

KE XUE WEN CONG

科学文丛

游戏中数学

er

广州出版社

科学文丛

游戏中学数学

(7)

广州出版社出版

图书在版编目 (CIP) 数据

科学文丛. 何静华 主编. 广州出版社. 2003.
形继祖

书号 ISBN7-83638-837-5

I. 科学... II. III. 文丛

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 082275 号

科学文丛

主 编: 何静华
形继祖

广州出版社

广东省新宜市人民印刷厂

开本: 787×1092 1/32 印张: 482.725

版次: 2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1-5000 套

书号 ISBN 7-83638-873-5

定价: (全套 104 本) 968.80 元

目 录

一、猜测年龄——谈谈二进制	(1)
二、丢番都的墓碑——谈谈以字母代数	(8)
三、可笑的教徒——奇偶分析法	(11)
四、速算比赛	(16)
五、巧填数字——学一点分析推理	(27)
六、智斗国王——介绍“反证法”	(31)
七、攻克碉堡——逆推法	(37)
八、荷池求积——介绍“勾股定理”	(44)
九、将军饮马——最短路线问题	(52)
十、折纸问题——谈谈等比数列	(57)
十一、兔子问题——关于递推关系	(61)
十二、韩信点兵——谈谈不定方程	(69)
十三、七桥问题——一笔画与图论	(80)
十四、狄青掷币——关于概率	(86)
十五、田忌赛马——运筹规划例谈	(95)
十六、游艺晚会	(104)

一、猜测年龄

——谈谈二进制

星期二下午,是学校安排的第二课堂活动时间,初一年级数学课外活动小组由柳老师担任辅导员,今天柳老师和同学们开展第一次数学课外活动。

柳老师说:“我们今天先做一个游戏:猜年龄。”教室里一片掌声。

投影仪在屏幕上显示出以下六张表:

(A)

32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
	62	63			

(B)

16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
	62	63			

(C)

8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61
	62	63			

(D)

4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61
	62	63			

(E)

2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59
	62	63			

(F)

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
	61	63			

柳老师说:“同学们,只要你告诉我,哪几张卡片上显示了你的

年龄,那么,我就能告诉你,你的年龄是多少”。

同学们争着发言。

吴昊第一个说:“(C)、(D)两张表上有我的年龄,其他表上没有。”柳老师说:“如果按照从(A)到(F)的顺序,你的年龄在各表中依次是无、无、有、有、无、无,是吗?”吴昊说:“是的。”柳老师说:“吴昊同学 12 岁,对吗?”吴昊笑着说:“是的。”佳明同学说:“我的年龄在六张表中依次是无、无、有、无、有、有。”柳老师说:“佳明同学 11 岁,对吗?”佳明点头。任威举手说:“能不能问其他人的年龄?”柳老师说可以,任威说:“我的表哥的年龄在六张表中依次是无、有、无、无、无、有。”柳老师说:“你的表哥 17 岁,大概在念高中吧!”任威笑着回答:“是的,在我校高三(2)班。”同学们既兴奋,又惊奇。

这时,许亮同学举起了手,说:“柳老师,我也能猜出您的年龄。”柳老师笑着说:“试试吧。我的年龄在六张表中依次是有、无、有、无、有、无,”许亮稍微想了想,说:“柳老师今年 42 岁”,并学着柳老师的举动,说:“大概在教初一的数学吧!”逗得大家哄堂大笑,柳老师也开心地地点着头。

柳老师说:“许亮同学已经识破了我的秘密了,许亮,你说你是怎么猜测的吧!”

许亮说:“只要把有年龄的那几张表上的第一个数加起来就行了。”

啊,原来这么简单,好几个同学争着试了试,都成功了。

一直沉思不语的张芸同学举起了手,说:“柳老师,您这几张表是怎样造出来的呢?”

柳老师说:“张芸同学这个问题提得很好,我们不仅要能按照许亮同学所说的方法去测算年龄,更重要的是要弄清其中的

道理。要弄清楚这几张表的造法,还得先从二进制数讲起。”

接着,柳老师讲开了:

“我们从幼儿园开始学习的数,是十进制的,也就是说,逢十进一,一共有从0到9共10个数字,这种记法的产生与人有十个指头有关。

任何一个十进制的整数,总可以写成

$$a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \times 10^1 + a_n$$

的形式,其中, n 是自然数或零。如

$$41285 = 4 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5$$

我们称10是十进制记数法的“基数”。

在计算机上,通用的是二进制数,这是因为计算机的计算和记忆元件只有两种不同的状态,如“开”和“关”。在二进制中,是满二进一,只有0、1两个数码。

与十进制一样,任何一个二进制的整数,都可以表示成

$$a_0 \times 2^n + a_1 \times 2^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \times 2^1 + a_n$$

的形式,其中, n 是自然数或零。如

$$10011 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

我们称2为二进制记数法的“基数”。为了与其他进位制相区别,常常将基数2写在右下角,如 10011_2 ,十进制的基数10一般不写。在 10011_2 中,我们将最左边的1叫做首位数(或叫做第一位数),将最右边的1或0叫做末位数。

同学们会问,十进制的数与二进制的数如何换算呢?下面我们谈谈这个问题。

化二进制的数为十进制的数,比较简单,我们以具有六位数的二进制数 110101_2 为例说明。

$$110101_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 32 + 16$$

$$+ 4 + 1 = 53$$

如何将十进制的数化为二进制的数呢？常常采用“除以 2 取余法”。我们以化 13、100 为二进制的数为例说明。

2 13	 余数
2 6	 1(二进制数的末位)
2 3	 0
2 1	 1
0	 1(二进制的首位)

那么, $13 = 1101_2$ 。

2 100	 余数
2 50	 0(二进制数的首位)
2 25	 0
2 12	 1
2 6	 0
2 3	 0
2 1	 1
0	 1(二进制数的首位)

那么, $100 = 1100100_2$ 。

我们再回头看看前面的六张表。在十进制中,不超过 63 的自然数(相当于在二进制中不超过 6 位的正整数)都按照下面方法记入各表内,转化成二进制的数以后,首位为 1 的,记入表(A)中,第二位为 1 的,记入表(B)中,……,末位为 1 的,记入表(F)中,当吴昊同学回答‘无、无、有、有、无、无’时,就对应着二进制数 1100_2 ,化为十进制, $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 = 12$,也就是说

表格	A	B	C	D	E	F
回答	无	无	有	有	无	无
对应二进制数	0	0	1	1	0	0
对应十进制数	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
换算	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 12$					

佳明同学,你能说出你回答的‘无、无、有、无、有、有’对应着二进制数是什么吗?”佳明说:“是 1011”,“你能化成十进制吗?”佳明在黑板上写下了

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 11$$

任威也急不可待地举起了手,说:“柳老师,我也会算出我的表哥的年龄了。”说着就到黑板前写下了

$$10001_2 = 1 \times 2^4 + 1 = 17$$

柳老师夸奖了佳明和任威。并告诉大家,由二进制数化为十进制数的过程中,可以像任威一样,将 $0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2$ 省写。

柳老师问同学们:“懂了吗?”

同学们齐声回答:“懂了!”

柳老师说,“让我们再来做一个游戏,检验大家是不是真懂了。”

柳老师首先让同学们选出一个主持人,大家一致选数学课代表李莉,而后又选了六名裁判,再将其他同学分成六组,每组 6 人,让每组按坐位坐成直行。

游戏这样进行:当主持人报出一个十进制的数(不超过 63)以后,每个同学通过计算将它化为二进制,各组六名同学由前至后代表二进制的六位数的首位,第二位,……,第末位(第 6

位),凡是对应“1”的那个同学,就将手举起来,对应“0”的同学就不举手,看哪一组表示正确,完成得快,游戏开始后,同组同学彼此间不能商量,不能讨论,否则算作失败。游戏共进行三次,每次产生1个优胜组,优胜组退出下一次出赛,这样,三次共产生3个优胜组。

比赛结果,以许亮、彭燕、张华为组长的三个组分获一、二、三名,同学们以热烈的掌声表示对他们的祝贺。

结束了游戏以后,爱发问的任威举手提出一个问题:“爷爷今年73岁,六张表上都没有73,怎么办呢?”

柳老师肯定了任威的问题提得好,但柳老师没有作正面回答,只是要任威和同学们课后去考虑这个问题,吴昊同学反应特别快,马上讲了一句:“再加一张表就是了。”

柳老师最后说:“有没有同学会觉得二进制麻烦、啰嗦呢?十进制的100,在二进制里要写成 1100100_2 这么一长串,为什么电子计算机却偏爱二进制呢?”

计算机世界里采用二进制,是由于计算机硬件本身的特点所决定的。硬件基本电路在大多数情况下只有两种状态,例如计算机里的光电管,只有受光和不受光两种状态,开关三极管只有导通或截止两种状态,这些只能与二进制中的1或0相对应;计算机贮存信息的媒介,如磁盘,其磁性材料只有两种状态:正剩磁状态和负剩磁状态;计算机的读写磁头,在读写信息时,也只有两种状态:正向电流和反向电流。

计算机硬件的基本组成单元都只呈现两种状态,这就为二进制提供了大显身手的机会,人们人为地规定:用‘1’代表一种状态,而用‘0’代表另一种状态,这样,人与计算机之间,计算机与外部世界之间的对话就通过一串‘1’、‘0’巧妙地完成了。这

就是电子计算机所以要采用二进制的根本原因。

显示‘1’和‘0’，对电子计算机来说，真是‘举手之劳’。我国自行设计的银河——Ⅱ型计算机运算速度达到每秒10亿次，打个比方，如果一个人不吃不睡，每秒钟做10次加法运算，那么，他辛辛苦苦地做3年的工作，银河——Ⅱ只需要‘嘀嗒’一秒钟就完成了。

计算机的能耐特别大，操纵卫星火箭、指挥生产、管理交通、预测天气、找矿选矿、预算计划、作画下棋……

将来，计算机还要发展，功能还要拓广，同学们是未来的主人，计算机要靠你们去操纵，去设计更精巧的计算机，到那时，你们还记得今天‘猜年龄’的游戏吗？还记得今天由6位同学组成的‘6位举手计算机’吗？”

“记得！”同学们一齐高声回答。

二、丢番都的墓碑

——谈谈以字母代数

又是星期二的第二课堂活动时间了，柳老师走进教室的时候，同学们早已到齐了。

柳老师说：“同学们，今天，我先给大家讲一个小故事。丢番都是古希腊的数学家，大约生活在公元前 4 世纪到公元前 3 世纪之间，距现在 2000 多年了。丢番都对代数有许多杰出的贡献，被人们称为‘代数学的鼻祖’，可惜，他的历史和成就保留下来的不多。

丢番都逝世以后，他的朋友为了纪念他，在他的墓碑上刻上了一首诗歌形式的墓志铭，碑文是：

‘过路人！这儿埋葬着丢番都。下面的数字可以告诉您，他的寿命有多长。

他的生命的 $\frac{1}{6}$ 是幸福的童年；

再过了一生的 $\frac{1}{12}$ ，颊上长起了细细的胡须；

再过去 $\frac{1}{7}$ 年程，丢番都结了婚；

婚后 5 年，他得了第一个儿子，感到很幸福；

可是，命运给这孩子光辉灿烂的生命，只有他父亲的一半；

自儿子死后，这老头儿在深深的悲痛之中只活了 4 年，结

束了他的尘世生涯。

请你说，丢番都活到多大年纪，才和死神相见？’

同学们，你们能告诉我，丢番都活了多大年龄吗？”

说着，柳老师用投影仪将碑文投影到屏幕上。

同学们开始了紧张的思索，有的小声议论着。

一会儿，平时不大多话的涂军举起了手，说丢番都活了 84 岁，当柳老师问涂军是怎样算出来的时候，涂军没有说话，走到黑板前，写下了如下一串算式：

$$(5+4) \div (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2}) = 84$$

柳老师说：“你能给同学们解释一下算式的来历吗？”

涂军说：“我将丢番都的一生度过的时间当作 1，减去了童年的 $\frac{1}{6}$ ，又减去了童年到长胡须前的 $\frac{1}{12}$ ，再减去婚前的 $\frac{1}{7}$ 及儿子在世的 $\frac{1}{2}$ ，余下的时间就是 9 年。也就是说，丢番都一生的 $\frac{9}{84}$ 是 9 岁，9 除以 $\frac{9}{84}$ 等于 84。”

同学们有的点头赞同，有的还迷惑不解。

柳老师让跃跃欲试的许亮发言。

许亮说：“涂军的算式和结果都是对的。我觉得画一个线段图好理解一些。”说着，许亮到黑板上画了的线段图。

这一下，同学们都明白了。

柳老师赞扬涂军是‘瞎子吃汤元——心里有数’，赞扬许亮以形代式，形象直观，表扬他们不愧为华罗庚金杯赛的获奖者。

没等柳老师讲完，刘红同学高高地举起了手，说，“可以用列方程的方法解。”

柳老师说：“好哇！你说说看。”

刘红说：“设丢番都活了 x 岁。”

刘红边说,柳老师边在黑板上写下了:

设丢番都的寿命 x (岁)

则童年 $\frac{x}{6}$

童年到长胡须 $\frac{x}{12}$

长胡须后到结婚 $\frac{x}{7}$

婚后到当父亲 5

儿子在世 $\frac{x}{2}$

儿子去世到丢番都去世 4

所以 $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

解方程得 $x = 84$ (岁)

刘红的解法,使同学们更为兴奋。

柳老师说:“刘红的解法轻松、省事,她的英语很好,就像她轻松地完成了一段汉译英一样流畅。刘红同学选择了要求的丢番都的寿命作为未知量,用字母 x 表示,而后,将各段时间翻译成 x 的表达式,最后,抓住了‘各段时间的总和等于丢番都的寿命’这一等量关系列出含有未知数的等式。有些同学怕列方程,其实,列方程并不难,只要培养自己两方面的能力,第一,会做翻译工作,将日常语言翻译成代数语言,第二,抓住等量关系,列出等式,这等量关系,有的很明显,有的很隐蔽,隐蔽的要靠我们挖掘出来。”

三、可笑的教徒

——奇偶分析法

今天是第三次数学课外活动，柳老师又以一个有趣的故事拉开了活动的序幕。

柳老师给大家讲了一个可笑的教徒的故事。

一个虔诚的教徒在佛殿内插香。他把香插进九个香炉，插完，数一数，觉得不对，又从一些香炉里取出几支插到另一些香炉里去，插后，再一点数，又觉得不对，重新又移动了几支香，仍觉得不妥……，就这样，他整整摆弄了一个上午，还是觉得不妥当。这时，他已露出了惊慌失措的神色，冷汗沁湿了他的衣衫。

这是怎么回事呢？

原来，在进庙前，他找算命先生徐半仙算了个命，徐半仙要他按下面的要求插香，菩萨就会保佑他一家平安，不然就会大难临头。这个要求是：

三十六枝香，九个香炉装，只准插单，不准插双。

同学们，你们觉得徐半仙的要求能办到吗？

有几个同学马上回答：“办不到。”

“为什么呢？”

李旺同学举手回答：“如果每个香炉只准插单数支香，也就

是插奇数支香,那么,九个香炉所插的香的总数也是奇数。因为奇数个奇数之和一定是奇数,绝不可能等于 36。”

柳老师说:“李旺同学回答得很清楚,道理讲得很明白。徐半仙信口雌黄,欺骗了无知的教徒。”

柳老师又说:“李旺同学用的什么知识?很简单,那就是奇数和偶数的一些性质。

同学们都知道,能被 2 整除的整数叫做偶数,不能被 2 整除的整数叫做奇数,通常我们把偶数记作 $2n$,把奇数记作 $2n-1$ (n 为整数)。

一个整数,要么是奇数,要么是偶数,二者必居其一,这是整数自身的性质。你别看这个性质简单,用它,可以解决许多问题,有些甚至是看来十分不易着手解决的问题。

奇数和偶数,还做些什么性质呢?你能说出一些来吗?”

张芸说:“奇数 $\pm$ 奇数 = 偶数,奇数 $\pm$ 偶数 = 奇数,偶数 $\pm$ 偶数 = 偶数。”

胡明说:“奇数个奇数的和(或差)为奇数,偶数个奇数的和(或差)为偶数。”

李辉说:“两个奇数的积为奇数,一个偶数与一个奇数的积为偶数。”

李莉说:“若干个整数相乘,若其中有一个是偶数,那么积也是偶数;反之,若干个整数之积若为偶数,那么,这些整数中,至少有一个偶数。”

柳老师说:“同学们掌握了奇数和偶数的许多性质,下面,看看大家能不能用它们来解决一些问题。

沿江顺次有 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 、 A_6 六个码头,相邻两码头之间距离都相等,早晨,有甲、乙两船从 A_1 出发,各自在这些码头

其间多次往返送货,傍晚,甲船停泊在 A_6 码头,而乙船返回 A_1 码头。求证,无论如何两船的航程总不能相等。”

朱旻同学第一个举起手,要求发言,朱旻说:“设相邻两码头间的距离为 a ,那么,甲船的航程为 $5a$,而乙船的航程为 $10a$,因此,总不能相等。”

大多数同学表示了对朱旻的发言的不同意,说朱旻曲解了题意。

柳老师说:“如果题目是‘甲船从 A_1 直航至 A_6 ,乙船由 A_1 直航至 A_6 后又返回至 A_1 ’,那么朱旻同学的回答是对的,现在,不知道两船在各码头之间如何往返,往返了多少次也不知道,怎么样说得清呢?”

与朱旻同坐的周勇说:“朱旻的想法对我有启发,甲船从 A_1 直航至 A_6 ,则航程为 $5a$,若在两码头之间往返一次,则要多航行 a 的偶数倍,因此,甲的总航程总是 $5a$ 加上 a 的偶数倍,即 a 的奇数倍。同样,乙船的航程总是 a 的偶数倍,因此,二船的航程不能相等。”

同学们表示满意。

柳老师说:“看来杂乱无章的问题,不要用深奥的数学道理,只要用奇数与偶数的性质去分析,就解决了,如同用民间的小土药方能治大病一样,关键是要对症下药。”

接着,柳老师又给同学们出了一道题。

柳老师说:“大家都很熟悉中国象棋棋盘,知道‘象飞田,马走日’。但是,你注意到没有,马从棋盘上任何一个位置开始,再跳回原来的位置,一定都得跳偶数步。你能说清这中间的道理吗?”

说着,柳老师在屏幕上投影出了的一个象棋盘。