21世纪普通高等教育基础课规划教材

复变函数与积分变换学习辅导

主编 孙 妍

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

复变函数与积分变换学习辅导

主　编　孙　妍
参　编　解文龙　黄静静　赵立乔

机械工业出版社

前　言

复变函数与积分变换是高等院校工科专业的一门重要基础课程．作为一种重要的数学工具，这门课程的内容已被应用于自然科学的众多领域，例如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学以及自动控制等，尤其是共形映射、留数、傅里叶变换、拉普拉斯变换等在信号处理、电子电路、电子工程等领域被广泛应用．因此，对于大部分理工科同学来说，要想学好专业领域的各种课程，必须使复变函数与积分变换的基础知识烂熟于心，还要熟练掌握其常用方法和技巧，同时做到领会其理论蕴含的数学思想．而教材在有限的篇幅内难以帮助同学们达到众多学习目的，为了更好地帮助同学（特别是自学的同学）学好这门课程，我们编写了这本学习辅导书．

本书每一章分为以下四个部分：

（1）学习要点：学习该课程时的重点和学习后要达成的目标，便于读者自查学习效果；

（2）内容小结：对每章重点定理和方法做出总结，帮助读者梳理知识脉络；

（3）例题精解：对典型例题进行深入剖析，比教材给出更多细节，通过这部分内容的揣摩和领会，对概念和理论有更深入的理解；

（4）习题详解：给出典型习题的详尽解答，用于核对自己的解答．希望同学们只有在通过很大的努力仍没有想到解题办法时才来参考这里的解答．

本书分为八章，由孙妍（第1、2章）、赵立乔（第3、4章）、黄静静（第5、6章）、解文龙（第7、8章）合作编写，孙妍负责统稿．

本书的编写得到了编者单位北京信息科技大学的大力支持，同时，对机械工业出版社的各位编辑同志为本书的出版付出的努力致以衷心的感谢．

由于编者水平有限，在编写中难免有疏漏和不妥之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

目　　录

第1章　复数与复变函数

1.1　学习要点

1. 理解复数概念及其表示方法，掌握复数的各种计算；
2. 了解区域、单连通与多连通区域的概念；
3. 理解复变函数、复变函数的极限及连续性概念.

1.2　内容小结

1. 形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中，x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部，记为 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$. 复数的运算包括加减法、乘法、除法以及共轭复数的运算等. 复数还有以下几种表示法：

（1）几何表示

对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，我们认为它与坐标平面上的点 $P(x, y)$ 在表示上是一致的，因此可以用平面上的点表示.

（2）极坐标表示

任一复数 $z=x+\mathrm{i}y(z\neq 0)$，可以看做以 x 为水平分量，以 y 为垂直分量的平面向量$\overrightarrow{OP}$；向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模或绝对值，记作 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$；当 $z\neq 0$ 时，向量$\overrightarrow{OP}$的方向角（即$\overrightarrow{OP}$与 x 轴正方向的夹角）θ 称为复数 z 的辐角. 这时，任一复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以表示为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\mathrm{Arg}z=\theta+2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

在辐角的无穷多个值中，我们通常取绝对值最小的辐角作为辐角的主值，也称为主辐角，记作 $\theta_0=\arg z$，当复数位于不同象限或坐标轴上时，我们可以求出主辐角的不同表达式

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

（3）三角表示

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部 x、虚部 y 与模 r、辐角 θ 之间有以下关系式成立：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$；因此 $z=x+\mathrm{i}y$ 可表示为

$$z=x+\mathrm{i}y=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

利用复数的三角表示可以讨论复数的积、商、幂和方根的运算法则．

（4）指数表示

我们还可以利用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 将复数表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. 复平面上以 z_0 为中心，δ 为半径的圆的内部，称为 z_0 的 δ 邻域，记作 $U(z_0,\delta)=\{z\mid |z-z_0|<\delta\}$. $U(z_0,\delta)$ 中去掉 z_0 点，称为 z_0 的去心邻域. 若存在 z_0 的邻域，使邻域内所有的点都属于平面点集 E，则称 z_0 为 E 的一个内点. 如果集合 E 中每一点都是内点，则称 E 为开集．

若非空开集 E 具有连通性，即 E 中任意两点间都可用一条完全属于 E 的有限折线（由有限条直线段连接而成的折线）相连接，则称 E 为开区域．开区域 E 连同其边界所成的点集称为闭区域．开区域、闭区域或者开区域连同其一部分界点所成的点集统称区域．

若对于复平面上的一个区域 D 内任一封闭曲线，皆可不经过 D 以外的点而连续收缩于属于 D 内的某一点，则称此区域为单连通区域；否则称为多连通区域．更通俗地说，单连通区域是没有“洞”的区域，多连通区域是有“洞”的区域．

3. 若 D 为复数域上的一个集合，并且对每一个 $z=x+\mathrm{i}y\in D$，按照一定的法则 f，总能找到一个（或几个）复数 $w=u+\mathrm{i}v\in G$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的复变函数，记作 $w=f(z)$.

设函数 $f(z)$ 定义于 z_0 点的去心邻域 $0<|z-z_0|<r$ 内，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 及复数 A，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

同时，因为有定理：令$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$，所以复数的极限运算有与实函数一样的运算法则．

如果有$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称函数$f(z)$在$z_0$点连续．如果函数在区域$D$内的每一点都连续，则称$f(z)$在区域$D$上连续．函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在点$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处连续的充要条件是函数$u(x,y)$和$v(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处连续．

1.3 例题精解

例 1-1 设复数z满足$(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$，求$z$.

解 $\bar{z}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(4+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}=\dfrac{10-5\mathrm{i}}{5}=2-\mathrm{i}$，则$z=2+\mathrm{i}$.

例 1-2 已知$|z_1|=|z_2|=1$，且$z_1+z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求$z_1$，$z_2$.

解 （解题指导：这道例题的解题过程中反复应用了复数的模和共轭的运算性质.）

因为$(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=|z_1+z_2|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，即$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=1$，整理得$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=1$. 已知$|z_1|=|z_2|=1$，即$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=1$，故$z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=-1$，得$\mathrm{Re}(z_2\overline{z_1})=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-\dfrac{1}{2}$;

又因为$|\overline{z_1}z_2|=|\overline{z_1}|\ |z_2|=|z_1|\ |z_2|=1$，于是得$\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此有

$$\overline{z_1}z_2=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_2=z_1\,\overline{z_1}z_2=z_1\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).$$

由此可知

$$z_1+z_2=z_1+z_1\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=z_1\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

求得

$$z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\text{ 或 }z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ z_2=1.$$

例 1-3 计算(1) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6$；(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}$；

(3) $\dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

解 （解题指导：解此类题目，通常是利用分子、分母同时乘以共轭因式，或化为三角形式、指数形式来简化计算.）

(1) $$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6=\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right]^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$$
$$=2^6(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-64;$$

(2) $$\frac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}=\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i}-2)}{(\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)(-\mathrm{i}-2)}$$
$$=\frac{(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i}-2)}{10}=-\frac{3}{10}+\frac{\mathrm{i}}{10};$$

(3) $$\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}=\frac{32\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^5}{\cos\dfrac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{6}\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{6}\pi}$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

例 1-4 求根式 $\sqrt{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)\mathrm{i}}$ 的值.

解 （解题指导：计算根式的值通常是用复数的指数形式表示法把根号去掉.）

$$\sqrt{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)\mathrm{i}}=\left[\sqrt{12(2-\sqrt{3})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[12(2-\sqrt{3})\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{24}+k\pi\right)},\ k=0,\ 1.$$

例 1-5 化下列复数为三角形式和指数形式：

(1) $-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；(2) $1+\mathrm{i}\tan\theta\left(\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

解 （解题指导：做题时一定要注意 z 位于第几象限，以此来确定辐角的值.）

$$(1)\ -\sqrt{12}-2\mathrm{i}=\sqrt{12+2^2}\left[\cos\left(\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)\right)\right]$$

（z 位于第三象限）

$$=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}};$$

$$(2)\ 1+\mathrm{i}\tan\theta=1+\mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

$\left(\text{因为 } \pi<\theta<\frac{3\pi}{2}\text{，所以 } \cos\theta<0\text{，并且 } z \text{ 位于第一象限}\right)$

$$=-\frac{1}{\cos\theta}[\cos(\pi+\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi+\theta)]$$

$$=-\frac{1}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\theta)}.$$

例 1-6　解方程 $z^3+1=0$.

解　（解题指导：解方程时，通常将方程化为一边是因式的 n 次方，一边是常数的形式，再利用棣莫佛公式或直接开方得到结果.）

将原式化为 $z^3=-1$，解是 $z=(-1)^{\frac{1}{3}}$

由棣莫佛公式得

$$z=[1\cdot(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)]^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

即

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};$$

$$z_1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1;$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 1-7　满足下列各式的点集的 z 的轨迹是什么曲线？

(1) $|z-a|=\mathrm{Re}(z-b)$，a，b 均为实常数，且 $a>b$；

(2) $\mathrm{Re}z^2=b^2$，b 为实常数.

解　（解题指导：设 $z=x+\mathrm{i}y$，代入后可求得曲线方程的一般形式.）

(1) 原式化为 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=x-b$，等式两边同时平方整理得

$$y^2=2(a-b)x+(b^2-a^2),$$

因为 $a-b>0$，所以 z 的轨迹是一条开口向右的抛物线；

(2) $z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$，因此原式化为 $x^2-y^2=b^2$，这是一条双曲线.

例 1-8　指出下列不等式所确定的区域，并指明它是有界的还是无界的？是单连通域还是多连通域？

(1) $\left|\frac{1}{z}\right|<3$; (2) $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$; (3) $z+|z|\neq 0$.

解 (1) 令 $z=x+iy$ 可得 $x^2+y^2>\frac{1}{9}$，因此这是一个以原点为中心，$\frac{1}{3}$为半径的圆的外部，是无界多连通的.

(2) 令 $z=x+iy$，由 $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$可得

$$\begin{cases}0<y<x-1,\\ x>1,\end{cases}$$

是无界单连通的.

(3) 是一个去掉负实轴和原点的平面，是无界单连通的.

例 1-9 试将函数 $x^2-y^2-i(xy-x)$写成 z 的函数($z=x+iy$).

解 (代入法)将 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$代入上式，得

$$\frac{(z+\bar{z})^2}{4}+\frac{(z-\bar{z})^2}{4}-i\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{4i}+i\frac{(z+\bar{z})}{2}=\frac{z^2}{4}+\frac{3\bar{z}^2}{4}+\frac{iz}{2}+\frac{i\bar{z}}{2}.$$

例 1-10 将定义在全平面除去原点上的一对二元实函数 $u=\frac{2x}{x^2+y^2}$，$v=\frac{y}{x^2+y^2}(x^2+y^2\neq 0)$化为一个复变函数.

解 设 $z=x+iy$，$w=u+iv$，则

$$w=u+iv=\frac{2x+iy}{x^2+y^2},$$

将 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$以及 $x^2+y^2=z\bar{z}$ 代入上式整理得

$$w=\frac{3}{2\bar{z}}+\frac{1}{2z}.$$

例 1-11 在映射 $w=z^2$ 下，$0<r<2$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$表示图形应为什么?

解 (解题指导：通常情况下，我们是令 $z=x+iy$，$w=u+iv$，然后寻找 u，v 和 x，y 之间的关系. 本题与 r，θ 有关，因此我们设 $z=re^{i\theta}$，$w=\rho e^{i\varphi}$)

设 $z=re^{i\theta}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，则 $\rho e^{i\varphi}=r^2e^{2i\theta}$，即 $\rho=r^2$，$\varphi=2\theta$. 所以 $w=z^2$ 将 $0<r<2$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$映射为 w 平面上的扇形域

$$0<\rho<4,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

例 1-12 证明：如果 $f(z)$在 z_0 连续，那么 $|f(z)|$ 在 z_0 也连续.

证明　由

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\sqrt{[u(x,\ y)]^2+[v(x,\ y)]^2}$$

$$=\sqrt{[u(x_0,\ y_0)]^2+[v(x_0,\ y_0)]^2}=|f(z_0)|$$

可知 $|f(z)|$ 在 z_0 也连续.

1.4　习题详解

1. 计算下列各式，指出实部、虚部、共轭复数、模和辐角.

(1) $\frac{2}{1-3i}$；(2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$；(3) $\left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)^2$；(4) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

解　(1) $\frac{2}{1-3i}=\frac{2(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{2+6i}{1+9}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$；

实部 $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{5}$；虚部 $\mathrm{Im}(z)=\frac{3}{5}$；共轭复数为 $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$；模 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$；

辐角 $\mathrm{Arg}z=\arctan 3+2k\pi$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{i(1-i)}{i\cdot i}=\frac{-1+i}{2}+\frac{1+i}{-1}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$；

实部 $\mathrm{Re}(z)=-\frac{3}{2}$；虚部 $\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$；共轭复数为 $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$；

模 $|z|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$；

辐角 $\mathrm{Arg}z=\arctan\frac{1}{3}-\pi+2k\pi$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(3) $\left(\frac{3+4i}{1-2i}\right)^2=\left[\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right]^2=\left(\frac{-5+10i}{5}\right)^2=(-1+2i)^2=-3-4i$；

实部 $\mathrm{Re}(z)=-3$；虚部 $\mathrm{Im}(z)=-4$；共轭复数为 $-3+4i$；

模 $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$；

辐角 $\mathrm{Arg}z=\arctan\frac{4}{3}-\pi+2k\pi$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(4) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8=\left[\frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^8=(-i)^8=1$；

实部 $\mathrm{Re}(z)=1$；虚部 $\mathrm{Im}(z)=0$；共轭复数为 1；

模 $|z|=1$；

辐角 $\mathrm{Arg}z=2k\pi$，$k=0$，±1，±2，…

2. 求下面根式的值.

(1) $\sqrt{-\mathrm{i}}$；(2) $\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}$；(3) $\sqrt[6]{8}$.

解 (1) $\sqrt{-\mathrm{i}}=\sqrt{1\cdot\left(\cos\frac{3}{2}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi\right)}$

$$=\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2},\ k=0,\ 1;$$

$$k=0,\ \omega_0=\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=1,\ \omega_1=\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

(2) $\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2;$$

$$k=0,\ \omega_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi\right);$$

$$k=1,\ \omega_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{11}{12}\pi\right);$$

$$k=2,\ \omega_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

(3) $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{8(\cos0+\mathrm{i}\sin0)}=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3}\right)$，$k=0$，1，2，3，4，5.

3. 将下列复数转化为三角表示式和指数表示式，并指出其辐角主值.

(1) $\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$；

(3) $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$；(4) $\tan\theta-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$.

解 (1) $\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\dfrac{-2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1;\ \arg z=\arctan(-\sqrt{3})+\pi=\frac{2}{3}\pi;$$

三角形式：$1\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi$；

指数形式：$1\cdot\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.

（2）$\frac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(-2+2\mathrm{i})}{(-2-2\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{i}$；

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4};\ \arg z=\arctan 1-\pi=-\frac{3}{4}\pi;$$

三角形式：$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)$；

指数形式：$\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.

（3）$1-\cos\theta+\mathrm{i}\mathrm{sn}\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right];$$

$$\arg z=\frac{\pi-\theta}{2};$$

三角形式：$2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$；

指数形式：$2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi-\theta}{2}}\mathrm{i}$；

（4）$\tan\theta-\mathrm{i}=\frac{\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}{\cos\theta}=\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\theta}$

$$=-\frac{1}{\cos\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right];$$

$$\arg z=\frac{\pi}{2}+\theta-2\pi;$$

三角形式：$-\sec\theta\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$；

指数形式：$-\sec\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$.

4. 解下列方程

（1）$z^2-4\mathrm{i}z-(4-9\mathrm{i})=0$.

解　整理得 $z^2-4\mathrm{i}z+(2\mathrm{i})^2+9\mathrm{i}=0$，

$$(z-2\mathrm{i})^2=-9\mathrm{i}=9\left(\cos\frac{3}{2}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi\right);$$

则有 $$z-2\mathrm{i}=3\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2}\right),\ k=0,\ 1;$$

$$k=0,\ z_1=3\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)+2\mathrm{i}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\right)\mathrm{i};$$

$$k=1,\ z_2=3\left(\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right)+2\mathrm{i}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\right)\mathrm{i}.$$

(2) $(1+z)^5=(1-z)^5$.

解 由方程可知 $z\neq 1$，所以$(1-z)^5\neq 0$，整理方程得$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$.

令 $w=\frac{1+z}{1-z}$,

由 $w^5=1$ 得 $w=\cos\frac{2k\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{5}$，$k=0$，1，2，3，4；

即 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$\alpha=0,\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5}$;

由 $w=\frac{1+z}{1-z}$可得

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha-1}{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha+1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\mathrm{i}\tan\frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha=0,\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5}.$$

5. 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，证明：

(1) $z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;　　(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(4) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$.

证明　(1) $z\cdot\overline{z}=|z|^2=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

(2)因为

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2),$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2),$$

所以$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

(3) 因为

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\right)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2},$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{x_1-\mathrm{i}y_1}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}{(x_2-\mathrm{i}y_2)(x_2+\mathrm{i}y_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2},$$

所以$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

$$\begin{aligned}(4)\ |z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}-z_1\cdot\overline{z_2}-z_2\cdot\overline{z_1}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1})\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2}).\end{aligned}$$

6. 求出方程$\left|\frac{2z-1-\mathrm{i}}{2-(1-\mathrm{i})z}\right|=1$所表示曲线的直角坐标方程.

解　设$z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\left|\frac{2z-1-\mathrm{i}}{2-(1-\mathrm{i})z}\right|=\left|\frac{(2x-1)+\mathrm{i}(2y-1)}{(2-x-y)+\mathrm{i}(x-y)}\right|=1,$$

于是有

$$|(2x-1)+\mathrm{i}(2y-1)|=|(2-x-y)+\mathrm{i}(x-y)|,$$

即$(2x-1)^2+(2y-1)^2=(2-x-y)^2+(x-y)^2$，整理得$x^2+y^2=1$.

7. 描述下列各题中点 z 的轨迹或所在范围，并作图:

(1) $|z-2|+|z+2|=5$.

解　设$z=x+\mathrm{i}y$，由$|z-2|+|z+2|=5$得

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5,$$

等式两边平方后得

$$-8x-25=-10\sqrt{(x+2)^2+y^2},$$

两边再平方化简得方程

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1,$$

表明点 z 的轨迹为椭圆. 如图 1.1 所示.

(2) $|z| = \mathrm{Re}(z)+1$.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，原式即为 $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$，整理得 $y^2=2x+1$，故点 z 的轨迹是抛物线. 如图 1.2 所示.

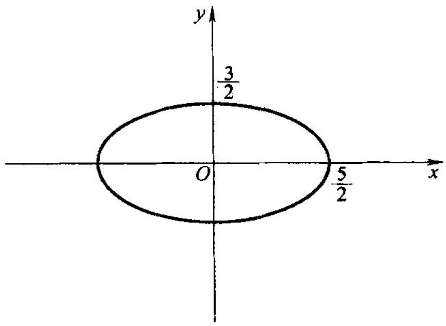

图 1.1

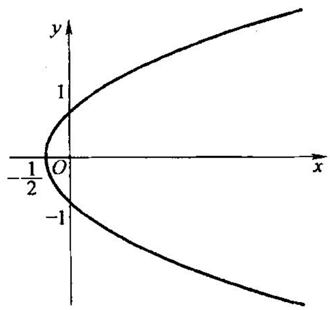

图 1.2

(3) $|z-2|-|z+2|>3$.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，由 $|z-2|-|z+2|=3$ 得

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=3,$$

整理得方程 $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{7}{4}}=1$，于是 $|z-2|-|z+2|=3$ 表示双曲线，而 $|z-2|-|z+2|>3$表示双曲线左支的内部. 如图 1.3 所示：

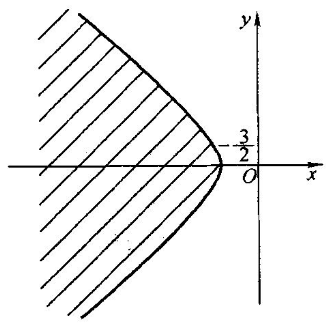

图 1.3

(4) $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|<3$.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|<3$ 即 $|z-2|<3|z+2|$，整理得 $(x-2)^2+y^2<9[(x+2)^2+y^2]$，即

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2>\frac{9}{4}.$$

这是以$\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$为圆心，以$\dfrac{3}{2}$为半径的圆的外部. 如图 1.4 所示.

8. 指出下列不等式所确定的区域，并说明其是有界还是无界的，单连通还是多连通的?

(1) $\mathrm{Re}(z)>1$；(2) $2\leqslant|z|\leqslant3$；(3) $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$；