

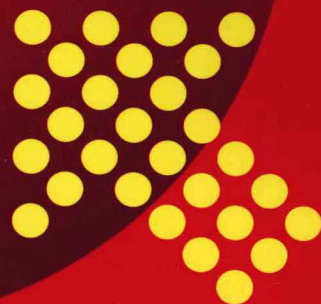
21世纪高等学校规划教材



XINHAO YU XITONG

信号与系统

杜德生 袁丽英 张 锐 主 编
李 冰 副主编



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

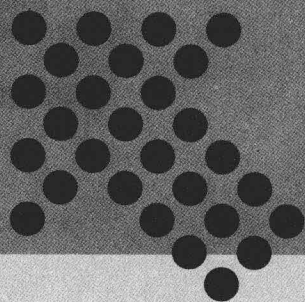
21世纪高等学校规划教材



XINHAO YU XITONG

信号与系统

主 编 张 锐
副主编 杜德生 袁丽英 李 冰
编 写 张 颖 齐丽华
主 审 李 辉



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 提 要

本书为 21 世纪高等学校规划教材。

全书共分十二章，主要内容包括信号与系统的基本概念、连续系统的时域分析、连续信号的频域分析、连续系统的频域分析、连续信号的复频域分析、连续系统的复频域分析、离散系统的时域分析、离散信号的复频域分析、离散系统的复频域分析、信号的相关分析、离散傅里叶变换和系统的状态变量分析法。本书数学推导严谨、逻辑承接关系分明、表述深入浅出、透彻明晰，便于教学和自学。

本书主要作为高等院校电气信息类专业信号与系统课程的教材，也可供相关工程技术人员自学和参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

信号与系统/张锐主编. —北京: 中国电力出版社, 2010. 8

21 世纪高等学校规划教材

ISBN 978 - 7 - 5123 - 0657 - 8

I. ①信… II. ①张… III. ①信号系统-高等学校-教材
IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 129624 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2010 年 10 月第一版 2010 年 10 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19.75 印张 478 千字

定价 32.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

电子电气基础课程教材编审委员会

主任委员	王志功	东南大学		
副主任委员	张晓林	北京航空航天大学	胡敏强	东南大学
	王泽忠	华北电力大学	戈宝军	哈尔滨理工大学
	马西奎	西安交通大学	刘新元	北京大学
	孟 桥	东南大学		
秘书长	李兆春	中国电力出版社		
委 员	(按姓氏笔画排列)			
	于守谦	北京航空航天大学	公茂法	山东科技大学
	王 殊	华中科技大学	王万良	浙江工业大学
	王小海	浙江大学	王建华	西安交通大学
	王松林	西安电子科技大学	邓建国	西安交通大学
	付家才	黑龙江科技学院	刘润华	中国石油大学 (华东)
	刘耀年	东北电力大学	朱承高	上海交通大学
	宋建成	太原理工大学	张正平	贵州大学
	张彦斌	西安交通大学	李 承	华中科技大学
	李 青	中国计量学院	李 琳	华北电力大学
	李守成	北京交通大学	李国丽	合肥工业大学
	李哲英	北京联合大学	李晓明	太原理工大学
	李晶皎	东北大学	杨 平	上海电力学院
	陈后金	北京交通大学	陈庆伟	南京理工大学
	陈意军	湖南工程学院	陈新华	山东科技大学
	宗 伟	华北电力大学	范蟠果	西北工业大学
	段哲民	西北工业大学	段渝龙	贵州大学
	胡虔生	东南大学	赵旦峰	哈尔滨工程大学
	赵荣祥	浙江大学	唐庆玉	清华大学
	徐淑华	青岛大学	袁建生	清华大学
	郭陈江	西北工业大学	高会生	华北电力大学
	崔 翔	华北电力大学	梁贵书	华北电力大学
	曾孝平	重庆大学	曾建唐	北京石油化工学院
	韩 璞	华北电力大学	韩学军	东北电力大学
	雷银照	北京航空航天大学		

序

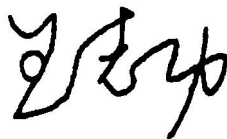
进入 21 世纪,“985 工程”和“211 工程”的实施,推动了高水平大学和重点学科的建设,在高校中汇聚了一大批高层次人才,产生了一批具有国际先进水平的学术和科学技术研究成果。然而高校规模的超高速增大,导致不少学校的专业设置、师资队伍、教材资源和教学实验条件不能迅速适应发展需要,教学质量问题日益突现。高校教材,作为教学改革成果和教学经验的结晶,其质量问题自然备受关注。

需要指出的是,很多高等学校教材经过多年的教学实践检验,已经成为广泛使用的精品教材。同时,我们也应该看到,现用的教材中有不少内容陈旧、未能反映当前科技发展的最新成果,不能满足按新的专业目录修订的教学计划和课程设置的需要。这就要求我们的高等教育教材建设必须与时俱进、开拓创新,在内容质量和出版质量上均有新的突破。

根据教育部教高司 2003 年 8 月 28 日发出的 [2003] 141 号文件,在教育部组织下,历经数年,2006~2010 年教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会按照教育部的要求,致力于制定专业规范或教学质量标准,组织师资培训、教学研讨和信息交流等工作,并且重视与出版社合作,编著、审核和推荐高水平电子电气基础课程教材。

“电工学”、“电路”、“信号系统”、“电子线路”、“电磁场”、“自动控制原理”、“电机学”等电子电气基础课程是许多理工院校的先修课程,也是电子科学与技术、电气工程及其自动化等专业学科的基石,在科学研究领域和产业应用中发挥着极其重要的作用。此类教材的编写,应提倡新颖的立意,“适用、先进”的编写原则和“通俗、精炼”的编写风格,以百花齐放的形式和较高的编写质量来满足不同学科、不同层次的师生的教学要求。

本电子电气基础课程教材编审委员会即是基于此目的而设立的,希望能够鼓励更多的优秀教师参与其中,为高质量教材的编写和出版贡献出聪明才智和知识经验。



2009 年 10 月于东南大学

前 言

《信号与系统》课程是高等学校通信、自动化、电子信息工程类专业的专业基础课，它的基础理论和基本方法的应用已经由传统的通信、测量和控制工程等领域迅速扩大到电力系统、电机与电气、电力电子、生物医学等许多需要对信号与系统进行定性或定量分析的领域，正如麻省理工学院的奥本海姆所说，《信号与系统》课程不仅是工程教学中一门非常基本的课程，而且也是工科学生在大学教育阶段所修课程中最有益的而又引人入胜的一门课。

本书共 12 章，体系结构及内容安排体现了科学性、先进性和适用性，能够反映本学科国内外科学研究和教学研究的先进成果，完整地表达了课程所包含的知识，结构严谨，层次清晰。本书主要具有以下特点：

(1) 在教材体系上，从时域分析到变换域分析，突出不同分析方法的特点、适用范围及应用条件。从信号分析到系统分析，强调信号分析是系统分析的基础。系统可以看成是信号的处理，通过信号分析获得准确的信号特征是对信号进行有效处理的前提。

(2) 在教材内容上，不仅体现了经典与现代、连续与离散、信号与系统的辩证关系，而且反映信号处理的新理论和新技术，为不同特点的学生提供发展空间。对于信号分析，突出基本信号的描述及信号的表示，强调傅里叶变换、拉氏变换和 Z 变换的数学概念、物理概念和工程概念，淡化其数学运算技巧。对于系统分析，侧重系统的描述与特性分析，着重体现系统函数的概念及作用。

(3) 积极将教研与科研成果引入教材，介绍信号与系统的工程应用，如信号与系统在通信系统中的应用，进一步理解信号与系统的重要概念。

本教材是在编者的教学讲义基础上编写而成，同时也参考了诸多文献资料。第 1 章、第 5 章、第 6 章由袁丽英编写；第 2 章由齐丽华编写；第 3 章、第 4 章、第 10 章由张锐编写；第 7 章、第 8 章、第 9 章由李冰编写；第 11 章由杜德生编写；第 12 章由张颖编写。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不当之处，敬请有关专家及其他读者给予批评指正。

编 者

2010 年 5 月

目 录

序

前言

第 1 章 信号与系统基本概念	1
1.1 引言	1
1.2 信号的分类	2
1.3 奇异信号	4
1.4 信号的基本运算	11
1.5 信号的分解	14
1.6 离散时间信号	18
1.7 卷积	21
1.8 系统概述	27
本章小结	32
习题	32
第 2 章 连续系统的时域分析	34
2.1 线性非时变系统的描述及特点	34
2.2 微分方程的经典解法	35
2.3 起始点的跳变——从 0^- 到 0^+	40
2.4 完全解的分解	44
2.5 冲激响应与阶跃响应	49
2.6 零状态响应的卷积求法	54
2.7 线性非时变系统的算子符号表示与传输算子	57
本章小结	57
习题	57
第 3 章 连续信号的频域分析	61
3.1 周期信号的傅里叶级数	61
3.2 周期信号的频谱	68
3.3 非周期信号的频谱	73
3.4 典型非周期信号的频谱	75
3.5 傅里叶变换的性质	80
3.6 周期信号的傅里叶变换	92
3.7 抽样定理	95
本章小结	100
习题	100
第 4 章 连续系统的频域分析	104
4.1 连续系统的频率响应	104

4.2	周期信号激励下系统的稳态响应	107
4.3	非周期信号激励下系统的零状态响应	110
4.4	无失真传输系统	111
4.5	理想低通滤波器	113
4.6	调制与解调	120
	本章小结	122
	习题	123
第 5 章	连续信号的复频域分析	126
5.1	引言	126
5.2	拉普拉斯变换	126
5.3	拉普拉斯变换的收敛域	129
5.4	常用函数的拉普拉斯变换	131
5.5	拉普拉斯逆变换	133
5.6	拉普拉斯变换的基本性质	139
	本章小结	144
	习题	145
第 6 章	连续系统的复频域分析	147
6.1	线性微分方程的复频域解	147
6.2	系统函数	149
6.3	系统函数的零极点分布与时域响应	152
6.4	系统函数的零极点分布和频率响应	154
6.5	控制系统的方框图及其简化	158
6.6	信号流图和梅森定理	161
	本章小结	163
	习题	163
第 7 章	离散系统的时域分析	168
7.1	离散系统的数学描述	168
7.2	差分方程的求解	173
7.3	零输入响应与零状态响应	176
7.4	单位函数响应与卷积	178
	本章小结	182
	习题	182
第 8 章	离散信号的复频域分析	184
8.1	Z 变换及其收敛域	184
8.2	常用序列的 Z 变换	188
8.3	Z 变换的性质	189
8.4	Z 逆变换	194
8.5	Z 变换与拉普拉斯变换的关系	199
	本章小结	202

习题	202
第 9 章 离散系统的复频域分析	204
9.1 离散系统响应的 z 域求解	204
9.2 离散系统的系统函数	207
9.3 离散系统的频率响应特性	209
本章小结	212
习题	212
第 10 章 信号的相关分析	214
10.1 能量信号与功率信号	214
10.2 能量谱与功率谱	215
10.3 信号的相关分析	219
10.4 信号相关分析的应用	223
本章小结	226
习题	226
第 11 章 离散傅里叶变换	227
11.1 离散傅里叶级数	227
11.2 离散傅里叶变换	231
11.3 离散傅里叶变换的性质	233
11.4 离散傅里叶变换与 Z 变换的关系	240
*11.5 快速傅里叶变换	241
11.6 快速傅里叶变换的应用	246
本章小结	249
习题	249
第 12 章 系统的状态变量分析法	252
12.1 引言	252
12.2 连续系统状态方程的建立	253
12.3 连续系统状态方程的解法	260
12.4 系统函数矩阵和拉普拉斯解法	267
12.5 离散系统的状态空间描述	269
12.6 离散系统状态方程的解法	272
12.7 系统的能控性和能观性	277
本章小结	281
习题	281
附录一 常见信号的傅里叶变换	286
附录二 常用数学表	288
附录三 部分习题参考答案	290
参考文献	304

第1章 信号与系统基本概念

1.1 引言

信号与系统的概念涉及到几乎所有的技术领域,包括电子电路、通信装置、信号处理装置、机器人及自动化、汽车、生物医学仪器、化工生产过程、加热和制冷装置以及人类社会和经济发展的其他领域。

人类在认识和改造自然的过程中离不开信息的获取,人们发出消息、接收消息是人类社会信息交流的手段。随着科技的进步,人们之间的联系不断增强,信息获取的途径越来越多样。人们发布新闻、广播图像或者传递数据,其目的都是要把某些消息借助一定形式的信号传递出去。

所谓消息,是指用来表达信息的某种客观对象,如电话中的声音、电视中的图像、雷达探测到的目标距离、高度、方位等都是消息。所谓信号,是消息的表现形式,是带有信息的某种物理量,如电信号、光信号、声音信号等。信号是消息的表现形式,消息则是信号的具体内容。

很久以来,人们曾经寻求各种方法,以实现信号的传输。我国古代利用烽火台的火光传送敌人入侵的警报;古希腊人以火炬的位置表示不同的字母符号。光信号的传输是最原始的光通信系统。利用击鼓鸣金可以报送时刻或者传达命令,这是声信号的传输。以后又出现信鸽、旗语、驿站等等传送消息的方法。然而这些传递信号的方法无论在距离、速度还是可靠性方面都受到很大局限。

19世纪以后,人们开始利用电信号传递消息。1837年莫尔斯(F. B. Morse)发明了电报。1876年贝尔(A. G. Bell)发明了电话,直接将声音信号转变为电信号沿导线传输。19世纪末,人们又致力于研究用电磁波传送无线电信号。1865年,英国的麦克斯韦(Maxwell)提出了电磁波学说。为实现这一理想,德国的赫兹(Hertz)通过实验证实了麦克斯韦的学说,为无线电电子科学的发展奠定了理论基础。1895年,俄国的波波夫(Popov),意大利的马可尼(Marconi)实现了电信号的无线传输。从此以后,传送电信号的通信方式得到迅速发展,无线广播、超短波通信、广播电视、雷达、无线电导航等相继出现,并且已经应用到工农业生产、国民经济管理、国防及人们日常生活的各个方面。因此研究电信号具有普遍的、重要的意义。

无线电电子学技术的发展和运用,归根到底是要解决一个信号传输问题,也就是要建立一个输送信号的装置,即所谓的信号传输系统。电报、电话、电视、雷达、导航等都是一些信号传输系统。传递消息所需的一切技术设备的总和称为通信系统。典型的通信系统的组成框图如图1-1所示。图中,信号源产生含有信息的信号,通过发射机加工处理后,沿着某一通信线路发送出去。在接收端,信息信号被提取出来,再送到终端处理机中。在发射和

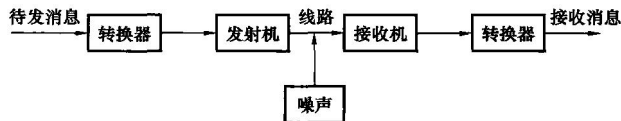


图 1-1 典型通信系统的组成框图

接收过程中,还会引入各种噪声。现在对图 1-1 中的一些名词稍作解释。

(1) 消息:待传送的一种以收、发双方事先约定的方式组成的符号,如语言、文字、图形、电码等。

(2) 信号:按照习惯,人们将用于描述和记录消息的任何物理状态随时间变化的过程叫做信号,这里是指电信号。由于消息一般不便直接传输,故需把消息转换成相应变化的电压或电流,即电信号。信号是消息的表现形式。

(3) 转换器:是指把消息转换为电信号,或者反过来把电信号还原成消息的装置,如摄像管、显像管、话筒和喇叭等。由于这些装置具有将一种形式的能量转换为另一种形式能量的功能,所以也常称其为换能器。

(4) 线路:是指信号传输的通道。它可以是双导线、同轴电缆和波导,也可以是空间人造卫星,或者是光导纤维。有时发射机和接收机也可以看成是信号的通道。

由上述可知,通信系统的工作主要包括三个方面:消息与信号之间的转换,信号的处理和信号的传输。可见,通信系统是以信号为核心进行工作的。为了保证信号以尽可能小的失真进行传输及得到满意的处理,作为无线电技术工作者应首先认真研究信号的特性。

1.2 信号 的 分 类

信号是通信系统中所传输的主体,系统中所包含的各种电路、设备只是实现这种传输的手段。信号是运载消息的载体,其最常见的表现形式是随时间变化的电压或电流,因此描述信号的常用方法是写出它的数学表达式,也可以绘图表示。由于信号表现为以时间为自变量的函数,故在本书中常常交替地使用“信号”与“函数”这两个名词而不加区别。然而,严格说来函数可以是多值的,而信号却是单值的。

从不同的研究角度出发,可将信号大致分为下列几种类型:确定性信号和随机信号;周期信号与非周期信号;连续时间信号与离散时间信号;能量信号与功率信号等。

(1) 确定性信号与随机信号:当信号是一确定的时间函数时,给定某一时间值,就可以确定出一相应的函数值,这样的信号是确定信号或称规则信号。但是,实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性,这种信号是随机信号或称不确定信号。严格说来,在自然界中确定信号是不存在的。因为在信号传输过程中,不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响,这些干扰和噪声都具有随机特性。随机信号不能表示为确切的时间函数,对它的研究只能使用统计学方法。

(2) 周期信号与非周期信号:在确定性信号中又可分为周期信号和非周期信号。所谓周期信号就是依一定时间间隔无始无终地重复着某一变化规律的信号,其表示式可以写为

$$f(t) = f(t + nT); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

满足此关系式的最小值 T 称为信号的周期。这类信号,只要给出任一周期内的变化规律,即可确定所有其他时间内的规律性,如图 1-2 所示。非周期信号在时间上不具有周而复始变化的特性,它不具有周期 T (或者认为周期 T 是无限大的情况)。当然,真正的周期信号实际上是不存在的,所谓周期信号只是指在相当长时间内按某一规律重复变化的信号,非周期信号如图 1-3 所示。

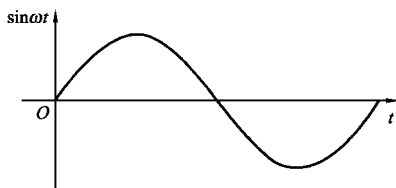


图 1-2 周期信号

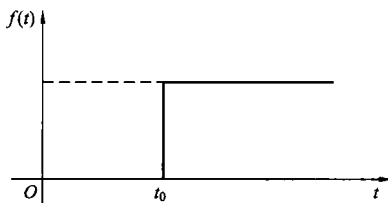


图 1-3 非周期信号

(3) 连续时间信号与离散时间信号：按照时间函数自变量取值的连续性和离散性可将信号分为连续时间信号与离散时间信号（简称连续信号与离散信号）。如果在某一时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点外）都可给出确定的函数值，则此信号就称为连续信号。如图 1-4 (a) 和 (b) 所示的信号，都是在 $-\infty < t < +\infty$ 的时间间隔内的连续信号。只是在图 1-4 (a) 中 $t < 0$ 的范围内的信号值均为零，并且图 1-4 (b) 中在 $t = 0$ 处有一个不连续点。

连续信号的幅值可以是连续的，即可以取任何实数，如图 1-4 (a) 所示；连续信号的幅值也可以是离散的，即只能取有限个规定的数值，如图 1-4 (b) 所示。对于时间和幅值都连续的信号又称为模拟信号，如图 1-4 (a) 所示。与连续信号相对应的是离散信号。代表离散信号的时间函数，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间函数没有定义。离散时间间隔一般是均匀的。如果离散信号的幅值是连续的，即幅值可取任何实数，如图 1-4 (c) 所示，则称为抽样信号。如果离散信号的幅值只能取某些规定的数值，如图 1-4 (d) 所示，则称为数字信号。

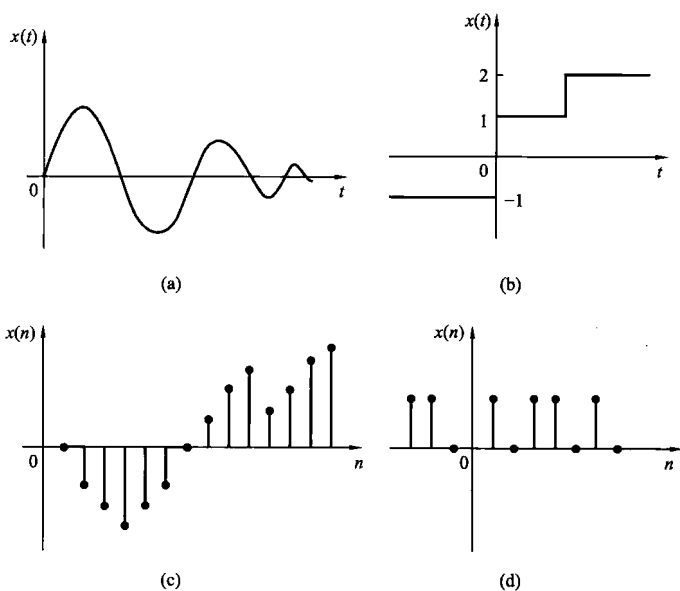


图 1-4 连续和离散时间信号

(a) 连续信号；(b) 离散信号；(c) 抽样信号；(d) 数字信号

(4) 能量信号与功率信号：按照信号的能量特点可以将信号分为能量信号和功率信号。如果在无限大的时间间隔内，信号的能量为有限值而信号平均功率为零，则此信号称为能量信号。对它只能从能量方面去加以考察，而无法从平均功率去考察。如果在无限大的时间间隔内，信号的平均功率为有限值而信号的总能量为无限大，则此信号称为功率信号。对它只能从功率上去加以考察。不难理解，周期信号都是功率信号，有限时间内的信号必为能量信号，而非周期信号可以是能量信号、也可以是功率信号。

除以上分类方式外，还可将信号分为一维信号与多维信号、调制信号、载波信号与已调信号等。

1.3 奇异信号

在信号与系统分析中,常常用一些基本的信号来表示复杂的信号,因此学习基本信号的知识是分析信号与系统的基础。这些基本信号就包括常用的连续信号和奇异信号,在讨论奇异信号之前,先介绍几种常用的连续信号,如正弦信号、指数信号、抽样信号和高斯信号等。

(1) 正弦信号: 正弦信号和余弦信号互为正交信号, 仅在相位上相差 90° , 经常统称为正弦信号, 一般表示式为

$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta) \quad (1-2)$$

式中, K 表示振荡幅度; ω 表示振荡角频率, θ 表示初相位。图 1-5 为正弦信号的波形图, 其中 $T=2\pi/\omega$ 为正弦信号的周期。

正弦信号的一个重要性质是对它进行微分或积分运算之后, 仍为同频率的正弦信号。

(2) 指数信号: 其表示式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (1-3)$$

式中 K, a 为常数。图 1-6 绘出了当数值 a 大于零、等于零、小于零三种情况的函数波形。对指数信号进行微分或积分, 仍然是指数信号形式。

(3) 抽样信号: 在通信及信号处理的许多应用中, 经常会遇到抽样信号 (Sampling Function)。其定义为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-4)$$

抽样信号波形如图 1-7 所示。观察可知, 这是一个偶函数, 在 t 的正、负两方向振幅都逐渐衰减, 当 $t=\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ 时, 函数值为零。

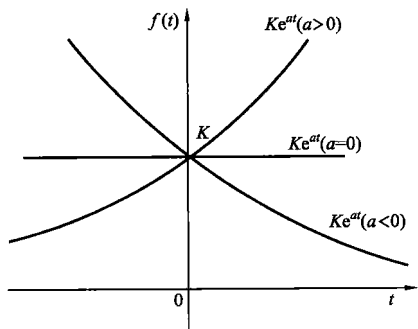


图 1-6 指数信号

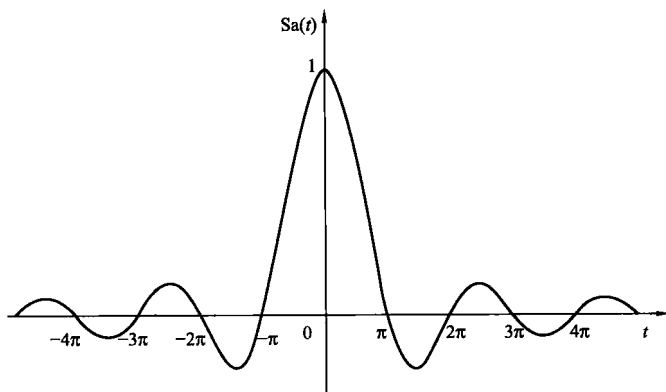


图 1-7 抽样信号

$\text{Sa}(t)$ 函数具有如下性质:

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi$$

(4) 钟形脉冲函数 (高斯函数): 钟形脉冲函数的定义式为

$$f(t) = E e^{-(t/\tau)^2} \quad (1-5)$$

钟形脉冲函数波形如图 1-8 所示。它是一个单调下降的偶函数。

在信号与线性系统分析中, 除上述几种常用基本信号之外, 还有一类基本信号, 它们具有很简单的数学形式, 属于连续信号, 但是其本身包含不连续点, 或其导数与积分存在不连续点, 而且不能以一般函数的概念来定义, 而只能以“广义函数”的概念来研究。由于这类信号各阶导数不都是有限值, 所以通常把这类信号叫做奇异信号或奇异函数。下面介绍几种常见的奇异信号: 单位斜坡信号, 单位阶跃信号、单位冲激信号和单位冲激偶。

1. 单位斜坡信号

单位斜坡信号定义为从 $t=0$ 开始, 随后具有单位斜率的时间函数, 用 $R(t)$ 表示。其波形如图 1-9 (a) 所示, 数学表达式为

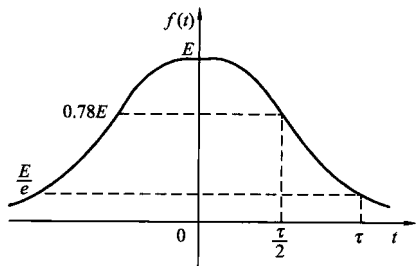


图 1-8 钟形脉冲函数

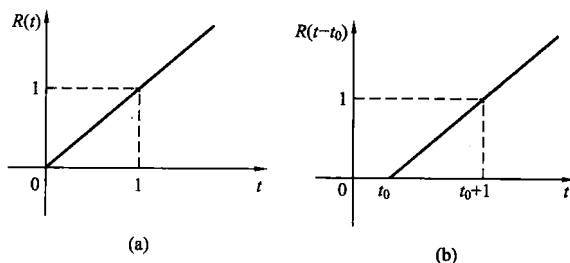


图 1-9 单位斜坡信号

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

如果将起始点移至 t_0 , 如图 1-9 (b) 所示, 得到延时 t_0 的单位斜坡函数, 表达式为

$$R(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ t-t_0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (1-7)$$

如果要求的斜率不是 1 而是 K (K 为大于零的常数), 则可写成 $KR(t)$ 。另外, 将时间变量展缩也可以表示斜率的变化, 例如, $KR(t)$ 和 $R(Kt)$ 都代表斜率为 K 的斜坡信号。

2. 单位阶跃信号

单位阶跃信号描述了某些实际对象从一个状态到另一个状态可以瞬时完成的过程。例如, 使用无惰性开关接通电源时电压变化情况。

单位阶跃函数的定义是零时刻前，其值为零；零时刻后，其值为 1。波形如图 1-10 (a) 所示。

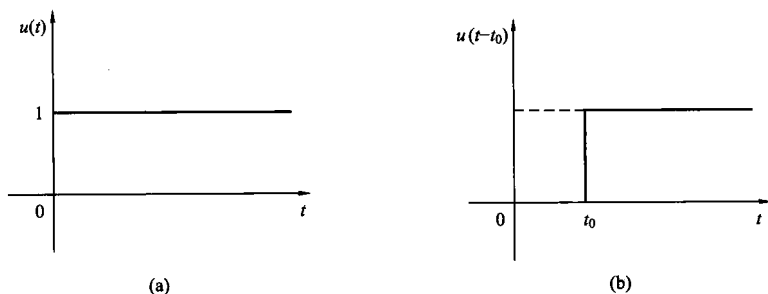


图 1-10 单位阶跃信号

其数学表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

如果跳变点移至 t_0 ，如图 1-10 (b) 所示，则表达式变为

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (1-9)$$

如果跳变值不是 1 而是 E ，则可写作 $Eu(t)$ 。

容易证明，单位阶跃信号与单位斜坡信号有下列关系：

(1) 单位斜坡信号等于单位阶跃信号的积分为

$$R(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (1-10)$$

(2) 单位阶跃信号等于单位斜坡信号的导数为

$$u(t) = \frac{dR(t)}{dt}, \quad t \neq 0 \quad (1-11)$$

阶跃信号具有鲜明的单边特性。当任意函数 $f(t)$ 与 $u(t)$ 相乘时，将使函数 $f(t)$ 在跳变点之前的幅度变为零，因此阶跃信号的单边特性又称为切除特性。例如，将正弦函数 $\sin t$ 与 $u(t)$ 相乘，使其 $t < 0$ 的部分变为零，如图 1-11 所示。

利用阶跃信号的切除特性，可以方便地表示其他类型的函数。例如，矩形脉冲 $G_T(t)$ 可表示为

$$G_T(t) = u(t) - u(t-T) \quad (1-12)$$

如图 1-12 所示。利用阶跃信号还可以表示“符号函数”(Signum)。该函数定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

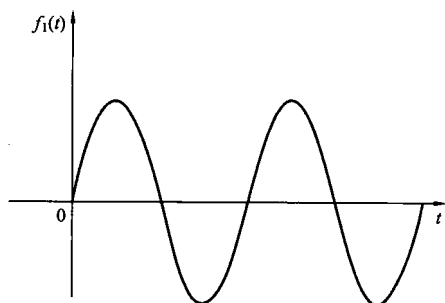
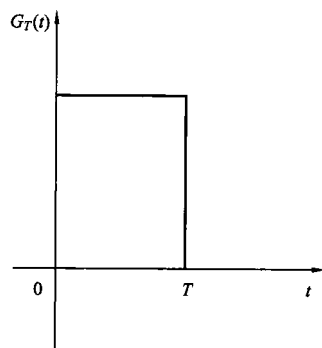
图 1-11 $\sin t \cdot u(t)$ 的波形

图 1-12 矩形脉冲信号

其波形如图 1-13 所示, 显然, 可以利用阶跃信号表示 $\text{sgn}(t)$ 。

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad \text{或} \quad \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

与阶跃函数类似, 符号函数在跳变点也不予定义, 但有时也规定 $\text{sgn}(0) = 0$ 。利用阶跃信号还可以表示任意信号, 这将在信号的分解中详细论述。

3. 单位冲激信号

单位冲激信号 $\delta(t)$ 也称为 Delta 函数或狄拉克分布。冲激信号是对于作用时间极短而强度极大的物理过程的理想描述, 如打乒乓球时的抽杀情况。通常冲激信号具有以下三种定义方式。

(1) 矩形脉冲演变为冲激函数

图 1-14 所示矩形脉冲, 宽为 τ , 幅度为 $1/\tau$, 其面积为 1。如果 τ 减少, 脉冲面积保持不变。当 τ 趋于零时, 脉冲幅度趋于无限大。矩形脉冲在此种极限情况即为单位冲激信号或称为单位冲激函数, 记作 $\delta(t)$, 表示式为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1-14)$$

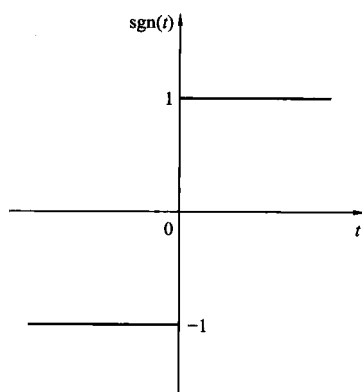
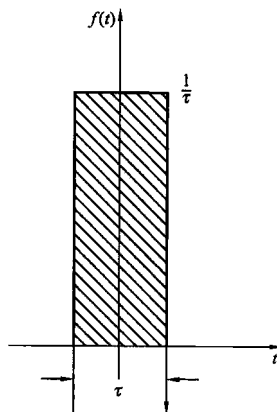
图 1-13 $\text{sgn}(t)$ 信号波形

图 1-14 矩形脉冲

单位冲激信号 $\delta(t)$ 只在 $t=0$ 处有一冲激, 其他处均为零, 如图 1-15 所示。面积为 1, 表明其冲激强度。如果面积为 E , 表明冲激强度为 $\delta(t)$ 的 E 倍, 记为 $E\delta(t)$ 。在波形图中, 应将冲激强度值标在箭头旁边的括号内。

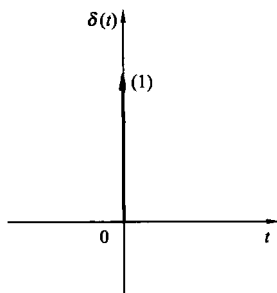
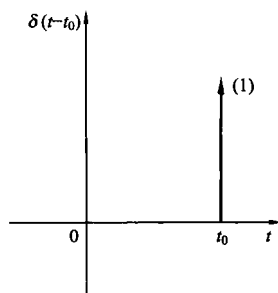


图 1-15 单位冲激信号

图 1-16 t_0 时刻出现的单位冲激信号

除了可以利用矩形脉冲演变为单位冲激信号外, 还可利用具有对称波形的三角形脉冲、钟形脉冲、抽样信号等, 保持其曲线下的面积为 1, 并使其宽度趋于零而得到单位冲激信号。

(2) 狄拉克 (Dirac) 定义

冲激信号的狄拉克定义式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$
(1-15)

如果“冲激”点不在 $t=0$ 而在 $t=t_0$ 处, 则定义式可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

$$\delta(t-t_0) = 0, t \neq t_0$$
(1-16)

此信号波形如图 1-16 所示。特别需要指出的是, $\delta(t)$ 在 $t=0$ 点的值 $\delta(0)$ 是没有定义的, $\delta(0)$ 并不等于无穷。单位冲激信号 $\delta(t)$ 不是通常意义下的函数, 即它并不是对每一个自变量对应一个函数值。它是使用积分定义的广义函数。

(3) 冲激信号的抽样性定义

若 $f(t)$ 为连续函数, 则冲激信号 $\delta(t)$ 应使下式成立, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$
(1-17)

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0)$$

类似地, 对于延迟 t_0 的单位冲激信号有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$
(1-18)

该定义是通过冲激信号与其他函数的运算关系而得到的。此定义式表明了冲激信号的一个重要性质: 抽样特性, 即冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 与函数 $f(t)$ 相乘积的积分正好等于冲激点的函数值 $f(t_0)$ 。

以上三种冲激信号定义都没有回答 $t=0$ 时的函数值是什么的问题, 因此说 $\delta(t)$ 不是通常意义的函数, 故而称为广义函数。

单位冲激信号与单位阶跃信号是最常见的两种奇异信号, 它们之间存在下列关系: