球面三角學

編輯者

常福元

北平文化學社印行

球面三角學

編輯者

常元福

北平文化學社印行

民國二十三年十二月　日初版發行

實價大洋捌角
（實價不折不扣外埠酌加寄費）

球面三角學

有著作權翻印必究

編輯者　常福元

發行人　邵松如
北平和平門前文化學社

印刷者　文化學社
北平和平門前
電南三五八〇

總發行所　文化學社
北平和平門前電話南局三五八〇
有線電報掛號二四二九

分發行所　文化學社上海分社
上海公共租界老靶子路三六九號
開封特約分社
鄭州特約分社

本書已照出版法呈請內政部註册

三 版 序

吾國之有正式球面三角學,當自明末時西人翻譯曲線三角法始。元郭守敬氏,雖曾以弧矢命算,立黃赤互求之率;但取數甚難,爲用不廣。曲線三角法,經清世編入曆象考成,改名弧三角形,始列爲天學先修科。後之作者,有梅文鼎氏之弧三角舉要,江永氏之正弧三角疏義,汪萊氏之弧角條目。道光以後,徐有壬氏編務民義齋算學,張作楠氏編翠薇山房數學,吳嘉善氏編白芙堂叢書,均有收錄。顧以上諸書,雖列入著作之林,但不合教科之用。余自民國十九年,在輔仁大學講授球面三角學,困在手可用之西書,只有 Wentworth 與 Granville 兩種,且嫌失之太簡;乃旁採 Todhunter 與 W. J. M'clelland and T. Preston 兩書,編輯是篇以應之。初版選材稍多,再版量爲删節;今值排印三版,爰將書中錯誤詳爲改正,并識其原始於此。

中華民國二十三年十月十五日江寧常福元書於北平私立輔仁大學

目錄

		頁
第一章	大圓與小圓	1
第二章	弧三角形	7
第三章	直弧三角形	15
第四章	直弧三角形解法	29
第五章	斜弧三角形	46
第六章	斜弧三角形解法	70
第七章	內切圓與外接圓	109
第八章	面積與弧賸	121
第九章	天文學上之應用	135
第十章	測地學上之應用	147

球面三角學

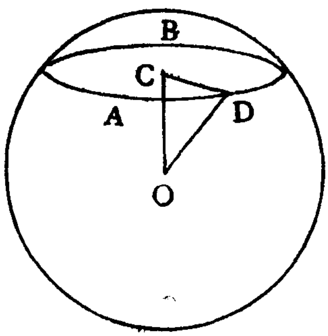
第一章

大圓與小圓

1. 立體表面上各點。至表面外之某定點。有同等之距離者。則此立體卽謂之球體。或稱渾圓。其表面曰球面。某定點曰球心。距離曰半徑。亦簡稱幅。通過球心之直綫。以球面爲界者。曰直徑。或簡稱徑。

球體亦可由半圓旋轉而成。中樞之直徑別稱爲軸。軸之兩端曰極。

2. 以平面割球體。所割之界爲平圓。



如圖。AB爲割界。O爲球心。作OC直垂割面。在割界上任選一點D。連OD與CD。因OC直垂割面。故$\angle OCD$爲直角。

$$\therefore CD=\sqrt{OD^2-OC^2}$$

但O與C皆定點。OC之長度不

變。又 OD 爲球之半徑。其長度亦不變。故 CD 亦不變。即割界上之各點。距 C 點皆不變。故割界爲平圓，C 爲圓心。

凡割面經過球心者。所割之界名曰大圓。不經過球心者。所割之界名曰小圓。故大圓之半徑。即球體之半徑。

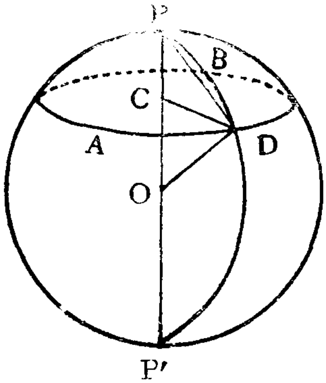
3. 經過球心及球面上任何兩點。可作一平面。且祇能作一平面。但兩點若爲直徑之兩端。則三點同居一直線。可作無量數之平面。故通過球心及球面上兩點。祇可作一大圓。若兩點居直徑之兩端。則大圓之位置不能決定。

凡通過兩點之唯一大圓。其周必不能爲兩點所平分。故距弧有長短。今爲取便引用。以後凡稱兩點間之距弧者。皆指較短之距弧而言。

凡通過球面上之三點。不同在一大圓之周者。祇能作一小圓。因大圓之面必經過球心。而此則否也。

4. 球體之徑。直垂大圓或小圓之面者。爲圓之軸。軸之兩端爲圓之極。故大圓之兩極。距圓周皆等。小圓之兩極則否。因有遠極近極之別。但爲取便引用。以後凡稱小圓之極者。皆指近極而言。

5. 從圓之一極。至其周上各點。距離皆等。



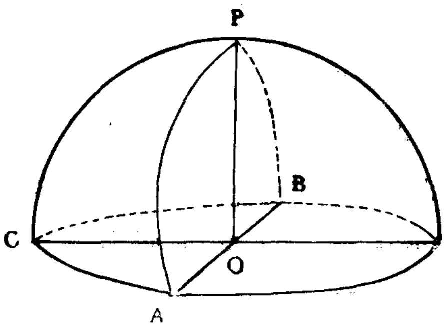
如圖。O為球心。AB為球面上之一圓。C為圓心。P,P′為兩極。在圓周上任取一點D。連CD,OD,PD諸線。則

$$PD=\sqrt{\overline{PC}^2+\overline{CD}^2}$$

但PC與CD皆不變。故PD亦不變。設通過P,D作一大圓。則因PD弦不變。故PD弧亦不變。即P極距圓周上各點皆等。

凡大圓之弧。由小圓之近極至其周者。名曰小圓之弧輻。

6. 大圓之弧。由大圓之極至其周者。為一象限。



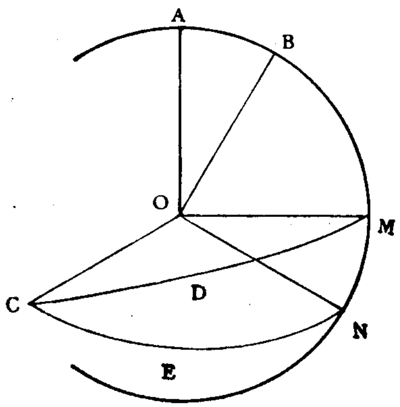
如圖。P為大圓ABC之極。O為球心。亦即圓之心。作PO線。因P為ABC之極。故PO直垂其面。則∠POA為直角。因而PA弧為一象限。

7. 凡兩圓相交。在交點上各圓切線所成之角。謂之兩圓之交角。此角與兩圓面所成之二面角同度。因二面角之大小。係以平面角量之。而交點上之切線。同垂兩面之公共半徑。故切線之交角。即是二面角之平

面角。亦卽兩圓之交角。

凡圓之軸皆直垂其面。故大圓之經過某圓之軸者。皆直垂圓面。換言之。則此圓與經過兩極之他大圓相交。其交角皆爲直角。

8. 兩大圓之交角。等於其極之距弧。



如圖。O爲球心。CD,CE爲兩大圓。相交於C。A,B爲兩圓之極。通過A,B作大圓。遇CD於M。遇CE於N。連OA,OB,OC,OM,ON諸半徑。

∵ AO直垂平面MOC,

∴ ∠AOC爲一直角

又BO直垂平面NOC, ∴ ∠BOC爲一直角

故OC直垂平面AOB, 而OM, ON皆在AOB平面內。故∠s COM, CON皆爲直角。因得 ∠MON 爲CD,CE兩大圓之交角。而∠AOB或AB弧爲兩極之距弧。故

$$\angle AOB = \angle AOM - \angle BOM$$
$$= \angle BON - \angle BOM$$
$$= \angle MON$$

9. 兩大圓互相平分。

凡大圓之面。皆經過球心。則兩圓之交線。必爲球之

直徑。亦卽各圓之直徑。而圓爲直徑所平分。故兩大圓之周。皆互相平分於交點。

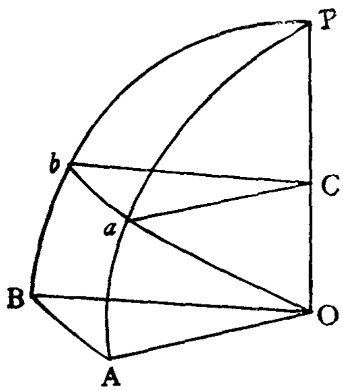
10. 設大圓之弧。連球面上之一點P。及他兩點A與C。皆爲象限。若他兩點非直徑之兩端。則P點卽爲通過A,C點大圓之極。

由第6節之圖觀之。倘PA,PC皆爲象限。O爲球心。則POA,POC皆爲直角。卽PO直垂AOC面。故P爲AC大圓之極。

11. 設從球面上之一點。能作兩大圓之弧。其面皆直垂他一圓之面。則此點卽爲他圓之極。

因兩圓旣同垂他圓之面。則其交線亦必垂之。此交線應爲他圓之軸。故其端點爲他圓之極。

12. 小圓之弧。可以所對之圓心角。及其弧輻計之。



如圖。ab爲小圓之弧。C爲圓心。aCb爲圓心角。P爲近極。O爲球心。自P作大圓PaA,PbB。遇以P爲極之大圓於A與B。則Pa或Pb卽爲弧輻。又Ca,Cb,OA,OB。皆直垂OP。故Ca與OA平行。Cb與OB平行。又$\angle aCb=\angle AOB$。依幾何學定理。凡弧與弧之比。等

於半徑與半徑之比。故

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{C}a}{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{\mathrm{C}a}{\mathrm{O}a}$$

$$=\sin \mathrm{PO}a$$

$$\therefore\ ab=\mathrm{AB}\sin \mathrm{P}a$$

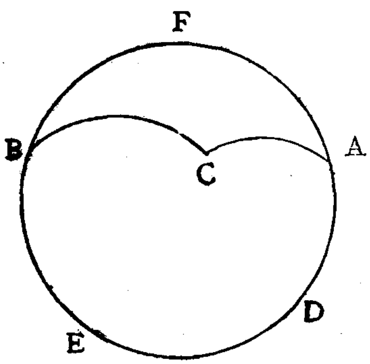
第二章
弧三角形

13. 弧三角形　弧三角形者。球面上大圓弧所成之三角形也。三大圓之弧。爲弧三角形之三邊。三弧所交之角。爲弧三角形之三角。

凡大圓之面。皆通過球心。則三弧之面必會合於球心。因得一個三面立體角。其面角卽弧三角形之三邊。其二面角之平面角。卽弧三角形之三角。

弧三角形之三角。嘗以A, B, C, 表之。其對邊則以a, b, c, 表之。角與邊之度量。可用直角法之度分秒計之。亦可用圓周法之烈典計之。實用上多取直角法。理論上多取圓周法。

14. 邊之長度限制　弧三角形三邊之長度。原不應有限制。但習慣上多取小於百八十度者。如圖。ADEB, BC, CA三弧成一個三角形。AFB, BC, CA三弧亦成一個三角形。但因ADEB弧大於半圓。多不之取。凡稱ABC三角形。皆指AFB,BC,CA三弧所成之三角形而言。此種限制雖



屬肌造。而删繁就簡。俾便初學。乃其唯一之原因也。

依此限制。三邊既各小於百八十度。則三角亦必各小於兩直角。因而弧三角形常爲凸形。其內陷者非所論也。

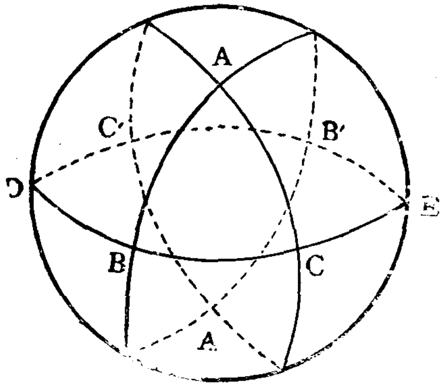
15. 弧三角形之種類　弧三角形之分類。與平三角形同。兩邊相等者。曰等腰弧三角形。三邊皆等者。曰等邊弧三角形。惟直三角形在平三角形上。祇能有一直角。而在弧三角形中。則可三角皆直。有一直角者。曰直弧三角形。有兩直角者。曰雙直三角形。有三直角者。曰全直三角形。

弧三角形之三邊。既皆爲大圓之弧。故可各等於一象限。有一邊爲象限者。曰象弧三角形。兩邊爲象限者曰雙象三角形。三邊皆爲象限者。曰全象三角形。

凡雙直三角形。雙象三角形,皆等腰弧三角形。凡全直三角形。全象三角形,皆等邊弧三角形。

16. 瓜瓣形,瓣餘三角形,底弧三角形　球面上兩半圓所成之形。爲瓜瓣形。如圖。ABA′, ACA′爲兩半圓相交於A, A′。則ABA′CA即爲瓜瓣形。而A, A′爲直徑之兩端。故A′爲A之底點。

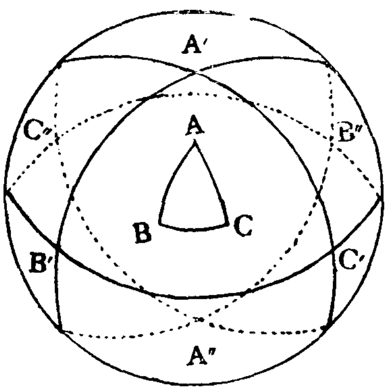
今作BC弧。與AB, AC兩弧合成ABC弧三角形。又合成A′BC弧三角形。但此兩形合爲一瓜瓣形。故ABC,



A′BC互爲瓣餘三角形。

凡弧三角形之任何兩邊。皆可引長成一瓜瓣形。故由每個三角形。可作成三個瓣餘三角形。就本圖言之。ABC爲原三角形。A′BC,B′ECA,C′DBA皆爲瓣餘三角形。而B′爲B之底點。C′爲C之底點。故A′B′C′三角形。爲原三角形之底弧三角形。

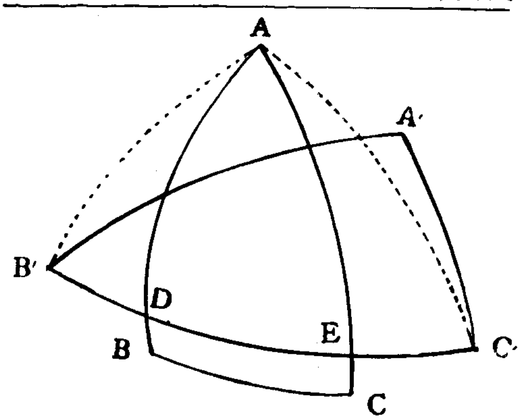
17. **極三角形** 如圖。ABC爲任一弧三角形。A′,B′,C′爲BC, CA, AB三弧之極。則A′B′C′三角形爲原三角形之極三角形。



凡一大圓之弧皆有兩極。則BC,CA,AB三弧共有六極。以弧連之。可得八個三角形。或以A,B,C爲極作全圓周。亦得八個三角形。如 A′B′C′, A″B′C″, A′B″C′, A′B″C″, A″B′C′, A″B″C′, A′B′C″

A″B″C″。但所謂極三角形者乃專指A′B′C′一形而言。卽A, A′同居BC邊之一方面。B,B′同居AC邊之一方面。C,C′同居AB邊之一方面。他形不與焉。

18. 若此三角形爲彼三角形之極三角形。則彼三角形亦爲此三角形之極三角形。



命ABC爲任一弧三角形。A′B′C′爲其極三角形。則ABC亦爲A′B′C′之極三角形。

因B′爲AC之極。故AB′弧爲一象限。又C′爲AB之極。故AC′弧亦爲一象限。則A又爲B′C′之極。且與A′同在B′C′邊之一方面。因A與A′原同居BC邊之一方面。A′A當然小於一象限。今A爲B′C′之極。而AA′又小於一象限。故A與A′皆同居B′C′邊之一方面也。

依同理推之。B爲C′A′之極。且與B′同居C′A′邊之一方面。又C爲A′B′之極。且與C′同居A′B′邊之一方面。故ABC三角形爲A′B′C′三角形之極三角形。

19. 極三角形之邊與角。與原三角形之角與邊。互

爲補角。

如上節之圖。設 $B'C'$ 弧遇 AB 弧於 D。遇 AC 弧於 E。則 A 角即以 DE 弧量之。但 $B'E$ 與 $C'D$ 皆各爲一象限。即 DE 與 $B'C'$ 合爲一半圓。故 DE 與 $B'C'$ 所對之球心角互爲補角。換言之。即極三角形之 $B'C'$ 邊。與原三角形之 A 角。互爲補角。

依同理推之。極三角形之 $C'A'$ 邊。與原三角形之 B 角。極三角形之 $A'B'$ 邊。與原三角形之 C 角。皆互爲補角。若命 $A, B, C, a, b, c,$ 爲原三角形之六項。$A', B', C', a', b', c',$ 爲極三角形之六項。則

$$A' = \pi - a \qquad B' = \pi - b \qquad C' = \pi - c$$

$$a' = \pi - A \qquad b' = \pi - B \qquad c' = \pi - C$$

或 $$A = \pi - a' \qquad B = \pi - b' \qquad C = \pi - c'$$

$$a = \pi - A' \qquad b = \pi - B' \qquad c = \pi - C'$$

20. 雙關原則 由上節觀之。凡定理之驗於原三角形之角與邊者。亦必驗於極三角形之角與邊。而極三角形之角與邊。爲原三角形邊與角之補角。故亦必驗於原三角形之邊與角。僅正負記號有時相反耳。此理名曰雙關原則。於考證公式時。將數數見之。

21. 弧三角形任兩邊之和皆大於第三邊。

第 13 節云。弧三角形與所對球心之三面立體角相