本书由北京市优秀教学团队
——数学公共基础系列课程教学团队支持

高等数学

上册

◎ 田立平　鞠红梅　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书由北京市优秀教学团队
——数学公共基础系列课程教学团队支持

高 等 数 学

上 册

田立平　鞠红梅　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书分上、下两册出版。上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等。各章都配有难度适当的典型习题，书末附有各章习题参考答案。下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。各章配有循序渐进、难度适当并且典型的习题，书末附有各章习题参考答案。

本书吸收了国内外教材的优点，在不影响本学科系统性、科学性的前提下，力求通俗简明而又重点突出，难点处理得当而又形象直观。本书可供理工类本科各专业使用，也可供高职、高专的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册)/田立平，鞠红梅编著. —北京：机械工业出版社，2011.3

ISBN 978-7-111-33187-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①田…②鞠… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 012083 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：牛新国 责任编辑：陈崇昱 版式设计：霍永明

责任校对：刘怡丹 封面设计：赵颖喆 责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2011 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 26.25 印张 · 517 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-33187-2

定价：49.00 元(上、下册)

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

前　言

为全面贯彻落实科学发展观，切实把高等教育重点放在提高教学质量上，教育部、财政部实施了“高等学校本科教学质量与教学改革工程”，北京市教育委员会响应教育部的号召，相应实施了“质量工程计划”，其中教材建设是教学质量工程的重要内容。在这样的背景下，“数学公共基础系列课程教学团队”作为北京市优秀教学团队，编写一套适合一般高等学校理工类各专业的便于教、学的基础数学教材是义不容辞的责任，也是团队成员多年来的心愿。在北京物资学院信息学院的关心以及机械工业出版社的大力支持下，我们组织有多年教学经验的老教师和富有朝气的青年教师，在团队长期集体备课教案以及学校精品课教案的基础上，编写了这部教材。该教材的内容框架是根据教育部数学与统计学教学指导委员会2007年制定的理工科类本科数学基础课程教学基本要求以及2009年教育部关于硕士研究生入学考试的要求，针对理工类各专业编写的。

《高等数学》内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学和无穷级数，分上、下两册出版。

本教材在内容处理上注意到理工类各专业以及一般高等学校生源的特点，在不影响本学科系统性、科学性的前提下，尽量使数学概念、理论与方法易于学生掌握，简化和略去了某些结论的冗繁推导或仅给出直观解释，力求做到通俗简明而又重点突出，条理清晰而又层次分明，难点处理得当而又形象直观；数学文化与数学建模思想在教学内容中不断渗透，编者多年来积累的教学经验和成果适时融入；例题和习题的选取不求多但求精典，与《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》相结合，在难度上遵循循序渐进的原则，力求突出习题的应用性与实用性，以培养学生分析问题、解决问题和运用数学知识的能力为宗旨。同时，考虑到学生综合素质的提高以及部分学生转专业的情况，我们在侧重于理工类专业背景的基础上，适当增加了一些数学在经济领域中应用的内容。

本书由田立平教授和鞠红梅副教授担任编著。在编写过程中得到了北京物资学院各级各部门的领导、老师以及数学教研室所有同仁的关心，特别是得到了数学教研室谢斌老师的大力帮助；同时，也得到机械工业出版社的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！本书由北京市优秀教学团队——数学公共基础系列课程教学团队项目（项目编号：PHR200907230）支持。

由于编著者水平有限，加之时间比较仓促，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心恳求专家、学者和读者批评指正，以便能使本书在教学实践中不断改进和完善。

编著者

2010 年 10 月

目　　录

第一章 函数与极限

函数与极限是微积分最重要的基本概念，函数是微积分学研究的对象，极限理论是微积分的理论基础.

第一节 函 数

一、区间与邻域

1. 区间

定义 1.1 满足不等式 $a<x<b(a<b)$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b).

类似地，有闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，半开区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，它们称为有限区间. 而区间 $(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,a)$、$(-\infty,a]$ 称为无限区间.

2. 邻域

定义 1.2 设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 称为 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

a 称为邻域的中心；δ 称为邻域的半径. 常又表示为 $U(a)$，简称为 a 的邻域.

去掉中心 a 的数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为 a 的去心 δ 邻域，记为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}.$$

常又表示为 $\mathring{U}(a)$，简称为 a 的去心 δ 邻域.

类似地，数集 $\{x|0<x-a<\delta\}$ 称为 a 的右邻域，数集 $\{x|-\delta<x-a<0\}$ 称为 a 的左邻域.

二、函数概念

1. 变量

在研究数学的过程中常常涉及到各种各样的量，其中，变化的量称为变量，不变化的量称为常量或常数. 函数是考察变量之间关系的重要概念.

例如，球的半径 r 与该球的体积 V 的关系为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

式中，π 是圆周率，它是常量.

对于任意 $r\in[0,+\infty)$，都对应一个球的体积 V. r 和 V 都是变量，它们之间的关系可以用函数来表达.

2. 函数定义

定义 1.3 设 D 是非空数集，若对 D 中任意数 $x(\forall x\in D)$，按照某一确定的对应法则 f，总有唯一确定的数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\ (\forall x\in D)$$

简写为"$y=f(x)$"，或称"$f(x)$ 是 x 的函数(值)". 其中，数 x 称为自变量，数 y 称为因变量.

数集 D 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域. 函数的两要素为定义域和对应法则，与变量用何符号表示没有关系.

3. 单值函数与多值函数

在函数 $y=f(x)$ 的定义中，要求对应于 x 值的 y 值是唯一确定的，这种函数也称为**单值函数**. 如果取消唯一这个要求，即对应于 x 值，可以有两个以上确定的 y 值与之对应，那么函数 $y=f(x)$ 称为**多值函数**. 例如，函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

以后若不特别声明，只讨论单值函数.

4. 函数举例

例 1 取整函数 $y=[x]$，表示对于任意 $x\in\mathbf{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数.

如 $[2.5]=2$，$[3]=3$，$[0]=0$，$[-\pi]=-4$，图形(见图 1-1).

例 2 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$.

例 3 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$，图形(见图 1-2).

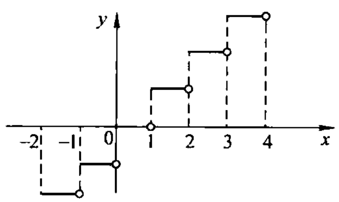

图 1-1

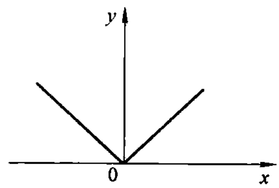

图 1-2

上述几个函数的定义域被分成了若干部分，而在不同部分上，函数值用不同的表达式表示，这样的函数称为**分段函数**.

三、函数性质

1. 有界性

定义 1.4　设函数$f(x)$在数集A上有定义，若存在$M>0$，使得任意$x\in A$，有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在A上有界，否则称$f(x)$在A上无界.

例如，函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对于任意$x\in\mathbf{R}$，都有$|\sin x|\leqslant 1$. 函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的，在$[2,+\infty)$上是有界的.

2. 单调性

定义 1.5　设函数$f(x)$在数集A上有定义，若对任意x_1，$x_2\in A$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数$f(x)$在A上是严格单调增加(或严格单调减少)的；若将上述不等式改为$f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称函数$f(x)$在A上是单调增加(或单调减少)的.

例如，函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的. 函数$y=2x^2+1$在$(-\infty,0)$内是严格单调减少的，在$[0,+\infty)$内是严格单调增加的. 因此，$y=2x^2+1$在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

3. 奇偶性

定义 1.6　设函数$f(x)$定义在数集A上，若对于任意$x\in A$，有$-x\in A$，且

$$f(-x)=-f(x)\ (\text{或} f(-x)=f(x))$$

则称函数$f(x)$是奇函数(或偶函数). 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于y轴对称.

例如，函数$y=x^4+3x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$都是偶函数. 函数$y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^3$，$y=x\cos x$都是奇函数.

4. 周期性

定义 1.7　设函数$f(x)$定义在数集A上，若存在$l>0$，对于任意$x\in A$，有$x\pm l\in A$，且$f(x\pm l)=f(x)$，则称函数$f(x)$是**周期函数**，l称为函数$f(x)$的**周期**.

由定义可知，周期不唯一. 若l是函数$f(x)$的周期，则$2l$也是它的周期，$nl(n\in\mathbf{N})$也是它的周期. 若函数$f(x)$有最小的正周期，通常称之为函数$f(x)$的基本周期，简称为周期.

例如，正弦函数$y=\sin x$就是周期函数，周期为2π. 再如，常数函数$y=1$也是周期函数，任意正实数都是它的周期，它没有基本周期.

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

定义 1.8　设函数 $z=f(y)$ 定义在数集 B 上，函数 $y=\varphi(x)$ 定义在数集 A 上，且 $\varphi(A)\subset B$（$\varphi(A)$ 是 B 的一个非空子集）. 对于任意 $x\in A$，按照对应关系 φ，对应唯一一个 $y\in B$，若再按照对应关系 f，对应唯一一个 z，即对于任意 $x\in A$，对应唯一一个 z. 于是可以在 A 上定义一个函数，表示为 $f\circ\varphi$，称为函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的复合函数，即

$$z=(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))\ (x\in A)$$

其中，y 称为中间变量.

例如，函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$，函数 $y=1-x^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$. 为使其生成复合函数，必须要求

$$y=1-x^2\geqslant 0,\ 即\ -1\leqslant x\leqslant 1$$

于是，对于任意 $x\in[-1,1]$，函数 $y=1-x^2$ 与 $z=\sqrt{y}$ 生成了复合函数

$$z=\sqrt{1-x^2}$$

又如，3 个函数 $u=\sqrt{z}$，$z=\ln y$，$y=2x+3$，生成的复合函数是

$$u=\sqrt{\ln(2x+3)},\ x\in[-1,+\infty).$$

2. 反函数

定义 1.9　设函数 $y=f(x)$，$x\in I$. 若对任意 $y\in f(I)$，有唯一确定的 $x\in I$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $f(I)$ 上定义了一个函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(I)$$

称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

按照书写习惯，将自变量写成 x，因变量写成 y，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常常被写作 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与直接函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-3）.

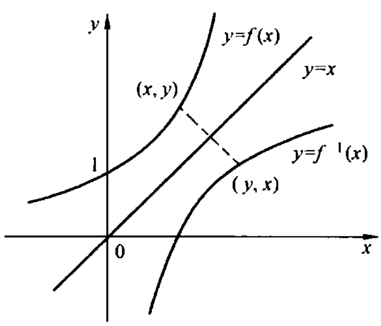

图 1-3

定理 1.1　若函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上严格单调增加（或严格单调减少），则函数 $y=f(x)$ 存在反函数，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(I)$ 上也严格单调增加（或严格单调减少）.

定理 1.1 中“严格”两字不可忽略. 如单调函数 $y=[x]$（取整函数）非严格单调，不存在反函数.

函数是严格单调的仅是存在反函数的充分条件，如函数

$$y=\begin{cases}-x+1 & -1\leqslant x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不是单调函数，但它存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 1-y & 1<y\leqslant 2\end{cases}$$

五、初等函数

1. 基本初等函数

（1）常数函数

$$y=C;$$

（2）幂函数

$$y=x^{\alpha};$$

（3）指数函数

$$y=a^{x},\ (a>0,a\neq 1).\ \text{特例}\ y=\mathrm{e}^{x};$$

（4）对数函数

$$y=\log_a x,\ (a>0,a\neq 1).\ \text{特例}\ y=\ln x;$$

（5）三角函数

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x;$$

（6）反三角函数

$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x.$$

2. 初等函数的定义

定义 1.10　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所生成的并可用一个式子表达的函数称为**初等函数**.

例如，函数 $y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$ 是一个初等函数，它是由 $y=\sin u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2-1$ 经过四则运算及复合而得.

由定义可知，那些不能用一个式子表达的分段函数，都不是初等函数.

习题 1.1

1. 求函数的定义域：

1）$y=\dfrac{x}{\ln(x+2)}$；　　2）$y=\arcsin\sqrt{x^2-9}$.

2. 设 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，求复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域.

3. 下列几对函数中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是哪一对？

1）$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　　2）$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

3）$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；　　4）$f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$.

4. 某地电话局按如下办法收费. 每月通话次数不超过 30 次或不通话，收费 20 元；若超过部分每次以 0.18 元计算，请列出函数的表达式.

5. 设 $y=f(x)=3x^2-2x-1$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(f(x))$.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (-2\leqslant x<0)\\ 2 & (x=0)\\ 1+x & (0<x\leqslant 3)\end{cases}$ 求函数的定义域，并求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 1+x & (x>1)\end{cases}$，写出 $f(x)$ 的定义域及值域，并求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

8. 证明：函数 $y=-x^2+1$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内单调增加，在区间 $[0,+\infty)$ 内单调减少.

9. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在它的整个定义域内是有界的.

10. 判断下列函数的奇偶性：

1） $f(x)=x\sin x+\cos x$；

2） $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

3） $f(x)=2x^4+3x^3+1$；

4） $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

11. 求函数 $y=\ln(x+2)-3$ 的反函数.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1 & (x<1)\\ x & (x\geqslant 1)\end{cases}$，求 $f(f(x))$.

13. 求 $y=\begin{cases}x^2 & (-1\leqslant x<0)\\ \ln x & (0<x\leqslant 1)\\ 2e^{x-1} & (1<x\leqslant 2)\end{cases}$ 的反函数及其定义域.

14. 下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

1） $y=a^{\tan x}$；　　　2） $y=\ln(\arcsin x^2)$.

15. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

1） 任意一个函数总可以写成一个奇函数与一个偶函数的和；

2） 两个偶函数的和是偶函数；两个奇函数的和是奇函数；

3） 两个偶函数的乘积为偶函数；两个奇函数的乘积为偶函数；偶函数和奇函数的乘积为奇函数.

16. 已知水渠的横断面为上底宽于下底的等腰梯形，一腰与地面的倾斜角为 $\varphi=40°$. 当过水断面的面积为定值 S_0 时，求湿周 L(除上底外，其余三边的和)与水深 h 之间的关系式，并指明其定义域.

第二节　数列的极限

一、数列

通俗地讲，数列就是将一系列的数排成一列(排).

定义 1.11　数列是定义在自然数集上的函数，记为 $x_n=f(n)\ n=1,2,3,\cdots$

数列的对应值可以按下标从小到大排成一列：$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，有时也简记为$\{x_n\}$或数列 x_n. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为一般项或通项.

例 1　“一尺之棰，日截其半，万世不竭.”——《庄子·天下篇》

这句话说明，长一尺的棒子，每天截去一半，无限制地进行下去，那么剩下部分的长构成一个数列：$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$,通项为$\frac{1}{2^n}$.

例 2　$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots;$

$1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots;$

$1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots;$

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots;$

$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots;$

$a,\ a,\ a,\ \cdots,\ a,\ \cdots$

都是数列.

在数轴上，数列的每项都相应有点与之对应. 如果在数轴上依次描出点 x_n 的位置，能否发现点的位置的变化趋势呢？显然，$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是无限接近于 0 的；$\{2n-1\}$是无限增大的；$\{(-1)^{n-1}\}$的项是在 1 与 -1 之间跳动的，不接近于某一常数；$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$无限接近于常数 1.

对于数列来说，最重要的是研究其在变化过程中无限接近某一常数的那种渐趋稳定的状态，这就是常说的数列的极限问题.

二、数列的极限

1. 数学描述

若数列$\{x_n\}$的极限为 a，则意味着当 $n\to\infty$ 时，即 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a，在数学上用距离$|x_n-a|$来度量 x_n 接近 a 的程度. 因为 n 越大，x_n 越接近于 a，所以 n 越大，$|x_n-a|$越小，所以对任意小的正数 ε，存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，使得$|x_n-a|$可以小于指定的正数 ε.

比如，考察$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的情况. 不难发现随着 n 的增大，$\frac{n+1}{n}$无限地接近于 1，即当 n 充分大时，$\frac{n+1}{n}$与 1 可以任意地接近，即$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|$可以任意地小，换言之，

当 n 充分大时，$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|$可以小于预先给定的无论多么小的正数 ε.

假如取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$，由 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，所以 $n>100$，即$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$从第 101 项开始，以后的项 $x_{101}=\frac{102}{101},x_{102}=\frac{103}{102},\cdots$都满足不等式 $|x_n-1|<\frac{1}{100}$，或者说，当 $n>100$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{100}$.

同理，若取 $\varepsilon=\frac{1}{10000}$，由 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10000}$，所以 $n>10000$，即$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$从第 10001 项开始，以后的项 $x_{10001}=\frac{10002}{10001},x_{10002}=\frac{10003}{10002},\cdots$都满足不等式 $|x_n-1|<\frac{1}{10000}$，或者说，当 $n>10000$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{10000}$.

一般地，不论给定的正数 ε 多么小，总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$. 这就充分体现了当 n 越来越大时，$\frac{n+1}{n}$无限接近 1 这一事实. 这个数 1 称为当 $n\to\infty$ 时，数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的极限.

2. 数列极限的定义

定义 1.12　设$\{x_n\}$是一个数列，a 是常数. 若对于任意的正数 ε(不论 ε 多么小)，总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 为数列 x_n 的**极限**，或称数列 x_n 收敛于 a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

这时说数列是**收敛**的，否则称数列是发散的.

例 3　证明数列 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$收敛于 1.

证　对于任意 $\varepsilon>0$，要使得 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

这里的 N 是随 ε 的变小而变大的，是取决于 ε 的函数. 解题中，只要说明存在一个 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 就行了，而不必求最小的那个 N.

例 4　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证　对于任意 $\varepsilon>0$，因为 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$

所以要使得$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$就行了.

即
$$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$$

所以取$N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，因为有$\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon\Rightarrow\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

有时找N比较困难，这时可把$|x_n-a|$适当地变形或放大.

例5　设$|q|<1$，试证明数列$1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$的极限为0.

证　若$q=0$，结论是显然的.

现设$0<|q|<1$，对于任意$\varepsilon>0$（ε越小越好，不妨设$\varepsilon<1$），要使得$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即$|q|^{n-1}<\varepsilon$，只须在不等式两边取对数后，使得$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$成立就行了. 因为$0<|q|<1$，所以$\ln|q|<0$，所以$n-1>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，即$n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

取$N=1+\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当$n>N$时，有$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$成立.

即
$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0\quad(|q|<1)$$

3. 数列极限的几何意义

由不等式$|x_n-a|<\varepsilon$等价于$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$. 可得到数列极限的几何意义：任意一个邻域$U(a,\varepsilon)$，数列中总存在某一项$x_N$，在此项后面的所有项$x_{N+1}$，$x_{N+2},\cdots$，它们在数轴上对应的点，都位于邻域$U(a,\varepsilon)$中（见图1-4）. 因为$\varepsilon>0$可以任意小，所以数列中各项所对应的点$x_n$都无限聚集在点$a$附近.

图1-4

三、收敛数列的性质

1. 极限唯一性

定理1.2　若数列$\{x_n\}$收敛，则它只有一个极限.

证　设a和b为x_n的任意两个极限，下面证明$a=b$.

由极限的定义，对于任意给定的$\varepsilon>0$，必分别存在自然数N_1，N_2.

当$n>N_1$时，有　　$|x_n-a|<\varepsilon$　　(1)

当$n>N_2$时，有　　$|x_n-b|<\varepsilon$　　(2)

令$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，(1)、(2)两式同时成立.