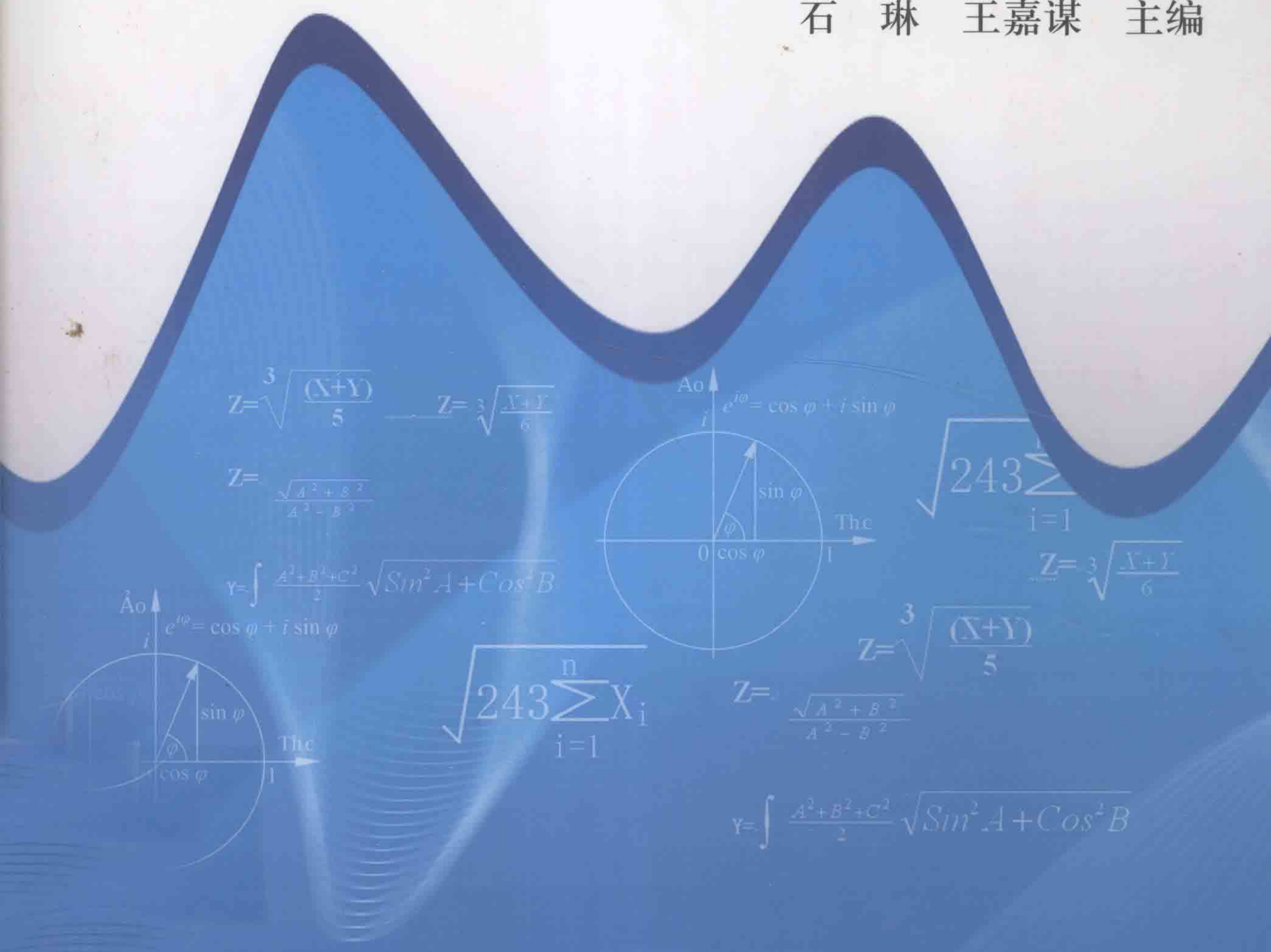
21世纪高等院校基础类课程规划教材

高等数学

释疑与学习指导

（下册）

石　琳　王嘉谋　主编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21 世纪高等院校基础类

高等数学释疑与学习指导

（下 册）

主编 石 琳 王嘉谋

参编 石 萍 刘玉瑛 程慧琴 王培吉

张晓斌 陈 溟 何莉敏 唐 俊

张 景 刘兴薇 董 艳

安徽建筑大学 藏書 图书馆

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书根据全国工科院校高等数学教学基本要求编写，是编者多年从事高等数学教学和辅导工作的积累和结晶。

本书是一本将高等数学学习指导和高等数学解题指导融为一体的参考书，可以帮助读者深刻理解高等数学的基本概念和基本理论，准确抓住基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。全书共分 12 章，每章包括基本要求，内容提要，内容注释，基本方法，典型例题分析，练习题，自我测试题七部分。

本书是理工科非数学专业学生学习高等数学的配套教材，也可供报考硕士研究生的考生参考，还可作为高等学校工科高等数学课程的教学参考书。

本教材获得 2010 年度内蒙古科技大学教材基金资助。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学释疑与学习指导. 下册/石琳，王嘉谋主编. --北京：北京邮电大学出版社，2010.9

ISBN 978-7-5635-2232-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①石…②王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 133103 号

书　　名：高等数学释疑与学习指导(下册)

主　　编：石　琳　王嘉谋

责任编辑：王晓丹　方　瑜

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京市梦宇印务有限公司印刷

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：13.25

字　　数：331 千字

版　　次：2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2232-3　　定价（上、下册）：50.00 元

本册定价：23.50 元

如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

高等数学是高等工科学校最主要的基础理论课之一。高等数学的基本概念、基本理论、基本运算和分析方法，在高等数学的学习中占有举足轻重的地位，掌握好这"三基"内容，不仅仅是学生学习后继课程和将来从事理论研究或实际工作的必要基础，而且对学生的理性思维训练以及今后的提高和发展都有深远的影响。

对于高等数学的基本概念、基本理论、基本运算和分析方法不熟悉的学生，很难想象能够学好高等数学，所以，对于初学高等数学的学生来说，如何帮助他们在学习中学会提出问题，善于提出问题，辨别命题真伪，抓准解题关键，清晰地辨明解题思路，提高分析问题和解决问题的能力，以达到搞清基本概念、掌握基本理论、灵活熟练地掌握基本方法的目的，这无疑是高等数学教师的重要任务。

为使高等理工科院校学生加深理解高等数学中的基本概念和基本理论，帮助学生抓住这门课的重点和要点，清理出其中的条条块块，使其在千变万化的解题方法中归纳出一些基本原则（或经验），组织了部分多年从事高等数学教学、具有丰富经验的教师共同编写了本书，该书融汇了高等数学中各个环节的内容。

本书内容的取舍是根据我国普通高等工科本科生的《高等数学课程基本要求》，同时也照顾到财经管理类学生的需求。本书与现行的任何一本工科本科高等数学教材同步。

本书在内容安排上紧扣"基本要求"，在章节的编排上尽量与教材同步。每章内容包括基本要求，内容提要，内容注释，基本方法，例题，练习，自测题七大部分。基本要求指出了本章重点、难点。内容提要列出了该章主要概念、重要定理和公式，起到了提纲絜领的作用。内容注释是本书的精华部分，也是该书最重要的内容之一，可帮助学生正确理解基本概念，深化基本理论认识，可引导学生勤于思考、培养学生抽象能力、逻辑思维能力，从而达到提高学生分析问题、解决问题能力的目的。基本方法与典型例题分析是本书的重点内容之二，在例题的挑选上，首先，围绕基本概念精选题目，尽量依据基本概念做题解分析，让读者体会到基本概念是理解内容、分析解答问题的基础，和基本概念的重要性；其次，精选基本方法典型性强、覆盖面广、且有层次感的题目，分析力求详尽，推导尽量不省略，基本上不跳步，且适当加以证明，让普通大学生独自阅读没有什么困难，这是笔者编写此书所希望实现的。最后精选了综合提高题，其中一部分是硕士研究生入学考试题，以帮助读者消化掌握课程的基本内容，同时也满足了考研者的需求，部分例题还给出一题多解，以帮助读者扩大视野，开阔思路。许多例题在解题前进行了充分分析，题后又进行了方法的总结，以深化对高等数学基本概念和理论的理解，提高解题和证题的能力，以期掌握思考问题和处理问题的方法和技巧，做到举一反三，触类旁通。每章的练习题分两部分，一是同步练习题，可以帮助读者对本章内容和基本方法起到复习和巩固的作用；二是自我测试题，模仿平时考试题型进行模拟训练，起到自我考核的作用。

全书思路清晰，逻辑严谨，概念准确，叙述详细，便于自学。本书在编选例题和习题时参

考了有关资料，在此谨向有关同事表示致谢。

本书由石琳、王嘉谋主编，参加编写工作的有：王嘉谋（1 章），石琳（3 章），石萍（4 章），刘玉瑛（7 章），程慧琴（12 章），王培吉（6 章），张晓斌（9 章），陈溟（5 章），何莉敏（2 章），唐俊（10 章），张景（11 章），刘兴薇和董艳（8 章），王嘉谋编写了全书的内容注释，石琳老师编写了全书典型例题的分析。全书由王嘉谋、石琳负责全书的统稿，章树玲老师参与了全书的校对工作。

虽然在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求为读者奉献一本精品读物，但书中难免有疏忽和纰漏之处，敬请同行和读者批评指正。

编　者

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第 8 章　空间解析几何

一、基本要求

1. 理解向量的概念.

2. 掌握向量的线性运算、点乘法及叉乘法，掌握两向量夹角的求法与垂直、平行条件.

3. 熟悉单位向量、方向余弦及向量的坐标表达式. 熟练掌握用坐标表达式进行向量运算.

4. 熟悉平面与直线方程及其求法.

5. 理解曲面方程的概念，掌握常用二次曲面的方程及其图形. 掌握以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

6. 知道空间曲线的参数方程及一般方程.

7. 知道空间曲线的坐标面投影求法.

二、内容提要

1. 空间直角坐标系

在空间取定一点 O，过点 O 作 3 条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，并按右手规定 Ox、Oy、Oz 的正向，即将右手伸直，拇指的指向为 Oz 的正向，其余四指的指向为 Ox 的正向，四指弯曲 90°后的指向为 Oy 的正方向.

点 O 称为坐标原点，3 条数轴 Ox、Oy、Oz 依次称为 x 轴、y 轴、z 轴.

每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面；

由 x 轴、y 轴所确定的平面称为 xy 平面；

由 x 轴、z 轴所确定的平面称为 xz 平面；

由 y 轴、z 轴所确定的平面称为 yz 平面.

3 个坐标面把空间划分为 8 个部分，称为 8 个象限，每部分称为一个象限.

坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$；y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$；z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$；xy 平面上点的坐标为 $(x,y,0)$；xz 平面上点的坐标为 $(x,0,z)$；yz 平面上点的坐标为 $(0,y,z)$.

8 个象限内点 (x,y,z) 的坐标 x,y,z 的符号如表 8-1 所示.

表 8-1

象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

点 $M(a,b,c)$关于 xy 平面对称的点是$M'(a,b,-c)$；
点 $M(a,b,c)$关于 yz 平面对称的点是$M'(-a,b,c)$；
点 $M(a,b,c)$关于 xz 平面对称的点是$M'(a,-b,c)$；
点 $M(a,b,c)$关于 x 轴对称的点是$M'(a,-b,-c)$；
点 $M(a,b,c)$关于 y 轴对称的点是$M'(-a,b,-c)$；
点 $M(a,b,c)$关于 z 轴对称的点是$M'(-a,-b,c)$；
点 $M(a,b,c)$关于原点 O 的对称点是$M'(-a,-b,-c)$.

2. 空间两点间的距离公式

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点，P_1 与 P_2 间的距离记为$|P_1P_2|=d$，则

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(1) 点 $P(a,b,c)$到 xy 平面的距离 $d=|c|$；
点 $P(a,b,c)$到 yz 平面的距离是 $d=|a|$；
点 $P(a,b,c)$到 xz 平面的距离是 $d=|b|$.

(2)点 $P(a,b,c)$到 x 轴的距离是 $d=\sqrt{b^2+c^2}$；
点 $P(a,b,c)$到 y 轴的距离是 $d=\sqrt{a^2+c^2}$；
点 $P(a,b,c)$到 z 轴的距离是 $d=\sqrt{a^2+b^2}$；
点 $P(a,b,c)$到原点的距离是 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

3. 定比分点

设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$、$M(x,y,z)$，点 M 是线段 M_1M_2 的分点.

(1) 设$\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，当 $\lambda>0$ 时，点 M 称为线段 M_1M_2 的内分点；当 $\lambda<0$ 时，点 M 称为线段 M_1M_2 的外分点.

分点坐标的计算可按下面公式进行：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

(2) 线段 M_1M_2 的中点坐标计算公式为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

4. 向量代数

(1) 向量

既有大小又有方向的量称为向量(或矢量)，通常用一条带有方向的线段表示向量.例如，以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段表示的向量可表示为 $\boldsymbol{M_1M_2}$.向量大小称为向量的模，亦就是用作表示该向量的有向线段的长度，如向量 $\boldsymbol{M_1M_2}$ 的模记为$|\boldsymbol{M_1M_2}|$.特别地，模等于 1 的向量称为单位向量，模等于 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，零向量是唯一不定义方向的向量，即零向量的方向可以看作任意的.

(2) 向量的坐标表示

设空间任意一向量 $\boldsymbol{M_1M_2}$ 的起点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则它可用坐标表示如下

$$\boldsymbol{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

若记 $a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$，则向量 $\boldsymbol{M_1M_2}$ 也常记为 $\boldsymbol{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，其模

$$|\boldsymbol{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角分别为 α、β、γ，也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，则有

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\boldsymbol{a}|\cos r$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 由此易得 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的表达式为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

它们显然满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

与非零向量同方向的单位向量可表示为

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

(3) 向量的运算

设有两个向量

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

1) 加减法

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}$$

2) 数乘

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

3) 数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$$

式中$(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

向量的数乘积有以下性质：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\operatorname{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\operatorname{prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

式中，$\operatorname{prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影；$\operatorname{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

④ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

⑤ 当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

4) 两向量的向量积(也称外积或叉积)是一个向量，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$，方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同时垂直，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的顺序符合右手规则.

向量的向量积有以下性质：

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

② $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

③ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$

④ 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$；

⑤ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$在几何上表示以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(4) 向量的混合积

3 个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，若前两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所得的向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 再与向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积，最后得到的这个数量称为这 3 个向量的混合积，记作 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 或 $[\boldsymbol{abc}]$.

向量的混合积有如下性质：

① 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}=\{c_x,c_y,c_z\}$，则

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

② 从几何上看，若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是非零向量，则混合积的绝对值 $|[\boldsymbol{abc}]|$ 等于以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

③ 3 个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{abc}]=0$，即 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$.

④ $[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$

5. 平面与直线

(1) 平面及其方程

1) 平面的法线向量

垂直于平面的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 称为平面的法线向量.

2) 平面的点法式方程

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为法向量的平面方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 称为平面的点法式方程.

3) 平面的一般式方程

关于 x、y、z 的三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般式方程，并且方程中的 x、y、z 的系数恰好是该平面的一个法向量的坐标，即 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 是平面的一个法向量.

4) 平面的截矩式方程

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，其中 a、b、c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截矩.

5) 平面的三点式方程

设平面过不共线的三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$、$M_3(x,y,z)$，则该平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

6) 平面与平面间的关系

① 两平面间的夹角

两平面的法向量所夹的锐角 θ 称为这两平面的夹角.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

设平面 π_1 和 π_2 的一般方程分别为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则平面 π_1 和 π_2 的夹角 θ 的公式为

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

② 平面 π_1 和 π_2 垂直的充分必要条件是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

③ 平面 π_1 和 π_2 平行的充分必要条件是$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

7）点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

（2）直线及其方程

1）直线的方向向量与方向数

平行于直线 L 的非零向量称为 L 的方向向量，方向向量的坐标称为直线 L 的方向数，方向向量的方向余弦称为直线 L 的方向余弦.

2）直线的对称式方程(标准方程，点向式方程)

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，且与向量$\{l,m,p\}$平行，则直线 L 的方程为$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

3）直线的参数式方程

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，且它的一个方向向量为$\{l,m,p\}$，则该直线的参数式方程为$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+pt\end{cases}$，其中 t 称为参数.

4）直线的两点式方程

设直线 L 过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则直线 L 的两点式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5）直线的一般式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\quad(\text{其中 } A_1、B_1、C_1 \text{ 与 } A_2、B_2、C_2 \text{ 不成比例})$$

此时直线的一个方向向量为$\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$.

6）直线与直线的关系：异面、共面(相交或平行)

设直线

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

① 直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ

两直线的方向向量所夹的锐角 θ 称为这两直线的夹角，其夹角 θ 公式为

$$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}$$

② 直线 L_1 与 L_2 垂直的充要条件是 $l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0$.

③ 直线 L_1 与 L_2 平行的充要条件是 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

④ 直线 L_1 与 L_2 相交的充要条件是：s_1 不平行于 s_2 且 $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$.

7）直线与平面间的关系：相交、平行、在面上

设直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$$

平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$.

① 直线与平面的夹角

当直线 L 与平面 π 不垂直时，称直线 L 与它在平面 π 上的投影直线所夹的锐角 θ 为直线 L 与平面 π 的夹角；当直线 L 与平面 π 垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，直线 L 与平面 π 的夹角 θ 公式为

$$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}}$$

② 直线 L 与平面 π 垂直的充要条件是 $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$.

③ 直线 L 与平面 π 平行的充要条件是 $Al+Bm+Cp=0$.

8）点到直线 L 的距离公式

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线 L 上一点，$\boldsymbol{s}=\{l,m,p\}$ 是直线 L 的方向向量，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 L 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

9）两异面直线间的距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别是两异面直线 L_1、L_2 上的已知点，$\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$ 是其方向向量，则两直线间的距离为 $d=\frac{|[\boldsymbol{M_1M_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$.

10）平面束方程

设有直线 L，其一般式方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，过直线 L 的平面束方程为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

6. 空间曲线与空间曲面

（1）空间曲面的方程

如果一张曲面 Σ 与一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 具有下述关系：

① 曲面 Σ 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

② 不在曲面 Σ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，

则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面 Σ 的方程,曲面 Σ 称为方程的图形.

曲面方程的形式有以下几种:

隐式方程:$F(x,y,z)=0$

显式方程:$z=f(x,y)$

参数方程:$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$

(2) 旋转曲面

一条平面曲线 C 绕该平面上的一条定直线 L 旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面.该直线 L 称为旋转曲面的旋转轴,平面曲线 C 称为旋转曲面的母线.

例如,平面曲线 C 的方程为$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$,则曲线 C 绕 y 轴和 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程分别为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ 及 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

一般地,坐标面上的曲线 C,绕此坐标面内的一条坐标轴旋转一周,所得的旋转曲面其方程可这样得到:只要将曲线 C 在坐标面内的方程可以理解为平面解析几何中的曲线,保留与旋转轴同名的坐标,而以另外两个坐标平方和的平方根代替方程中的另一个坐标,就可得到该旋转曲面的方程;反之,一个曲面方程若能化为这种形式,则必为一旋转曲面的方程.

(3) 圆锥面

一直线绕一条与之相交的定直线旋转一周,所形成的曲面称为圆锥面,两直线的交点称为圆锥面的顶点,而直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$称为圆锥面的半顶角.

例如,yOz 平面的过原点且与 z 轴夹角为 α 的直线绕 z 轴旋转一周所形成的圆锥面方程为 $z^2=a^2(x^2+y^2)$,其中 $a=\cot\alpha>0$.

(4) 柱面

平行定方向的动直线沿空间一条固定曲线移动所产生的曲面称为柱面,动直线称为柱面的母线,固定曲线称为柱面的准线.

例如,方程 $F(x,y)=0$ 在平面直角坐标系的 xOy 坐标面上表示一条平面曲线 C,在空间直角坐标系中它就表示母线平行 z 轴,准线为 C 的柱面.类似地,只含变量 x、z 而不含变量 y 的方程 $G(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴,准线为 xOz 面上的曲线 $G(x,z)=0$ 的柱面.而只含变量 y、z 的方程 $H(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴,准线为 yOz 面上的曲线 $H(y,z)=0$ 的柱面.

(5) 常见的二次曲面

1) 中心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

而 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 表示中心在原点,半径为 R 的球面.

2) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$$

3）椭球锥面

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2(a>0,b>0)$

② $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=x^2(b>0,c>0)$

③ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=y^2(a>0,c>0)$

4）椭圆抛物面

① $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

② $y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$

③ $x=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

其中 $a>0,b>0,c>0$.

5）双曲抛物面

① $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

② $y=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$

③ $x=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$

其中 $a>0,b>0,c>0$.

6）单叶双曲面

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

② $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

③ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

其中 $a>0,b>0,c>0$.

7）双叶双曲面

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

② $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

③ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

（6）空间曲线方程

① 空间曲线的一般方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

② 空间曲线的参数方程为$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，其中 t 称为参数.

③ 螺旋线方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\y=a\sin t\\z=bt\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$，其中参数 t 表示动点转过的角度(取弧度制).

(7) 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 Γ 的一般式方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，从方程组中消去变量 z 后得方程 $H(x,y)=0$，这是一个母线平行于 z 轴的柱面，且该柱面一定包含曲线 Γ. 以 Γ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 Γ 关于 xOy 面的投影柱面. 投影柱面与 xOy 面的交线称为曲线 Γ 在 xOy 面的投影曲线，简称投影. 因此方程 $H(x,y)=0$ 表示的柱面必定包含投影柱面，而方程组 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 所表示的曲线必包含空间曲线 Γ 在 xOy 面的投影.

同理，从表示空间曲线的 x、y、z 的二元方程组中，消去变量 x 或变量 y 后得到方程 $R(y,z)=0$或 $T(x,z)=0$，再分别与 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，就可得到包含曲线 Γ 在 yOz 面或 xOz 面上的投影曲线方程$\begin{cases}R(y,z)=0\\x=0\end{cases}$或$\begin{cases}T(x,z)=0\\y=0\end{cases}$.

三、内容注释

(1) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为向量，λ、μ 为实数，则下面等式的几何意义是什么?

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ ② $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ ③ $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{b}-(\mathrm{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}^0$

① 表示将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 3 个向量首尾相连时，第一个向量的起点与第三个向量的终点重合. 于是可知，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 在几何表示或者 3 个向量共线，或者 3 个向量为边构成一个三角形.

② 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 能由向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 经线性运算得 $\boldsymbol{c}$，这时称 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的线性组合，或说 $\boldsymbol{c}$ 能由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 线性表示，因此 $\boldsymbol{c}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，即 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 3 个向量共面.

3 个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件常用如下两种形式给出.

- 当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$；
- $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，即$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\b_x & b_y & b_z\\c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.

③ $\boldsymbol{h}$ 表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的三角形中与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的高向量(见图 8-1)，其中，$\boldsymbol{d}=(\mathrm{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}^0$ 称为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量.

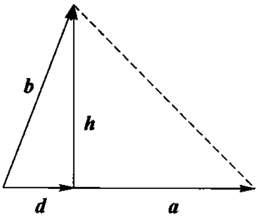


图 8-1

(2) 下列各式都是错误的：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^3$

② 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}=1$

③ $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$

④ $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$

⑤ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

⑥ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

⑦ 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

⑧ 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

其原因分析如下:对于①,其两端都没有意义.这里没有定义3个向量的数量积,也没有定义 $\boldsymbol{a}^3$.向量的乘法有3种,即数乘向量、数量积(点积)及向量积(叉积),分别记作为 $\lambda\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.两个实数的乘积记作为 $\lambda\mu=\lambda\cdot\mu=\lambda\times\mu$,即3种乘积记号用于实数是表达同一个乘积概念,而用于向量则表示3种不同的乘积概念,决不能将 $\lambda\boldsymbol{a}$ 写成 $\lambda\cdot\boldsymbol{a}$ 或 $\lambda\times\boldsymbol{a}$,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ 不能写成 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.这里规定了 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$,但没有 $\boldsymbol{a}^3$ 和 $\boldsymbol{a}^4$ 的定义.

② 的左端也是没有意义的.因为这里没有定义过向量的除法.除法总是作为乘法运算的逆运算来定义的,由于数乘向量有逆运算.因此可定义 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}\,(\lambda\neq0)$.而数量积及向量积都没有逆运算,因此不可能有以向量为分母的除法定义.

③、④两式是运用了实数乘法的结合律得到的,但向量的数量积没有结合律.事实上 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$是数量$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$乘以向量 $\boldsymbol{a}$,因此 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$平行于 $\boldsymbol{a}$;同理,$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$.所以只有当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,式③才能成立.而式④的左端$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=[|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})]^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})$,由此可见,只有当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,式④才能成立.

⑤、⑥两式是运用了实数的二项和平方公式及平方差公式而得,由于向量积虽然满足分配律,但不满足交换律,因此这些公式对向量积都是不成立的.事实上,由于向量与自身的向量积为零向量,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$,而$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

⑦、⑧两式是运用了实数的消去律,由于数量积及向量积都没有逆运算,因此,向量的上述运算消去律也就不成立,只能得到如下结论:由式⑦有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$;由式⑧有 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

(3) 可以证明:

① 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$充分必要条件是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;

② 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$充分必要条件是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;

③ 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$充分必要条件是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向;

④ 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$充分必要条件是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

(4) 一个向量与 xOy、xOz、yOz 3个坐标平面的夹角是 φ、θ、ω,则

$$\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\omega=2$$

事实上,设该向量的方向余弦为$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,由 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right|$,$\theta=\left|\dfrac{\pi}{2}-\beta\right|$,$\omega=\left|\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right|$及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 知

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\omega&=\sin^2\gamma+\sin^2\beta+\sin^2\alpha\\&=1-\cos^2\gamma+1-\cos^2\beta+1-\cos^2\alpha\\&=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\&=3-1=2\end{aligned}$$

这里应该强调的是,两向量的夹角 θ 规定的取值范围是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$;而向量与直线、向量与

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com