题均依据考试中心的《考试大纲》,本书已充分考虑了上述因素,是完全依照2005年高考要求编写的,适合于2005年各省市各种模式高考(包括单独命题省市)的考生。

本套丛书包括语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史和地理等科目,是“天利38套”系列中的一种。

参加各册编写的老师

语文:范国平	数学:沈捷	英语:古智清
物理:彭文刚	生物:张淑娟	化学:李战坤、李君燕
政治:张家如	历史:陈同振	地理:刘荣珍

在本书的编写过程中,得到了各地众多教师、教研员、大学研究者的指导和帮助,在此深表谢意,同时也感谢搜狐教育(<http://learning.sohu.com>)对本书的推荐。鉴于编者水平,本书如有错误和不足,敬请读者批评指正。

编者

2004年8月

2000年-2004年各地高考政策

1.2000年,天津、山西、江西采用新课程;广东考3+大综合+1;江苏、山西、浙江、吉林考3+文综/理综;其他省市考3+2,上海单独命题。

2.2001年,天津、山西、江西采用新课程卷;广东、河南、上海考3+大综合+1;江苏、山西、浙江、吉林、内蒙古、辽宁、黑龙江、安徽、湖北、湖南、四川、福建、陕西、天津、海南考3+文综/理综;其他省市考3+2,上海单独命题。

3.2002年,天津、山西、江西采用新课程卷;广东、河南、江苏、上海考3+大综合+1;广西考3+ X_i ($i=1, \dots, 12$);其他省市考3+文综/理综,上海单独命题。

4.2003年,天津、山西、江西、山东、江苏、青海、河南、黑龙江、辽宁、安徽采用新课程;广东、辽宁、河南、上海考3+大综合+1;广西考3+ X_i ($i=1, \dots, 12$);江苏考3+2(综合测试在高三第一学期期末进行);其他省市考3+文综/理综;北京单独命题语文、数学、英语三科试题,上海单独命题。

5.2004年,北京(旧课程卷)和天津单独命题科目为语文、数学、英语、文综、理综;辽宁单独命题科目为语文、数学、英语,教育部考试中心为之命制文理综合;上海市单独命题科目为语文、数学、英语、综合能力测试、物理、化学、生物、政治、历史、地理;江苏单独命题科目为语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理;浙江、福建、湖北、湖南、重庆单独命题科目为语文、数学、英语,教育部考试中心为之命制文综、理综;广东单独命题科目为语文、数学、英语,教育部考试中心为之命制文理综合、物理、化学、生物、政治、历史、地理。其他省市由教育部考试中心统一命题。

6.2004年全国卷有四套题,全国卷一:山东、山西、河南、河北、安徽、江西等省使用;全国卷二:吉林、黑龙江、四川、云南等省使用;全国卷三(旧课程卷):广西、海南、西藏、陕西、内蒙古等省区用(其中陕西省理综为新旧课程卷);全国卷四:甘肃、新疆、青海、宁夏、贵州等省区用。新旧课程卷对比,语文、英语、政治没有差别,化学差别极小,物理、生物、历史、地理有少许差别,数学差别最大,约有6%~8%不同。

目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
第二章 函数	(7)
第三章 数列	(29)
第四章 三角函数	(56)
第五章 平面向量	(68)
第六章 不等式	(84)
第七章 直线与圆的方程	(99)
第八章 圆锥曲线	(110)
第九章 直线、平面、简单几何体	(132)
第十章 排列、组合、二项式定理	(154)
第十一章 概率与统计	(164)
第十二章 极限与导数	(174)
第十三章 复数	(185)
第十四章 2005 年高考命题走向	(189)

第一章 集合与简易逻辑

一、命题趋势与应试对策

(一) 命题趋势

集合与简易逻辑是高中数学的基础内容之一,在高考中“集合”与“充分必要条件”这两部分内容每年都有题目.此部分试题一般为基础题,常以两种方式考查:一是考查集合本身的内容,即“集合”、“充分必要条件”等的基本概念与基本性质以及运算能力.二是把集合知识作为工具,在考查其他内容时加以应用,用集合语言进行叙述.这类题常与函数、方程、不等式、数列等进行综合,但综合的深度较小.集合部分的试题多是选择题、填空题,解答题较少,近十年全国高考理科试题中,2003年有一道含本章知识点的综合性解答题.

今后的命题趋势是:试题一如既往,仍将是一道选择题或一道填空题,难度较小,也可能有以集合为载体,综合其他数学知识构成的综合题,此类题难度稍大.

(二) 应试对策

根据集合在高考中的地位及今后的命题趋势,同学们应采取如下的应试对策:

1. 在复习中把握好基础性知识,重点掌握集合、充分条件和必要条件的概念和运算方法.在解答题时,首先应明确集合元素的意义,作好文字语言与符号语言、图形语言的转化,注意数形结合,充分利用文氏图或数轴的直观性来帮助解题.

2. 涉及本单元知识点的高考题,既有小型综合题,也有大型综合题,所以在复习中,要注意各类知识的融会贯通,首先要灵活掌握小型综合题型(如集合与映射,集合与自然数集,集合与不等式,集合与方程等;充分条件与必要条件与三角、立几、解几中的知识点的综合等).其次,对有一定难度的大型综合题型也要进行有针对性的训练和准备.

二、试题类编

(一) 选择题

1. ('04 山西) 设 A, B, I 均为非空集合,且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是 ()
A. $(\complement_I A) \cup B = I$ B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$
2. ('04 北京) 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x < 1\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} M \cap N$ 等于 ()
A. $\{x | x < -2\}$ B. $\{x | -2 < x < 1\}$
C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 1\}$
3. ('04 全国) 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. ('00 上海) 若集合 $S = \{y | y = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $S \cap T$ 是 ()
A. S B. T C. $\emptyset$ D. 有限集
4. ('01 全国) 如图 1-1, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相连. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递. 则单位时间内传递的最大信息量是 ()

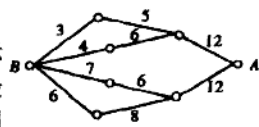


图 1-1

A. 26 B. 24 C. 20 D. 19

5. ('01 上海) 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 且 $a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则下列命题中的假命题是 ()

- A. 若 $a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $a \perp \beta$, 则 $a \perp b$
C. 若 a, b 相交, 则 α, β 相交 D. 若 α, β 相交, 则 a, b 相交

6. ('02 上海) $a = 3$ 是直线 $ax + 2y + 3a = 0$ 和直线 $3x + (a - 1)y = a - 7$ 平行且不重合的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

7. ('02 北京) 设命题甲“直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直”; 命题乙: “直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体”, 那么, 甲是乙的 ()

- A. 充分必要条件 B. 充分非必要条件
C. 必要非充分条件 D. 既非充分又非必要条件

8. ('02 全国) 设集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{N} \right\}, N = \left\{ x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 ()

- A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

9. ('02 全国) 函数 $y = x^2 + bx + c [x \in [0, +\infty)]$ 是单调函数的充要条件是 ()

- A. $b \geq 0$ B. $b \leq 0$ C. $b > 0$ D. $b < 0$

10. ('02 河南) 函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数的充要条件是 ()

- A. $ab = 0$ B. $a + b = 0$ C. $a = b$ D. $a^2 + b^2 = 0$

11. ('03 北京) 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 > 0\}, B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x \mid x > 1\}$ B. $\{x \mid x > 0\}$
C. $\{x \mid x < -1\}$ D. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

12. ('03 北京) “ $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ” 是 “ $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$ ” 的 ()

- A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件

13. ('03 北京春) 若集合 $M = \{y \mid y = 2^{-x}\}, P = \{y \mid y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cap P$ 等于 ()

- A. $\{y \mid y > 1\}$ B. $\{y \mid y \geq 1\}$ C. $\{y \mid y > 0\}$ D. $\{y \mid y \geq 0\}$

14. ('03 上海) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

(二) 填空题

15. ('00 上海春) 集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}, B = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2\}$, 其中 $r > 0$, 若 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素, 则 r 的值是_____.

16. ('00 上海春) 设 I 是全集, 非空集合 P, Q 满足 $P \subsetneq Q \subsetneq I$. 若含 P, Q 的一个集合运算表达式, 使运算结果为空集 $\emptyset$, 则这个运算表达式可以是_____. (只要写出一个表达式)

17. ('01 天津) 在空间中,

- ①若四点不共面, 则这四点中任何三点都不共线;
②若两条直线没有公共点, 则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中, 逆命题为真命题的是_____.

(把符合要求的命题序号都填上)

18. ('01 上海) 设集合 $A = \{x \mid 2\lg x = \lg(8x - 15), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \left\{x \mid \cos \frac{x}{2} > 0, x \in \mathbf{R}\right\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 _____ 个.

19. ('02 上海春) 若全集 $I = \mathbf{R}$, $f(x)$ 、 $g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P = \{x \mid f(x) < 0\}$,

$Q = \{x \mid g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P 、 Q 表示为 _____.

20. ('03 上海) 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ = _____.

(三) 解答题

21. ('99 上海) 设集合 $A = \{x \mid |x - a| < 2\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2x - 1}{x + 2} < 1\right\}$.

若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

22. ('00 上海春) 已知 $\mathbf{R}$ 为全集, $A = \{x \mid \log_2(3 - x) \geq -2\}$, $B = \left\{x \mid \frac{5}{x + 2} \geq 1\right\}$, 求 $\complement_{\mathbf{R}} A \cap B$.

3. ('03 全国) 已知 $c > 0$. 设

P : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

三、试题解析

1. [分析] 本题考查集合之间关系的掌握情况.

[解答] 画出文氏图, 利用图形逐一判断, 可得 B 错误, 故正确答案为 B.

2. [分析] 本题考查不等式及交集与补集的概念.

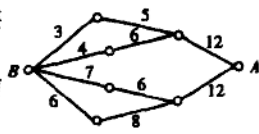
[解答] $\complement_{\mathbf{R}} M \cap N = \{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < -2\} \cap \{x \mid x < 1\} = \{x \mid x < -2\}$. 故正确答案为 A.

3. [分析] 本题考查圆锥曲线与集合的基本知识.

[解答] 易知集合 M 表示的是圆 $x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}$, 集合 N 表示的是抛物线 $y = x^2, x \in \mathbf{R}$, 由图形易知两图像有且只有 2 个定点, 故它们是交集中元素的个数为 2. 故正确答案为 B.

4. [分析] 本题主要考查应用数学知识分析、解决实际问题的能力, 突出观察和思考能力的考查.

网络中, 信息的传输要通过结点和网线, 在单位时间内, 所能传输的信息量, 受其容量和流量的制约. 解答本题要抓住结点的分流(或合流)作用, 以及网络支路的信息流量.



答图 1-1

[解答] 依题意, 每个信息由 A 传递到 B 都要经过两个中间结点. 由网络图可知:

由 A 送出的信息量最大值为 $12 + 12 = 24$,

但经过第一个结点分流时, 能通过的信息量最多为 $(5 + 6) + 12 = 23$,

再经过第二个结点分流到达 B 的信息量最多只能是 $3 + 4 + 6 + 6 = 19$.

故所求的最大信息量为 19. 故正确答案为 D.

[注意] 本题不用什么高中知识, 试题新颖别致, 以现代科技最前沿的问题为背景, 以考查学生接受信息, 处理信息为目标, 是一道难得的优秀试题.

在解本题时, 容易进入误区, 得到结点 A 向结点 B 传递的最大信息为 $12 + 8 + 7 = 26$, 误选 A, 错因是没有看懂题中要求“从 A 向 B 单位时间内传递的最大信息量的含义”.

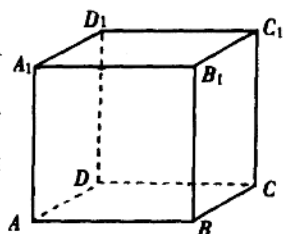
5. [分析] 本题主要考查命题的基本概念和立体几何中直线、平面间的垂直关系. 思路: 可根据题设作出简单图形, 借助于图形一一进行判定, 确定命题真假.

[解答] A: $\because a \parallel b, a \perp \alpha, \therefore b \perp \alpha$, 又 $\because b \perp \beta, \therefore \alpha \parallel \beta$. A 是真命题.

B: $\because a \perp \alpha, \alpha \perp \beta, \therefore a \parallel \beta$ 或 $a \in \beta$; 又 $\because b \perp \beta, \therefore b \perp a$. B 是真命题.

C: α, β 不平行则相交, $\therefore$ 若 $a \parallel \beta$, 则 $a \parallel b$, $\therefore$ 其逆否命题 a, b 不平行时, α, β 相交. $\therefore$ C 是真命题.

D: 如答图 1-2, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD$ 与平面 DCC_1D_1 相交于直线 CD , $A_1D_1 \perp$ 平面 DCC_1D_1 , $B_1B \perp$ 平面 $ABCD$, 直线 A_1D_1 与 B_1B 不相交, 所以 D 是假命题. 故正确答案为 D.



答图 1-2

【注意】要否定一个命题, 举一反例即可.

6. 【分析】本题考查两直线平行的基本知识和充要条件的概念. 思路: 利用两直线平行的充要条件判定即可.

【解答】当 $a = 3$ 时, 直线 $l_1: 3x + 2y + 9 = 0$; 直线 $l_2: 3x + 2y + 4 = 0$.

$\therefore l_1$ 与 l_2 的 $A_1:A_2 = B_1:B_2 = 1:1$, 而 $C_1:C_2 = 9:4 \neq 1$, 即 $C_1 \neq C_2$.

$\therefore a = 3 \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$. 故正确答案为 C.

7. 【分析】本题考查充要条件、棱柱的性质、逻辑推理能力和空间想像能力. 思路: 根据充要条件的概念进行判断.

【解答】甲 $\Rightarrow$ 乙, 因为直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 只要满足底面对角线 $AC \perp BD$,

则平面 $ACB_1 \perp BB_1D_1D$, 但底面四边形 $ABCD$ 不一定为正方形, 所以甲成立时, 乙不成立. 显然, 乙 $\Rightarrow$ 甲. 故正确答案为 C.

【注意】直四棱柱成为正方体所满足的条件是底面是正方形, 侧棱与底面边长相等.

8. 【分析】本题主要考查了无限集合的关系, 给出的集合用表达式描述表示. 思路一: 将集合 M, N 变形, 然后进行分析比较; 判断它们的关系. 思路二: 利用排除法求解.

【解答】在 M 中, $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}$, 在 N 中, $x = \frac{k+2}{4}$, 所以, 当 $k \in \mathbb{Z}$ 时, $2k+1$ 的值域是 {奇数}, $k+2$ 的值域是 $\mathbb{Z}$, 显然 $M \subsetneq N$. 故正确答案为 B.

【注意】本题解法用到了函数的观点和思想方法.

9. 【分析】本题主要考查二次函数和充要条件等基础知识, 以及计算技能与逻辑推理能力. 可以利用二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 图像的对称轴判定. 也可利用排除法.

【解答】函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像是以直线 $x = -\frac{b}{2}$ 为对称轴的抛物线, 所以, 该函数在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数的充要条件为: 函数图像的对称轴与 x 轴的交点不是区间 $[0, +\infty)$ 上的点, 即 $-\frac{b}{2} \leq 0$, 等价于 $b \geq 0$. 故正确答案为 A.

【注意】解本题利用数形结合可将问题简化.

10. 【分析】本题考查函数的奇偶性与充要条件的知识. 思路: 利用奇函数和充要条件的定义判断.

【解答】先看必要性, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则对于 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 即 $-x|x-x+a|+b = -x|x+a|-b$, 则 $a=b=0$, $\therefore a^2+b^2=0$. 反之, 若 $a^2+b^2=0$, 则 $a=b=0$, $\therefore f(x) = x|x|$, $\therefore f(-x) = -x|-x| = -f(x)$. $\therefore f(x)$ 为奇函数. 故正确答案为 D.

【注意】 $f(x)$ 是奇函数的必要条件是 $f(0)=0$, 在解题中经常用到, 要牢记.

11. 【分析】本题主要考查对数不等式、集合等基础知识. 思路一: 将集合 A, B 化简, 之后求交集; 思路二: 利用排除法.

【解答】由已知不等式, 分别解得 $A = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$, $B = \{x | x > 1\}$

$\therefore A \cap B = \{x | x > 1\}$. 故正确答案为 A.

12. 【分析】本题考查三角函数和充要条件的基础知识. 思路: 利用三角知识和充要条件定义判断.

【解答】 $\because \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore 2\alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ 或 $2\alpha = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$,

$\therefore \alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ 或 $\alpha = k\pi + \frac{7\pi}{12}$. $\therefore \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \nRightarrow \alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}$,

而 $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore " \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} "$ 是 $" \alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z} "$ 的必要但非充分条件.

故正确答案为 A.

13.【分析】本题是函数与集合的小型综合题. 思路: 因为选择题给出的是 y 的取值范围, 所以从 $y = 2^{-x}$ 和 $y = \sqrt{x-1}$ 的值域作为思维的起点, 容易获得圆满答案.

【解答】 $\because y = 2^{-x} > 0, y = \sqrt{x-1} \geq 0, \therefore M \cap P = \{y | y > 0\} \cap \{y | y \geq 0\} = \{y | y > 0\}$. 故正确答案为 C.

【注意】本题概念性强, 是高考的热点题型.

14.【分析】本题主要考查不等式、集合、充要条件等基础知识. 思路: 可考虑用特殊值法求解.

【解答】用特殊值法, 不等式 $-x^2 + 2x + 3 > 0$ 和 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的同类项系数的比等于 -1 , 它们的解集显然不相等. 不等式 $(x-1)^2 + 1 > 0$ 和 $(x-1)^2 + 2 > 0$ 的解集都是 $\mathbf{R}$, 即 $M = N = \mathbf{R}$, 显然整理成标准形式后它们的同类项系数之比不相等. 故正确答案为 D.

15.【分析】本题考查集合、两圆位置关系等基本知识以及运算能力. 思路: 本题的关键词语是 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素, 这就启发我们两圆只有相切状态; 进一步联想, 相切又有外切和内切, 因此需分情况讨论.

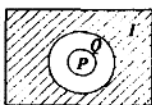
【解答】依题意, $A \cap B$ 中有且只有一个元素, 即两圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 外切或内切. (1) 若两圆外切, 则有 $(r+2)^2 = 3^2 + 4^2$, 解得 $r = 3$ 或 $r = -7$ (舍)

(2) 若两圆内切, 则有 $(r-2)^2 = 3^2 + 4^2$, 解得 $r = 7$ 或 $r = -3$ (舍). 故 $r = 3$ 或 7 .

【注意】两圆相切有两种情况: 内切和外切, 不要忽略任何一种.

16.【分析】本题考查集合之间的关系及集合运算的知识. 思路: 可借助文氏图来求解.

【解答】由 $P \subsetneq Q \subsetneq I$, 可得文氏图: 答图 1-3 则阴影部分为 $\complement_I Q$, 显然, 所求表达式为 $P \cap \complement_I Q$



答图 1-3

【注意】本题的答案不惟一, 也可填 $(\complement_I Q) \cap (P \cap Q)$ 或 $(\complement_I Q) \cap (P \cup Q)$.

17.【分析】本题考查了立体几何中的点共线、点共面和异面直线的基本知识以及命题变换判断真假的基本知识. 思路: 分别写出①②两命题的逆命题, 然后利用有关知识去判断.

【解答】命题①的逆命题是: “若四点中任何三点都不共线, 则这四点不共面.” 该命题是假命题, 如在正方体 AC_1 中, 下底面 $ABCD$ 中任何三点都不共线, 但 A, B, C, D 四点共面. 命题②的逆命题是: “若两条直线是异面直线, 则这两条直线没有公共点”. 由异面直线定义可得, 该命题正确, 故答②.

18.【分析】本题主要考查集合基本知识, 考查解对数方程和基本三角不等式的能力. 思路: 应先解对数方程和三角不等式, 然后求交集, 进而得到交集元素的个数.

【解答】由已知 A, 得 $\lg x^2 = \lg(8x-15)$. $\therefore x^2 - 8x + 15 = 0$.

解得 $x_1 = 3, x_2 = 5$. $\therefore A = \{x | x_1 = 3, x_2 = 5\}$. 又由 B, 得 $\cos \frac{x}{2} > 0$.

$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. $\therefore 4k\pi - \pi < x < 4k\pi + \pi$.

$\therefore B = \{x | 4k\pi - \pi < x < 4k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 当 $k = 0$ 时, $-\pi < x < \pi$. $\therefore A \cap B = \{x | x = 3\}$;

(2) 当 $k = 1$ 时, $3\pi < x < 5\pi$. $\therefore A \cap B = \emptyset$;

(3) 当 $k = -1$ 时, $-5\pi < x < -3\pi$. $\therefore A \cap B = \emptyset$.

故 $A \cap B$ 的元素个数为 1 个.

[注意] 本题虽小但内涵丰富, 蕴含着分类讨论思想和交集思想.

19.[分析] 本题主要考查集合的运算在二次不等式(组)解集中的正确表示. 注意不等式组的解集与交集是密切相关的.

[解答] $\because \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ 且 } g(x) < 0$, 依题意, $f(x) < 0$ 的解集为 P ,

$g(x) < 0$ 的解集为 C, Q , 故所求为 $P \cap C, Q$.

[注意] 集合运算在解不等式(组)中的应用, 特别是补集思想的运用.

20.[分析] 本题考查解不等式及集合的概念与运算. 思路: 先将集合 A, B 化简, 然后求 $A \cap B$, 最后利用集合的概念求解.

[解答] $A = \{x | |x| < 4\} = \{x | -4 < x < 4\}$. $B = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\} = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < 1\}$.

$\therefore A \cap B = \{x | -4 < x < 1, \text{ 或 } 3 < x < 4\}$, 借助于数轴可得:

$\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$.

[注意] 本题是集合与解不等式的小综合性题目, 在解题过程中应注意数形结合思想的运用.

21.[分析] 本题考查绝对值不等式、分式不等式的解法, 考查利用集合之间的关系去待定参数 a . 思路: 将 A, B 化简后利用集合知识求解.

[解答] 由 $|x - a| < 2$, 得 $a - 2 < x < a + 2$, $\therefore A = \{x | a - 2 < x < a + 2\}$, 由 $\frac{2x-1}{x+2} < 1$,

得 $\frac{2x-1}{x+2} - 1 < 0$, $\therefore \frac{x-3}{x+2} < 0$, 即: $-2 < x < 3$. $\therefore B = \{x | -2 < x < 3\}$.

$\therefore A \subseteq B$, $\therefore \begin{cases} a-2 \geq -2 \\ a+2 \leq 3 \end{cases} \therefore 0 \leq a \leq 1$.

[注意] 此题虽然 A 不可能为空集, 但在做这类题时要注意 A 有可能是空集的情况, 另解题中应注意数形结合思想的运用.

22.[分析] 本题主要考查集合的运算、对数性质、不等式解法及综合运用知识的能力. 分别解对数不等式和分式不等式, 化简集合 A, B , 再利用集合知识求解.

[解答] 由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq -2$, 得 $\begin{cases} 3-x > 0 \\ 3-x \leq 4 \end{cases}$, $\therefore -1 \leq x < 3$, $\therefore A = \{x | -1 \leq x < 3\}$. 由 $\frac{5}{x+2} \geq 1$, 得 $-2 < x \leq 3$, $\therefore B = \{x | -2 < x \leq 3\}$, $\therefore C_R A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

$\therefore C_R A \cap B = \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x = 3\}$.

[注意] 解对数不等式和分式不等式时一定要注意定义域.

23.[分析] 本小题主要考查集合、函数、不等式、绝对值等基础知识, 考查分析和判断能力.

[解答] 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$.

不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$\therefore x + |x - 2c| = \begin{cases} 2x - 2c, & x \geq 2c, \\ 2c, & x < 2c, \end{cases} \therefore$ 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R} \Leftrightarrow 2c > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}$.

如果 P 正确, 且 Q 不正确, 则 $0 < c \leq \frac{1}{2}$. 如果 P 不正确, 且 Q 正确, 则 $c \geq 1$;

所以 c 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.

[注意] 本题在解答过程中蕴含着分类讨论思想和转化思想.

第二章 函数

一、命题趋势与应试对策

(一) 命题趋势

高考试题要求全面考察高中数学的基础知识,但不可以追求知识的覆盖率,着重考察支撑学科知识体系的知识主干,因为函数是高中数学的核心内容,又是学习高等数学的基础,所以历来是高考的重点和热点问题.

在近5年新教材的考试中,本章知识的分值占全卷总分的12%左右.直接考查的有3—4个题,一般为1个大题3个小题.考查的内容较全面,函数的概念、性质、图像、最值、二次函数、指数函数、对数函数几乎是每年的必考内容,而且函数与方程的思想、数形结合的思想、分类讨论的思想、化归与转化的思想等基本数学思想方法的运用,在函数试题中均有体现.题目的难度一般是小题为容易题,大题为难题.

纵观近几年的高考试题,可以预测2005年有关函数的试题仍是有选择、填空形式的小型试题,也可能有大型的综合性试题,包括有探索、开放、综合应用、活而不难的新颖应用题型等.函数的综合题一般以一次函数、二次函数为载体,以考察函数的奇偶性、单调性为重点.函数的单调性问题除了可以用定义以外,还可以用导数去解,在函数与导数两知识网络的交汇点命题是近几年新课程试卷的特点.

(二) 应试对策

针对以上对近几年高考命题趋势的分析,提出以下应试对策:

1. 对函数这一章的内容要全面掌握,要深刻理解函数的有关概念,灵活运用函数的性质去分析问题.

2. 函数的图像不仅是函数的一种表达方式,也是理解函数概念、研究函数状态、发现函数性质的重要工具,为此有必要将散落于各章节中有关函数图像的变换法加以总结归纳.

3. 映射和反函数的内容基本掌握就可以了,不要做过高过高的要求.

4. 函数中的最值问题在高考中多次出现,是高考中的重要题型之一,应能掌握几种求最值的常用方法,如配方法、判别式法、均值定理等,而对于二次函数,应化为一次函数求最值.

5. 含参数函数的讨论问题是高考的热点问题,应高度重视,复习时宜适当加强,进行多种类型的训练,但不宜过于繁杂.

6. 要加强与函数有关的综合问题的训练,如有关一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、 $f(x) = x + \frac{c}{x} (c > 0)$ 型函数的综合问题;解析几何与函数的综合题等.

7. 对应用问题的准备,首先是掌握应用问题函数模型的构建,一方面要关心社会,了解社会,对环保、交通、税收、工农业产品的生产、销售等诸方面问题要熟悉,另一方面可以有意识地针对性的做一些练习.

8. 导数在有关函数单调性、最值的问题中广泛应用,要掌握用导数解函数综合问题,多做些练习是必要的.

二、试题类编

(一) 选择题

1. ('04 天津)若函数 $f(x) = \log_a x (0 < a < 1)$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最大值是最小值的3倍,则 $a =$ ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

2. ('04 天津) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π , 且当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) = \sin x$, 则 $f(\frac{5\pi}{3})$ 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. ('04 江苏) 某校为了了解学生的课外阅读情况, 随机调查了 50 名学生, 得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据, 结果用右侧的条形图表示. 根据条形图 2-1 可得这 50 名学生这一天平均每人的课外阅读时间为 ()

A. 0.6 小时

B. 0.9 小时

C. 1.0 小时

D. 1.5 小时

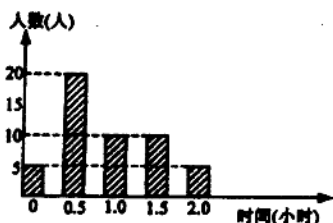


图 2-1

4. ('04 北京) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是 ()

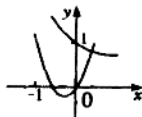
A. $a \in (-\infty, 1]$

B. $a \in [2, +\infty)$

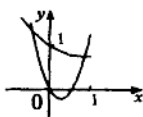
C. $a \in [1, 2]$

D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

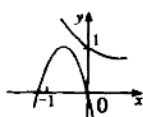
5. ('96 上海) 在下列图像中, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 与指数函数 $y = (\frac{b}{a})^x$ 的图像只可能是 ()



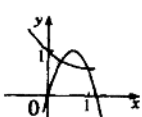
A



B



C



D

6. ('97 全国) 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数, 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像重合. 设 $a > b > 0$, 给出下列不等式:

① $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$

② $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$

③ $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$

④ $f(a) - f(-b) < g(b) - g(-a)$

其中成立的是

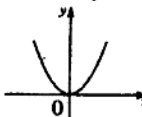
A. ①与④

B. ②与③

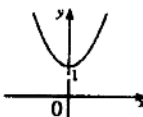
C. ①与③

D. ②与④

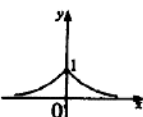
7. ('98 全国) 函数 $y = a^{x-1}$ ($a > 1$) 的图像是 ()



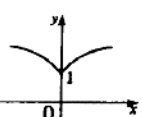
A



B



C



D

8. ('99 全国) 已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

9. ('00 全国) 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

10. ('01 全国) 若定义在区间 $(-1, 0)$ 内的函数 $f(x) = \log_{2a}^{(x+1)}$ 满足 $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(0, \frac{1}{2}]$

C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

11. ('01 全国) 函数 $y = 2^{-x} + 1$ ($x > 0$) 的反函数是 ()

()

A. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$

B. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$

C. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

D. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

12. ('01 全国) 设 $f(x), g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题:①若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;②若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;③若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;④若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减.

其中正确的命题是

()

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

13. ('01 北京春) 函数 $f(x) = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 对于任意的实数 x, y 都有

()

A. $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

B. $f(xy) = f(x) + f(y)$

C. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

D. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

14. ('01 北京春) 已知 $f(x^6) = \log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于

()

A. $\frac{4}{3}$

B. 8

C. 18

D. $\frac{1}{2}$

15. ('02 全国) 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值的和为 3, $a =$

()

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. 4

D. $\frac{1}{4}$

16. ('02 全国) 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有

()

A. $\log_a(xy) < 0$

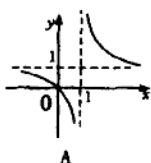
B. $0 < \log_a(xy) < 1$

C. $1 < \log_a(xy) < 2$

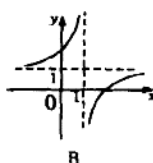
D. $\log_a(xy) > 2$

17. ('02 全国) 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ 的图像是

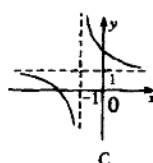
()



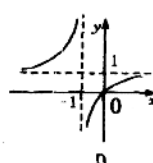
A



B



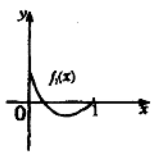
C



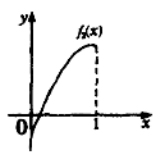
D

18. ('02 北京) 如图所示, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ 恒成立” 的只有

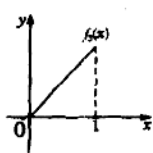
()



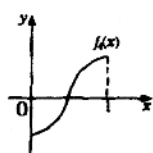
A



B



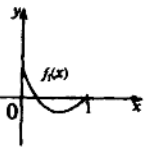
C



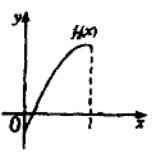
D

19. ('02 北京) 如图所示, $f_i(x) (i=1, 2, 3, 4)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , 任意 $\lambda \in [0, 1]$, $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立” 的只有

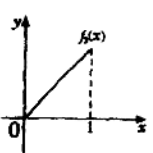
()



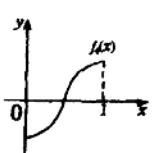
A



B



C



D

A. $f_1(x), f_3(x)$ B. $f_2(x)$ C. $f_2(x), f_3(x)$ D. $f_4(x)$

20. ('02 上海)一般地,家庭用电量(千瓦时)与气温($^{\circ}\text{C}$)有一定的关系,如图 2-2 所示,图(1)表示某年 12 个月中每月的平均气温,图(2)表示某家庭在这年 12 个月中每个月的用电量,根据这些信息,下列关于该家庭用电量与其气温间关系的叙述中,正确的是 ()

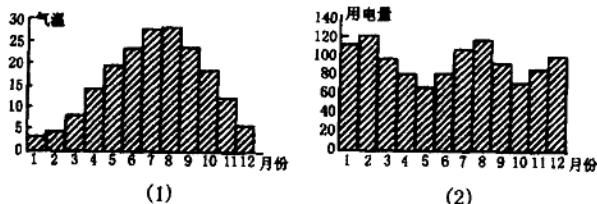


图 2-2

- A. 气温最高时,用电量最多
 B. 气温最低时,用电量最少
 C. 当气温大于某一值时,用电量随气温增高而增加
 D. 当气温小于某一值时,用电量随气温渐低而增加

21. ('02 河南)函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$

- A. 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递增
 B. 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递减
 C. 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增
 D. 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减

22. ('03 全国)已知 $f(x^5) = \lg x$, 则 $f(2) =$

- A. $\lg 2$
 B. $\lg 32$
 C. $\lg \frac{1}{32}$
 D. $\frac{1}{5} \lg 2$

23. ('03 全国)设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1)$
 B. $(-1, +\infty)$
 C. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
 D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

24. ('03 江苏)函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}, x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()

- A. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in (0, +\infty)$
 B. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in (0, +\infty)$
 C. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in (-\infty, 0)$
 D. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in (-\infty, 0)$

25. ('03 上海春)关于函数 $f(x) = \sin^2 x - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$, 有下面四个结论:

- (1) $f(x)$ 是奇函数
 (2) 当 $x > 2003$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立
 (3) $f(x)$ 的最大值是 $\frac{3}{2}$
 (4) $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$

其中正确结论的个数为

- A. 1 个
 B. 2 个
 C. 3 个
 D. 4 个

26. ('03 北京春)若 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x) = x$ 的根是 ()

- A. -2
 B. 2
 C. $-\frac{1}{2}$
 D. $\frac{1}{2}$

27. ('03 北京春)函数 $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{4}{5}$
 B. $\frac{5}{4}$
 C. $\frac{3}{4}$
 D. $\frac{4}{3}$

28. ('03 北京) 设 $y_1 = 4^{0.9}$, $y_2 = 8^{0.48}$, $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$, 则 ()

A. $y_3 > y_1 > y_2$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_1 > y_2 > y_3$ D. $y_1 > y_3 > y_2$

29. ('03 上海) 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0, \pi)$ 上单调递增的是 ()

A. $y = \tan|x|$ B. $y = \cos(-x)$ C. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = \left|\cot \frac{x}{2}\right|$

30. ('03 上海) 在 $P(1, 1)$, $Q(1, 2)$, $M(2, 3)$ 和 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 四点中, 函数 $y = a^x$ 的图像与其反函数的图像的公共点只可能是点 ()

A. P B. Q
C. M D. N

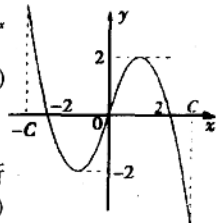


图 2-3

31. ('03 上海) $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图像如图 2-3 所示. 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ()

A. 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称
B. 若 $a = 1, 0 < b < 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
C. 若 $a = -2, b = 0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于 y 轴对称
D. 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实根

32. ('03 全国春) 设函数 $f(x) (x \in \mathbf{N})$ 表示 x 除以 3 的余数, 对 $x, y \in \mathbf{N}$ 都有 ()

A. $f(x+3) = f(x)$ B. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ C. $3f(x) = f(3x)$ D. $f(x)f(y) = f(xy)$

33. ('03 北京春) 函数 $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = x(2-x)$ 的递增区间依次是 ()

A. $(-\infty, 0], (-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 0], [1, +\infty)$
C. $[0, +\infty), (-\infty, 1]$ D. $[0, +\infty), [1, +\infty)$

(二) 填空题

34. ('04 江苏) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (x \in \mathbf{R})$ 的部分对应值如下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是_____.

35. ('04 全国) 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$. 设 $f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 则 $g(-8) =$ _____.

36. ('04 北京) 在函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中, 若 a, b, c 成等比数列且 $f(0) = -4$, 则 $f(x)$ 有最_____值(填“大”或“小”), 且该值为_____.

37. ('00 上海) 函数 $y = \log_2 \frac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为_____.

38. ('00 上海) 已知 $f(x) = 2^x + b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y = f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $Q(5, 2)$, 则 $b =$ _____.

39. ('00 上海) 设函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0, 1]$ 上的图像为如图 2-4 所示的线段 AB, 则在区间 $[1, 2]$ 上 $f(x) =$ _____.

40. ('01 上海春) 若记号 “ $*$ ” 表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算, 即 $a * b = \frac{a+b}{2}$, 则两边均含有运算符号 “ $*$ ” 和 “ $+$ ”, 且对于任意 3 个实数 a, b, c 都能成立的一个等式可以是_____.

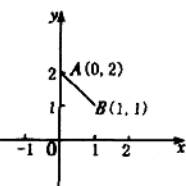


图 2-4

41. ('01 上海) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \log_6 x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, 则满足 $f(x) = \frac{1}{4}$ 的 x 值为_____.

42. ('01 上海) 据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 图 2-5 中 (1) 表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在图 2-5 中 (2) 中图示为:

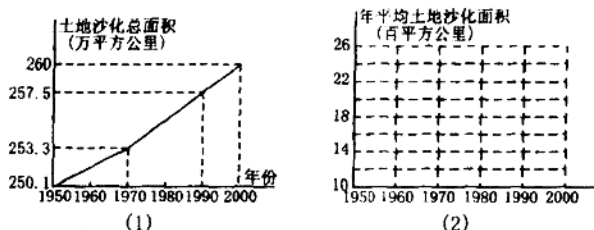


图 2-5

43. ('02 全国) 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, 1985 年到 2000 年间, 我国农村人均居住面积如图 2-6 所示, 其中从 _____ 年到 _____ 年的五年间增长最快.

44. ('02 全国) 函数 $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值和为 3, 则 $a =$ _____.

45. ('02 全国) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, 那么 $f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) =$ _____.

46. ('02 上海春) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_3(1+x)$, 则 $f(-2) =$ _____.

47. ('02 全国) 函数 $y = \frac{2x}{1+x} [x \in (-1, +\infty)]$ 图像与其反函数图像的交点坐标为 _____.

48. ('02 上海) 已知函数 $y = f(x)$ (定义域为 D , 值域为 A) 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 有解 $x = a$, 且 $f(x) > x (x \in D)$ 的充要条件是 $y = f^{-1}(x)$ 满足 _____.

49. ('02 天津) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 下列函数: ① $y = -|f(x)|$ ② $y = xf(x^2)$ ③ $y = -f(-x)$ ④ $y = f(x) - f(-x)$ 中必为奇函数的有 _____ (要求填写正确答案的序号)

50. ('03 北京春) 若存在常数 $p > 0$, 使得函数 $f(x)$ 满足 $f(px) = f\left(px - \frac{p}{2}\right) (x \in \mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 的一个正周期为 _____.

51. ('03 上海春) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 $f^{-1}(3) =$ _____.

52. ('03 上海春) 若函数 $y = x^2 + (a+2)x + 3, x \in [a, b]$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $b =$ _____.

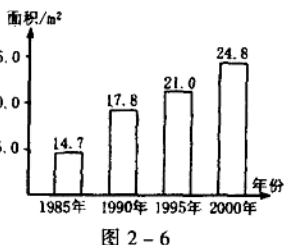


图 2-6

(三) 解答题

53. ('04 辽宁) 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a) (a > 0)$.

(I) 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;

(II) 假设对任意 $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$, 不等式 $|m - f^{-1}(x)| + \ln(f'(x)) < 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

54. ('04 北京) 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的增函数, 满足 $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ 且 $f(1) = 1$, 在每个区间 $\left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right] (i = 1, 2, \dots)$ 上, $y = f(x)$ 的图像都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分.

(I) 求 $f(0)$ 及 $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$ 的值, 并归纳出 $f\left(\frac{1}{2^i}\right) (i = 1, 2, \dots)$ 的表达式

(II) 设直线 $x = \frac{1}{2^i}, x = \frac{1}{2^{i-1}}, x$ 轴及 $y = f(x)$ 的图像围成的矩形的面积为 $a_i (i = 1, 2, \dots)$, 记 $S(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, 求 $S(k)$ 的表达式, 并写出其定义域和最小值.

55. ('04 辽宁) 甲方是一农场, 乙方是一工厂. 由于乙方生产须占用甲方的资源, 因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入. 在乙方不赔付甲方的情况下, 乙方的年利润 x (元)

与年产量 t (吨) 满足函数关系 $x = 2000\sqrt{t}$.

若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元(以下称 s 为赔付价格),

(I) 将乙方的年利润 w (元) 表示为年产量 t (吨) 的函数, 并求出乙方获得最大利润的年产量;

(II) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y = 0.002t^2$ (元), 在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下, 甲方要在索赔中获得最大净收入, 应向乙方要求的赔付价格 s 是多少?

56. ('04 全国) 某村计划建造一个室内面积为 800m^2 的矩形蔬菜温室. 在温室内, 沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1m 宽的通道, 沿前侧内墙保留 3m 宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时, 蔬菜的种植面积最大? 最大种植面积是多少?

57. ('97 全国) 甲、乙两地相距 $S\text{km}$, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过 $c\text{km/h}$. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 $v(\text{km/h})$ 的平方成正比, 比例系数为 b ; 固定部分为 a 元.

(1) 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 $v(\text{km/h})$ 的函数, 并指出这个函数的定义域;

(2) 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

58. ('00 全国) 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图 2-7(1) 的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 2-7(2) 的抛物线段表示.

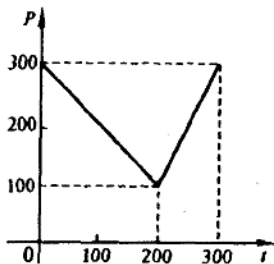


图 2-7(1)

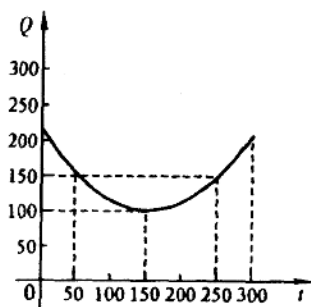


图 2-7(2)

(1) 写出图(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P = f(t)$;

写出图(2)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q = g(t)$;

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?

(注: 市场售价和种植成本的单位: 元/ 10^2kg , 时间单位: 天)

59. ('01 天津) 设 $a > 0$, $f(x) = \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

60. ('01 上海) 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药量的 $\frac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用 x 单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为函数 $f(x)$.

(1) 试规定 $f(0)$ 的值, 并解释其实际意义;

(2) 试根据假定写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;

(3) 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 现有 a ($a > 0$) 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次, 试问用哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少? 说明理由.

61. ('02 全国) 设函数 $f(x) = x^2 + |x-2| - 1$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;