

应用随机过程教程

及在算法和智能计算中的
随机模型

龚光鲁 钱敏平 著

清华大学出版社

龚光鲁 钱敏平 著

应用随机过程教程

及在算法和智能计算中
的随机模型

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书概述了应用随机过程的基本内容以及近代的重要进展与重要方法,且并不要求读者具有测度论的知识,在使用不严格的推理的情况下,遵循强调想法、背景与思路的原则,尽力做到理论与算法兼顾。

全书共分 17 章,内容包括概率论精要回顾与补充、随机样本生成法、随机过程的一般概念与独立增量过程、更新现象及其理论、离散时间的 Markov 链、连续时间的 Markov 链、排队过程简介、Markov 链 Monte Carlo 方法、以图像信息为背景的随机场与迭代 Markov 系统以及 Bayes 统计方法、隐 Markov 模型及其应用、Gauss 系二阶矩过程与时间序列、连续状态的 Markov 过程、鞅 Itô 积分与随机微分方程、金融证券未定权益的定价、随机过程在精算与风险模型中的应用、与数据建模有关的几个算法、离散状态的 Markov 控制与决策过程简介、Poisson 随机分析简介与典型的点过程。

本书的内容是随机建模的基本工具,适合于作为理、工及管理学科的本科高年级学生和研究生教材或参考书;也是教师、研究人员以及使用应用随机过程分析数据资料工作者的重要参考书。

在前言中,我们对首次讲授(或阅读)此书的读者给出了关于阅读内容的一些建议。

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程教程及在算法和智能计算中的随机模型/龚光鲁,钱敏平著. —北京:清华大学出版社, 2004

ISBN 7-302-06948-4

I. 应… II. ①龚… ②钱… III. 随机过程—高等学校—教材 IV. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 066280 号

出 版 者: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

客户服务: 010-62776969

责任编辑: 刘 颖

封面设计: 常雪影

版式设计: 刘祎森

印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×230 印张: 30.25 字数: 600 千字

版 次: 2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06948-4/O · 313

印 数: 1~4000

定 价: 42.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

前言

作者在5年前向读者奉献了一本教科书《应用随机过程》，它是由北京大学出版社出版的。那本书主要是为理科，特别是为数学与概率统计专业学生而设计的。该书与当时市面上的应用随机过程教科书相比，其长处在于着重强调随机过程在各科学领域的新应用，提供了不少在应用领域中用随机过程建模的例子。

然而，当作者之一向工科研究生与高年级本科生授课时，发现此教材开始所涉及的内容，以及后面章节中的个别内容对初学者颇为艰难。另一方面，顾及工科、经济类、管理类等领域不同读者对象的需要，我们想到应该更多地扩展与应用方面有关的内容、模型与概念，甚至应该介绍一些常用的算法，即使这些算法不全是直接出自随机过程。凡此考虑，就成为我们再写一本主要为工科及经管学科设计的《应用随机过程教程》教材的动机。

本书是为广大的工科、理科非数学专业、应用数学的非概率统计方向、医学、心理、经济金融等诸多领域的本科生、研究生、教师、研究人员、工程师、设计师等撰写的。在本书中，我们并不假定读者知道测度论的知识。鉴于选用本书的对象对概率统计的了解程度不一致，根据读者的建议，我们在本书中把与应用随机过程有关的概率统计的基本要点（但并不完全概括一般概率统计课程所涉及的内容），略去其证明与概念的解释，写成一个纲要作为第1章，以使使用者能“在线的”温习与查阅。但是，我们在第1章中所引述的内容，在个别地方比一般工科概率论的基本课程的要求略为超出一些，这是为一些有余力的读者准备的，以使这一部分读者能得到更深一些的领会。我们建议使用本书的教师，

不要把第 1 章放在应用随机过程课程的教学内容中,而只把它作为学习其他章节时的参考复习材料.

由于我们希望有较宽的适应性,本书与某些针对个别专门方向应用的应用随机过程教科书相比,增加了不少内容.当然我们也舍去了或改写了某些经典的内容,例如关于平稳过程的遍历论与宽平稳过程的谱理论等,我们并没有展开,而是只作了必要的论述.我们冀望使用本书授课的教师和自学的读者,可以根据学生或读者自身的情况与需要,把本书的素材分成几个不同的层次,选用其中的一部分或几个部分,即尽量不要把本书当作“套餐”(menu du jour),而努力把它作为“点菜”(à la carte)的菜单.在使用本书学习时,要学会熟悉本书的目录与符号表,经常浏览并翻阅本书最后所附的名词索引,以便能更好地使用“点菜技术”.需要强调的是,由于作者希望本书包含一些常见的应用层面,以及经过简化后的典型应用例子,并由此安排分析它们的各种工具或算法,这就使本书的某些内容不可能完全按照一维的次序展开,也就不可避免地会出现材料使用上的交叉.特别地,在后面的几章中就明显地出现了这种交叉.这就使“点菜技术”更有必要.

本书中带 * 的部分和小字的部分,只是用作参考与注释,初读时可以略去.不要因为它们而影响讲授或学习的主线.

本书的撰写原则是:强调想法、背景与思路.为了便于读者理解,对于命题与定理,我们只给出简单的证明,或者直观的证明,而不追究其严格性.对于非常重要的内容,例如 Markov 链的与初始值无关的遍历定理,我们不吝冗余,在各种不同的情形下反复叙述它的各种形式,以使原来并不熟悉的读者能逐步领会其实质.随着内容的逐步发展,我们也加进了一些要求数学背景较多的概念与论述.对此感到不习惯或者并不需要的读者,完全可以跳过它们,或者代之以更直观的理解.

本书的第 1 章是复习材料.第 2 章是通向实际模拟计算的桥梁.第 3 章,第 5 章,第 6 章和第 12 章是基本理论.第 4 章,第 7 章,第 8 章,第 9 章,第 11 章,第 13 章和第 16 章是应用基本理论.第 10 章和第 15 章是应用中成效卓著的最常见算法,第 14 章是应用.第 17 章则是拓广性的介绍.更具体地,我们把本书的材料组织如下:第 1 章是概率论与数理统计复习.第 2 章讲述典型分布的随机数的生成方法,这是 Monte Carlo 算法(即随机模拟算法)的基础.第 3 章阐述随机过程的一般概念,及独立增量过程的重要的例子,包括 Poisson 过程, Brown 运动与离散的随机徘徊.第 4 章介绍更新过程,它是一种在应用中常见的计数随机过程.在本章中,我们以解释概念为主,较少论及证明.第 5 章

是离散时间的 Markov 链. 我们从更新序列返回的周期现象来理解 Markov 链的常返态的周期性. 在本章中论述 Markov 链的极限性质时, 采取了与传统著作中不同的方法, 用转移矩阵的平均极限作为支点, 避免了细致繁琐的讨论, 这一章的侧重点是可逆性和不变分布, 用以求非周期的正常返不可约 Markov 链的平稳分布. 由此得到的 Markov 链的遍历性定理是与 Markov 链的初始状态无关的, 这就满足了统计物理中的“各态历经性”的要求. 第 6 章是连续时间的 Markov 链, 它在我国学术界有一个特殊的称谓, 即所谓 Q 过程. 在实际应用中, 连续时间的 Markov 链比离散时间的 Markov 链更为常见. 在应用问题中, 其转移概率速率矩阵 Q 是常常可以实际测量到的. 在相当一般的条件下(这些条件在实际应用中总是能满足的), 可逆分布和平稳分布所满足的方程都可以由转移速率阵 Q 表达. 这一章的侧重点也是可逆性和不变分布, 用以求时间连续的 Markov 链的平稳分布, 并得到与 Markov 链的初始状态无关的遍历性定理. 第 7 章介绍排队理论梗概. 主要点是了解这类问题的提法与关心的问题. 第 8 章阐述 Markov 链 Monte Carlo 方法, 其主要功能是对非常高维数的随机向量作取样. 着重介绍了 Gibbs 取样法与 Metropolis 取样法及其理论依据. 最后讲述了优化的模拟退火的基本思想. 第 9 章致力于以图像处理为背景的随机场. 在叙述时间离散状态连续的 Markov 链的基础上, 简要地介绍了用随机迭代系统方法处理图像. 最后还介绍了 Bayes 统计的主要思想. 第 10 章论述近代在语音识别, 手写体文字识别, DNA 序列信息采挖等实际问题中广有成效的隐 Markov 模型, 分析了这种模型的优点与它在应用中的潜力. 在叙述用它建模的有效算法时, 着重指出其与 EM 算法的联系. 第 11 章在论述 Gauss 系的基础上, 从应用的角度阐述了时间序列的各种常用的模型, 着重于介绍算法. 第 12 章是向基本理论的回归, 其内容包括 Markov 过程, 鞅论浅介, 随机微分方程与扩散过程的要义, 这是近年来在应用中极为活跃的建模工具. 最后还提供了随机微分方程的数值近似解法. 第 13 章论及金融数学中的证券模型与其衍生金融工具的定价. 特别介绍了二叉模型与随机利率的期限结构. 第 14 章着重介绍保险中的集体风险理论. 第 15 章介绍各种算法, 主要包括 EM 算法, 人工神经网络, 遗传算法, Kohonen 自组织算法, 自适应算法, 适应最小二乘法. 第 16 章给离散时间的 Markov 决策以一个概括性的陈述. 第 17 章介绍 Itô 随机微积分的推广, 主要是 Poisson 过程的随机微积分, 它对处理电子学, 金融经济学中的一些理论问题, 是一个很有用的工具. 最后还扼要地介绍自激点过程.

为了查阅方便, 本书对定理, 定义, 引理, 命题, 例子等, 都采用统一的编号系统.

由于本书篇幅较大,我们建议一些初学的基本内容:例如,第3章,第4章的第1节,第3.2小节,第4.1小节;第5章;第6章;第7章的第1节和第2节,第3.2小节;第9章的第2节;第10章的第1节和第2节;第11章的第1节到第5节;第12章的第1节至第3节,第4.1小节.

我们把应用方面的学习内容,留给授课的教师与自学的读者,让他们根据需要选取.

本书主要章节后面的习题是这样配置的:第1章后设置一些复习题.因为第3章至第6章,第11章和第12章是主体,所以安排了较多的习题,第2章,第7章,第9章也附有一些习题,而对第8章,第10章与第13章,则仅有少量习题.此外,第17章也有一些习题.

本书与我们献给教育界的前一本书一样,同样以强调应用作为宗旨.希望应用随机过程的思想方法,能成为各界朋友在实践与应用中有力的思维与建模工具.我们希望各界朋友能提供反馈的意见与不同的观点,以及适合在教学中运用的材料,以便在本书再版时,能够在各界朋友的帮助下,更上一个台阶.

以应用为背景的随机过程,已经经过了近百年的发展,从各个领域应用中萃取出的典型模型,典型方法,在一本入门的教科书中是难以概括的.况且,哪一些材料,哪一些思想更值得选取,也没有判断标准.作者希望自己的判断尽量与实际接近.对于应用例子,我们也不可能写得很具体,而只指出一些思路,更多的填补与链接,需要读者自己去完成.本书撰写的理念,是以国际前沿为目标的,在这方面,我们更需要各领域使用者的合作.

清华大学数学科学系 龚光鲁 glgong@math.tsinghua.edu.cn

北京大学数学科学院 钱敏平 qianmp@math.pku.edu.cn

符号说明

1

分量全是 1 的列向量

 $a \vee b, a \wedge b$ a, b 两个数中的大者和小者 a^+, a^- $a^+ = a \vee 0, a^- = a \wedge 0$ B_t

Brown 运动

 $\text{cov}(\xi, \eta)$ 两个随机变量 ξ, η 的协方差 $E_i \eta = E(\eta | \xi_0 = i), P_i(A) = P(A | \xi_0 = i)$ $\exp_\lambda$ 参数为 λ (均值为 $\frac{1}{\lambda}$) 的指数分布 I

单位矩阵

 $\Gamma(\alpha, \lambda)$ Γ 分布 $N(\mu, \sigma^2)$

正态分布

 $U[a, b]$ $[a, b]$ 上的均匀分布 $E\xi, \text{var}(\xi)$ 随机变量 ξ 的数学期望和方差def

定义为

 $\xi \xrightarrow{d} \eta$ ξ 与 η 同分布 $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$

依概率收敛

 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

依分布收敛

 $\xi_n \xrightarrow{\text{a. e.}} \xi$ 随机事件 $\{\omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}$ 的概率为 1 $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$ 均方收敛: $E|\xi_n - \xi|^2 \rightarrow 0$ δ_{ij} Kronecker 记号, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$\mathfrak{G}$	σ 代数(事件体)
$P(A B), P(A \eta), E(\xi \eta)$	条件概率, 条件期望
I_A	事件 A 的示性函数, $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$
$\ \xi\ \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{E\xi^2}$	
$\Phi(\xi)$: 随机变量族 $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_\alpha: \alpha \in I\}$ 中任意有限个元素的任意有界连续函数全体组成的集合	
$\overline{\Phi(\xi)}$: 包含 $\Phi(\xi)$ 且对 L^2 收敛性封闭的最小集合	
$\text{Proj}_{\overline{\Phi(\xi)}} \eta, \text{Proj}_{\overline{L(\xi)}} \eta$: η 在空间 $\overline{\Phi(\xi)}, \overline{L(\xi)}$ 上的投影	
L^2 : 平方可积的随机变量的空间, $L^2 = \{\xi: E\xi^2 < \infty\}$	
$L(\xi)$: 随机变量族 $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_\alpha: \alpha \in I\}$ 的线性包(任意有限线性组合的集合)	
$\overline{L(\xi)}$: 包含 $L(\xi)$, 且对于均方极限封闭的最小集合	
$(\Omega, \mathfrak{G})$	样本空间
$P(x, A)$	转移概率, $P(x, A) = E(\xi_1 \in I_A \xi_0 = x)$
$p_\xi(x \eta=y), p_{\xi \eta}(x y)$	条件密度
Poisson_λ	参数为 λ 的 Poisson 分布
$\rho_{\xi\eta}$	随机变量 ξ, η 的(线性)相关系数
$R(k)$	平稳随机序列的相关序列, $R(k) = E(\xi_n \xi_{n+k})$
$\mathbf{R}^d, \mathbf{R}$	d 维 Euclid 空间, 欧氏直线
s^2	样本标准差
$\mathbf{x}, (\mathbf{x})^T$	列向量与其转置
$\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$	所有的分量都不大于
$\mathbf{Z}^d, \mathbf{Z}$	d 维整数格点, 一维整数格点

目 录

前言	1
符号说明	19
第 1 章 概率论精要回顾与补充	1
1 基本框架与典型分布	1
1.1 概率	1
1.2 随机变量	1
1.3 d 维随机向量	3
1.4 独立性	3
1.5 Chebyshev 不等式	4
1.6 基本极限与基本极限定理(大数定律与中心极限定理)	4
1.7 典型分布	7
1.8 次序随机变量的分布	11
2 条件概率、条件分布、条件(数学)期望	11
2.1 条件概率	11
2.2 条件分布	12
2.3 条件(数学)期望	13
2.4 期望与方差的 Wald 等式	17
3 统计简要	19
3.1 用样本作矩估计	19
3.2 最大似然估计	19
3.3 线性模型的最小二乘估计及其推广	20
习题 1	21

第 2 章 随机样本生成法	28
1 一维随机数	28
1.1 均匀随机变量的计算机模拟	28
1.2 分布函数 $F(x)$ 的随机数	28
1.3 正态随机数	29
1.4 Poisson 随机数	30
1.5 混合分布随机数	30
1.6 Von Neuman 取舍原则	31
1.7 Gamma 随机数与 Beta 随机数的生成	32
2 多维随机数	33
2.1 连续型多维随机数	33
2.2 离散型多维随机数	33
2.3 多维正态随机数	33
2.4 多维 Beta 随机数 (Dirichlet 随机数) 的生成	34
* 3 附录——用 Matlab 生成随机数	34
3.1 Matlab 语言的简单提示	34
3.2 Matlab 生成随机数的语句	36
习题 2	38
 第 3 章 随机过程的一般概念与独立增量过程	 40
1 一般概念	40
1.1 随机过程与有限维分布族	40
1.2 独立增量过程	40
2 Poisson 过程与复合 Poisson 过程	41
2.1 事故申报次数的概率模型与 Poisson 过程	41
2.2 Poisson 过程与指数流的关系	43
2.3 与指数流有关的一些随机变量与分布	46
2.4 常见的推广	49
2.5 复合 Poisson 过程	50
3 Brown 运动 (Wiener 过程) 及其函数	51
3.1 历史背景与物理模型	51
3.2 Brown 运动 (数学模型)	53
3.3 Brown 运动的简单性质	54

3.4	Brown 运动的反射原理及首达性质	55
3.5	与 Brown 运动有关的几个简单随机过程	58
3.6	漂移 Brown 运动	59
3.7	几何 Brown 运动	60
4	简单随机徘徊	60
4.1	双侧吸收壁的吸收概率	61
4.2	随机徘徊的对称原理	62
4.3	随机徘徊的首达时刻	62
4.4	简单随机徘徊与首达时	63
	习题 3	65

第 4 章	更新现象及其理论	68
1	Stieltjes 积分简述	68
2	更新过程的概念	69
2.1	作为 Poisson 过程推广的更新过程	69
2.2	更新函数的更新方程	71
2.3	年龄与剩余寿命	73
3	更新定理与更新次数的正态近似	75
3.1	更新定理	75
* 3.2	更新过程的正态近似	75
* 3.3	Blackwell 定理与主更新定理	76
3.4	更新间隔为正整值随机变量的更新过程	77
4	更新过程的变种模型	77
4.1	交错更新过程	77
4.2	延迟更新过程	78
4.3	带酬更新过程	78
5	再生过程与其相系的更新过程	79
5.1	再生过程的概念	79
5.2	与再生过程相系的更新过程	80
5.3	比例极限定理在再生过程中的应用	80
5.4	存储模型的一个例子	81
* 6	Erlang 更新过程	82
6.1	Erlang 更新过程的定义	82

6.2 Erlang 更新过程的矩母函数	83
习题 4	84
第 5 章 离散状态 Markov 链	86
1 Markov 链的概念	86
1.1 定义与 Markov 性质	86
1.2 概率转移矩阵	88
1.3 时齐的 Markov 链	89
1.4 Markov 链的例	90
2 Markov 链的状态分类	94
2.1 首达分解、 n 步转移概率的递推式、矩母函数、常返性	94
2.2 常返性再访与 Markov 链的基本结构	98
2.3 平均回访时间与正常返性	101
3 Markov 链的转移概率的极限与不变分布	102
3.1 不变分布与平稳 Markov 链	102
3.2 有限状态 Markov 链的不变分布与极限分布	102
3.3 转移矩阵的平均极限	105
4 Dobrushin 不等式与指数收敛性	107
4.1 Dobrushin 不等式	107
4.2 Dobrushin 收敛定理	108
5 与常返态相系的延迟更新流,互通常返 Markov 链的极限定理	109
5.1 与常返态相系的延迟更新流	109
5.2 互通常返链的极限定理	109
6 停时与强 Markov 性	114
6.1 停时	114
6.2 强 Markov 性	114
7 禁忌概率与首达分布	115
7.1 禁忌概率	115
7.2 首达时与首达分布	115
7.3 禁忌概率,首达分布与平均首达时间	115
8 可逆 Markov 链与可逆分布	117
8.1 可逆 Markov 链	117
8.2 例	118

8.3 可逆初分布存在性判别法	119
9 分支 Markov 链(Galton-Watson 简单分支过程)	120
习题 5	123
第 6 章 连续时间的 Markov 链	129
1 连续时间的 Markov 链及其转移矩阵	129
1.1 连续时间的 Markov 链的定义及等价性叙述	129
1.2 连续时间的 Markov 链概率转移矩阵	129
1.3 连续时间的时齐的 Markov 链	130
2 Poisson 过程与复合 Poisson 过程再访	131
3 由转移速率矩阵确定连续时间的 Markov 链	133
3.1 Kolmogorov 方程及 Master 方程	133
3.2 转移速率矩阵的概率含义	134
4 连续时间的 Markov 链的极限分布	135
4.1 连续时间的 Markov 链的转移矩阵的平均极限	135
4.2 连续时间的 Markov 链的极限分布	135
5 连续时间的 Markov 链的转移矩阵 $P(t)$ 的不变分布	137
5.1 连续时间的 Markov 链的转移矩阵 $P(t)$ 的不变分布 与其嵌入链的不变分布	137
5.2 连续时间的 Markov 链的遍历极限	138
5.3 对称的与可逆的连续时间的 Markov 链	139
6 例	140
6.1 连续时间分支过程	140
6.2 有限格点上的 Ising 模型与 Gauber 动力学	142
6.3 生灭类过程	143
6.4 系统与有效度	149
7 连续时间的 Markov 链的模拟与加速收敛	156
7.1 连续时间的 Markov 链的模拟	156
7.2 加速收敛的均匀化方法	156
习题 6	156
第 7 章 排队过程简介	160
1 排队过程的描述	160

1.1	排队系统	160
1.2	排队系统的一般框图,输入过程与输出过程	160
1.3	可逆性引理	161
2	最简单排队过程——Markov 排队过程	161
2.1	最简单的排队过程—— $M/M/1$ 系统	161
2.2	N 个服务员的简单排队过程—— $M/M/N$ 系统	163
* 2.3	序贯排队与排队网络系统	166
2.4	$M/M/\infty$ 排队系统	167
3	排队系统的一般概念	169
3.1	关于排队论的一般注记	169
3.2	$M/M/N$ 消失制	170
* 3.3	$M/G/1$ 排队系统	171
* 3.4	$G/M/1$ 排队系统	174
3.5	关于 $M/G/\infty$ 系统的注记	176
* 4	半 Markov 过程	177
4.1	半 Markov 过程的定义	177
4.2	半 Markov 过程的渐近性质	178
* 5	有限位相型分布(PH-分布)	179
5.1	背景	179
5.2	有限位相型分布(PH-分布)	179
5.3	离散 PH-分布	182
5.4	PH-分布类的封闭性	183
习题 7		184
第 8 章	Markov 链 Monte Carlo 方法	186
1	计算积分的 Monte Carlo 方法与采样量估计	186
1.1	用频率估计概率来计算积分的 Monte Carlo 方法	186
1.2	用样本函数的平均值估计的期望来计算积分的 Monte Carlo 方法——期望法	188
1.3	减少方差的技术	189
2	Markov 链 Monte Carlo	191
2.1	Gibbs 采样法	192
2.2	Metropolis 采样法	194

2.3 通过条件分布对分布 π 作随机采样的 Gibbs 方法	197
2.4 MCMC 应用于 Bayes 参数估计	201
3 模拟退火	203
3.1 模拟退火方法的基本想法	203
3.2 有关模拟退火算法的非时齐马氏链的理论背景	205
习题 8	208
第 9 章 以图像信息为背景的随机场 迭代 Markov 系统	209
1 有限格点上的 Markov 随机场与图像	209
1.1 有限格点上的 Markov 随机场	209
1.2 相邻系统的 Gibbs 分布与 Gibbs 随机场(∂ -邻位势 Gibbs 场)	211
1.3 图像处理的随机过程方法的思路原则概述	213
1.4 Gibbs 分布的样本的 Gibbs 采样法	214
1.5 Gibbs 分布的模拟退火	216
2 时间离散状态连续的 Markov 链	218
2.1 概率空间再访	218
2.2 时间离散状态连续的 Markov 链	219
2.3 概率转移核	221
2.4 时齐的连续状态 Markov 链	222
2.5 例	223
2.6 寻找 $\mathbb{R}^d$ 上可微函数 $f(x)$ 的最小值位置的模拟退火算法	224
2.7 Dobrushin 不等式、指数遍历性与收敛性	225
3 随机的迭代函数系统	228
3.1 局部相似性的基本想法	228
3.2 轮廓图全体组成的距离空间	229
3.3 灰度图与随机迭代函数系统	233
4 统计中的 Bayes 方法与图像的处理、分割与重建	237
4.1 Bayes 统计要义	237
4.2 Bayes 方法在图像中的应用与观测量不是状态变量时的 参数估计	240
习题 9	242
第 10 章 隐 Markov 模型及其应用	243
1 熵与相对熵	243

1.1	离散分布的熵与相对熵	243
1.2	分布密度的熵与相对熵	245
2	隐 Markov 模型	247
2.1	一个实例	247
2.2	隐 Markov 模型的描述	249
2.3	隐 Markov 模型的等价表述	249
2.4	非线性滤波作为隐 Markov 模型的特例	250
2.5	在应用中研究隐 Markov 模型的主要方面	250
3	解码问题——已知模型 λ 与观测 $Y=y$ 时状态 X 的估计	251
3.1	出现当前的观测的概率 $P(Y=y \lambda)$ 的计算	251
3.2	解码问题——已知模型 λ 与观测 $Y=y$ 时状态 X 的估计	252
4	学习问题——由观测 $Y=y$ 估计模型参数 λ	253
4.1	状态链样本已知时的参数频率估计	253
4.2	模型参数估计的 EM 算法的思想	253
4.3	隐 Markov 模型中 M 步骤的求解	255
5	关于隐 Markov 模型的评注	258
5.1	隐 Markov 模型包容度大有非常宽的应用面	258
5.2	隐 Markov 模型的更为一般的形式	259
6	隐 Markov 模型的应用例子梗概	260
6.1	语音的机器识别	260
6.2	脱机手写体汉字识别	262
6.3	DNA 序列片断装配及启动子识别	262
习题 10		264
第 11 章	Gauss 系 二阶矩过程与时间序列	266
1	全体方差有限的随机变量构成的 Hilbert 空间	266
1.1	实值情形	266
1.2	复值情形	266
2	随机变量族的均方信息空间与滤波	267
2.1	均方信息空间	267
2.2	滤波问题	267
3	Gauss 系与投影再访	268