

单墀数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墀老师 教你学数学

棋盘上的数学

单墀◎著



YZLI0890143796

当读书不只是为了考试

你才会真正爱上数学

单墀老师娓娓道来

与你分享他所理解的数学之美



华东师范大学出版社



江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

单樽数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单樽老师 教你学数学

.....

棋盘上的数学

单樽◎著



YZLI0890143796



华东师范大学出版社



江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

棋盘上的数学/单墀著. —上海:华东师范大学出版社, 2010
(单墀老师教你学数学)
ISBN 978-7-5617-8045-9

I. ①棋… II. ①单… III. ①代数课—高中—教学参考资料
IV. ①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 170010 号

单墀老师教你学数学 棋盘上的数学

著 者 单 墀
策划组稿 倪 明 孔令志
审读编辑 孔令志
装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://ecnup.taobao.com/>

印 刷 者 南通印刷总厂有限公司
开 本 890×1240 32 开
印 张 3.5
字 数 78 千字
版 次 2011 年 3 月第一版
印 次 2011 年 3 月第一次
书 号 ISBN 978-7-5617-8045-9/G·4703
定 价 10.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

总 序

科学昌明,既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘,也需要普及工作者耕耘播种、热心培育。

普及工作很重要.如果将科学研究比作金字塔的塔尖,那么普及工作就是金字塔的底.底宽,塔才高。

科学研究不容易.从事研究,需要才能、努力与机遇.能够从事研究的人不多,好像阳春白雪,曲高和寡.他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化,才能广为人知,才能使更多的人关心、了解、理解,才能引起公众的兴趣,吸引更多的新人一同参加研究. Fermat 大定理就是一个典型的例子.虽然只有 Wiles 一个人给出了证明,看懂证明的不过十几个人或几十个人,但对大定理感兴趣的人成千上万.他们都是普及读物的读者。

普及工作使千万人受益,我就是其中之一。

在学生时代,我读过不少数学普及读物.如刘薰宇的《数学园地》,孙泽瀛的《数学方法趣引》,许莼舫的《几何定理和证题》,Casey 的《近世几何学初编》,日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》,前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等,以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等.还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等.这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想,眼界大开,而且使我对数学产生了浓厚的兴趣,甚至立志要当一名数学家。

但当数学家的梦想却难以实现.因为那时政治运动频仍.读书,被认为“走白专道路”,会横遭批判.史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫。

“四人帮”倒台后,我才有幸到中国科学技术大学作研究生。在1983年成为首批18名国产博士之一。但这一年我已年届不惑,从事数学研究的黄金时期业已过去。我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文,不如做普及工作对社会更有贡献。

对普及工作,我有浓厚的兴趣,也有一定的基础:

1. 由于做过一些研究工作,能够了解较新的材料,能够较为准确地把握数学及有关史料。

2. 由于当过多年教师,文字也还通顺,能够注意趣味性与深入浅出。

1977年恢复高考后,一度出现读书的热潮。这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》,受到普遍的好评。稍后,上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿,我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》,在1980年出版。以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》(与葛军合作)、《不定方程》(与余红兵合作)、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等。

由于文革后,大家渴望读书。而此前的书大多毁于“文革”劫火。因此新出的书颇受欢迎,其中也包括了写的小册子。

冯克勤先生说:“不要小看了这些小册子,它们将数学的美带给大众。”(冯克勤《评审意见》)

杨世明、杨学枝先生说:“直到1980年,大家才盼来单薄的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法,而

且激发了研究兴趣.今天初等不等式研究中的许多骨干,都曾从该书获益.单墀的《几何不等式》一书,无疑是这一阶段的标志性的著作.”(杨世明,杨学枝《初等不等式在中国》,载《中学数学研究》2007年第1期).

还有一些数学教师见到我客气地说:“我们都是读您的书长大的.”

这些评论当然是过奖的溢美之词,但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情.

近年来,急功近利的风气在学校蔓延.要根治这种歪风,还得提倡读书.要使广大青少年“热爱知识,渴求学问”(卡耐基《林肯传》,人民文学出版社,2005版第16页).

首先,得多出一些好书,供大家阅读.

读书是天下第一件好事,读好书是人生第一件乐事,好读书,读好书,进步就迅速.有些学生学数学,只做题,从不看书.这种做法是难以进步的.

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集.这7种小册子修订后,重新出版,希望能有较多的读者,特别是青少年读者.希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣.

前 言

下棋,是一种很好的活动.它与数学有类似之处,都需要思考、推理和判断,都有利于发展人的思维能力.所以孔老夫子认为,“饱食终日,无所用心”,不如去下棋.

棋盘本身还可以提供许许多多的数学问题.这些问题不但饶有趣味,而且蕴含着深刻的数学理论背景,这或许是大部分奕棋爱好者所始料未及的吧!

这本小册子,就是向你介绍这些问题,希望能引起你的兴趣.

作者

目 录

总序 / 1

前言 / 1

1 棋盘 / 1

2 覆盖 / 8

3 马 / 19

4 走遍棋盘 / 32

5 皇后 / 40

6 皇帝、车、象 / 51

7 博弈 / 61

8 棋盘上的问题 / 79

附录 二进制简介 / 98

1

棋 盘

象棋、围棋和国际象棋的棋盘都是长方形，由一些横线与纵线组成。

图 1.1 是象棋的棋盘，它由 10 条横线与 9 条纵线组成，棋子放在横线与纵线的交叉点上。

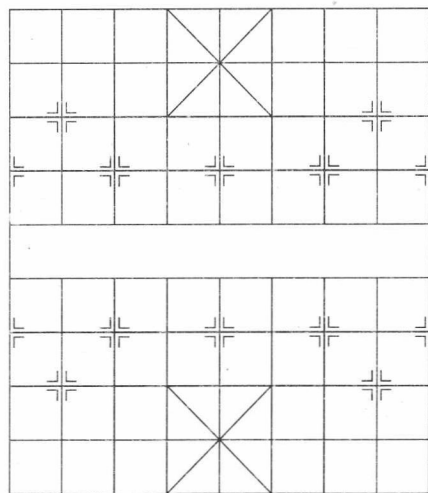


图 1.1

图 1.2 是围棋的棋盘，它由 19 条横线和 19 条纵线组成，棋子也是放在横线与纵线的交叉点上。

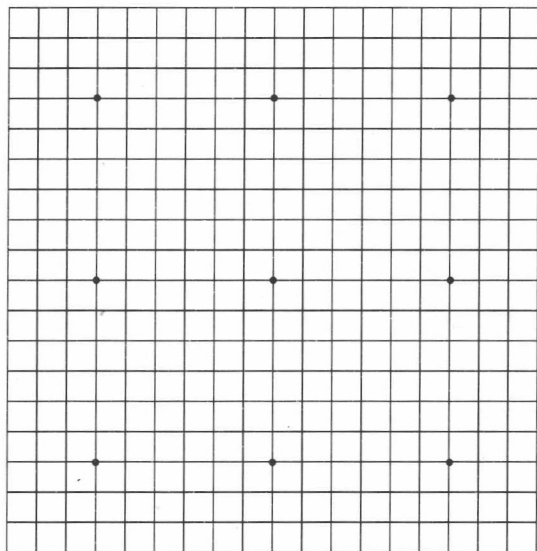


图 1.2

我们还可以考虑更一般的“广义棋盘”，它由 m 条横线与 n 条纵线组成。

坐标平面上的直线 $y = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 与直线 $x = h (h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 构成一个“无限棋盘”。棋子放在横线与纵线的交点 (h, k) 上，这样的点称为**整点**（因为横坐标 h 与纵坐标 k 都是整数），也称为**格点**。

图 1.3 是国际象棋的棋盘，它由 9 条横线与 9 条纵线组成，纵线之间的距离与横线之间的距离都是相等的，因此截得 $8 \times 8 = 64$ （个）相等的正方形的小方格。这种棋盘称为 8×8 的棋盘。类似地，如果每行有 m 个小方格，每列有 n 个小方格，这种棋盘称为 $m \times n$ 的（广义）棋盘或 $m \times n$ 的矩形。

国际象棋的棋子是放在方格中的，这与中国象棋、围棋不同。

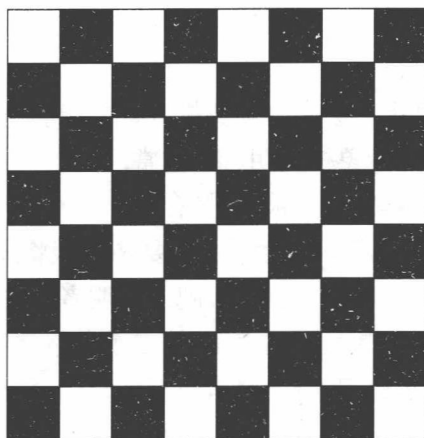


图 1.3

但这种不同只是表面上的. 如果在国际象棋盘上, 取每个小方格的中心, 将这些中心(64 个)用横线与纵线连结起来, 而将原来的横线、纵线擦去, 就得到一个由 8 条横线与 8 条纵线组成的新棋盘, 棋子恰好放在新棋盘的横线与纵线的交叉点上.

这样得到的新棋盘称为原棋盘的对偶图或对偶棋盘(图 1.4).

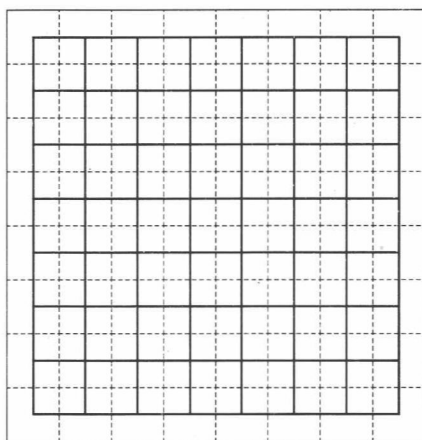


图 1.4

关于棋盘,流传着一个脍炙人口的古老故事,故事的大意是这样:

一位印度皇帝学会了国际象棋,从中得到了很多乐趣.皇帝一高兴,决定给国际象棋发明者以重赏.

于是国际象棋发明者被召进宫.

“我要给你奖赏,”皇帝说:“你提出要求吧,我将满足你的愿望.”

“陛下,请赏给我一棋盘麦子吧.”发明者指着棋盘说:“请在棋盘的第一个方格赏我 1 粒麦子,第二个方格赏我 2 粒麦子,第三个方格赏 4 粒,第四格赏 8 粒,第五格赏 16 粒……”

“我懂了,”皇帝打断他的话,“你是要在棋盘上的 64 个格子上都得到麦子,每一个格子上得到两倍于前面一格的麦粒.可是,你不认为这点要求太微不足道吗?你应该知道我的财富有多么巨大!”

“是的,我只需要棋盘上的这些麦粒.”发明者笑了笑.

“好吧,我一定满足你的要求,下午就让你如数领取.”

可是,发明者并没有按时领到这笔奖赏.原因是皇帝和他的财政大臣紧张地算了一下午,还没有算出这“一棋盘”的麦粒数.

其实,这个问题很简单.国际象棋盘上有 64 个小方格(见图 1.3),发明者所要的麦粒数是

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}.$$

假设皇帝多赏 1 粒麦子给发明者,即

$$S + 1 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63},$$

将上式右边前两项相加: $1 + 1 = 2$, 再加第三项: $2 + 2 = 2^2$, 逐步加下去, 即 $2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$, $2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$, ..., 直至最后, 得到

$$S + 1 = 2^{63} + 2^{63} = 2^{64},$$

将皇帝“多赏”的 1 粒拿回去,即发明者所要的麦粒数是

$$S = 2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615.$$

这个数后来被称为“国际象棋数”,它是个惊人的大数.有人计算过:如果造一个粮仓来放这些麦子,粮仓高 4 公尺,宽 10 公尺,那么粮仓的长度就等于地球到太阳的距离的两倍!

由此看来,皇帝所应允的给国际象棋发明者的奖赏,是世界上最高的“发明奖”,但也是永远无法兑现的发明奖!如果皇帝稍微懂一点数学的话,就不会留下这个千古笑柄!

在这本小册子里,我们将要向读者介绍棋盘中所蕴藏着的许许多多有趣的问题,以及解决这些问题所用到的一些重要的数学方法与技巧.下面的三则问题都是涉及棋盘的,虽然问题都不难,但是,如不会用一点数学,即使是棋界大师对它们也可能是束手无策哩!

问题 1 是一个著名问题,曾被用作中国科技大学少年班的招生试题.

问题 1

(剪残了的棋盘)剪去国际象棋棋盘的左上角与右下角的两个小方格(图 1.5(1)).能否用 31 个 2×1 的矩形(图 1.5(2))将这个剪残了的棋盘盖住?

中国象棋盘上也有许多有趣的问题.

问题 2

在图 1.6 中,甲方一只小卒已经过了河,它可以向前移动一步,即走到 B;也可以横移一步,即走到 A.要使这个小卒沿最短的路线走到对方帅的位置(假定在前进的路上不受任何阻碍),问:有多少种不同的走法?

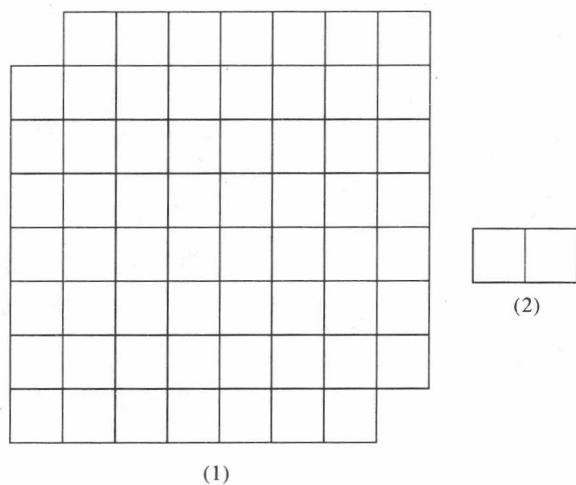


图 1.5

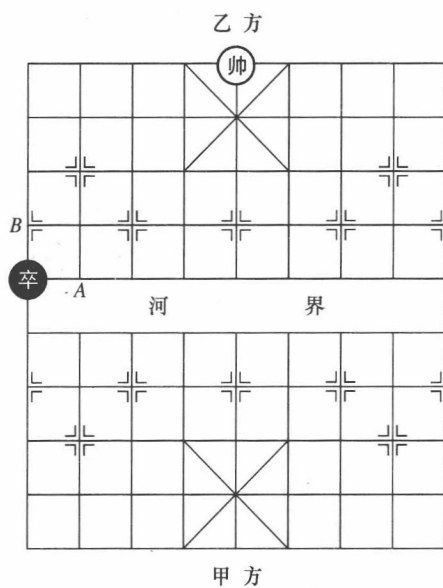


图 1.6

问题 3

无论是中国象棋还是国际象棋,马的走法都是一直一斜,所以棋谚曰“马走日字象(相)飞田”.从图 1.7 中的 A 点出发,一只马能否既不重复也不遗漏地跳遍半个棋盘(即棋盘上的每一点都跳到并且只跳到一次)?从哪些点出发,可以实现这样的要求?

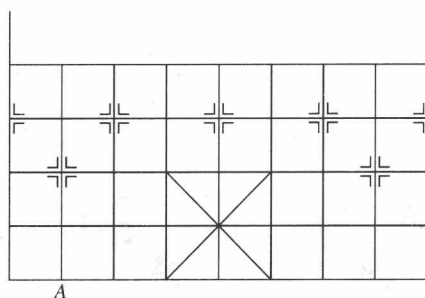


图 1.7

上述问题将在本书的相关节中一一给予解决. 问题 2 即是第八节的问题 1, 问题 1 和 3 分别在第二、三节中. 建议读者对上面的问题先考虑一下(我们相信读者在阅读本书时, 随身带着笔和纸的).

2

覆 盖

首先讨论上节末的问题 1(剪残了的棋盘).

例 ①

图 2.1 中的棋盘能否用 31 个 2×1 的矩形恰好覆盖?

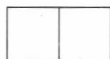
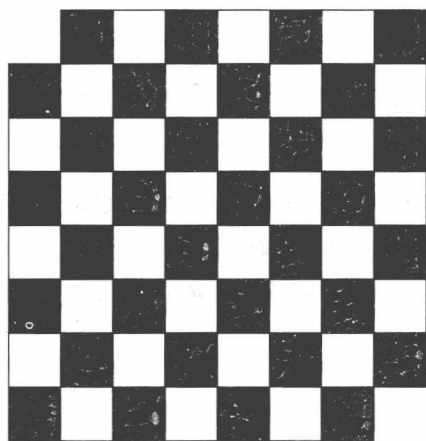


图 2.1

并非所有问题的答案都必须是肯定的. 这个问题的答案就是不能.

为了证明这一点,我们将棋盘的方格涂上白色或黑色,使得每两个相邻的方格(即有公共边的两个方格)颜色不同. 通常的国际象棋棋盘上正是这样涂色,我们称之为“自然涂色”.

如果 31 个 2×1 的矩形恰好覆盖这剪残了的棋盘, 由于每个 2×1 的矩形盖住 1 个白格与 1 个黑格, 所以棋盘上白格与黑格的个数应当相等, 都是 31 个.

但图 2.1 中的棋盘却有 30 个白格, 32 个黑格, 所以 31 个 2×1 的矩形不能覆盖这个棋盘.

从这个简单的问题, 可以看出涂色这一方法的作用.

同样的道理可以证明从 8×8 的国际象棋盘上剪去两个同色的方格, 剩下的棋盘一定不能用 31 个 2×1 的矩形覆盖.

如果剪去一个黑格一个白格呢?

例 2

在 8×8 的国际象棋盘上剪去一个黑格与一个白格后, 能否用 31 个 2×1 的矩形将它覆盖?

答案是肯定的, 一定能用 31 个 2×1 的矩形将这棋盘覆盖. 事实上, 如图 2.2, 用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线. 从任一个方格出发, 沿着这条路线前进, 可以不重复也不

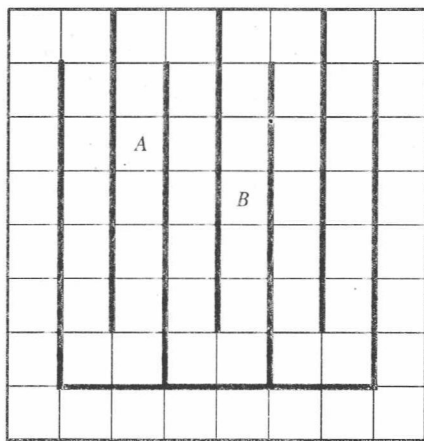


图 2.2