



普通高等教育电气工程与自动化(应用型)“十二五”规划教材

Signals and
Systems

信号与系统

◎ 主 编 王瑞兰



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育电气工程与自动化（应用型）“十二五”规划教材

信号与系统

主 编 王瑞兰
副主编 李 红 路永华
参 编 许海霞 杨 佳
主 审 付 虹

机械工业出版社

本书全面系统地论述了信号与线性系统分析的基本理论和方法,着重强调了信号的分解特性和系统的线性时不变特性,并建立了两者之间的逻辑关系。全书共分为8章,主要内容有:信号与系统基础,连续系统的时域分析,连续系统的频域分析,连续系统的s域分析,离散系统的时域分析,离散系统的z域分析,系统函数以及系统的状态变量分析。

本书可作为高等学校电子信息工程、通信工程、电气工程与自动化、测控技术与仪器、计算机科学与技术等专业“信号与系统”课程的教材或教学参考书,也可作为相关领域工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/王瑞兰主编. —北京:机械工业出版社,2011.7
普通高等教育电气工程与自动化(应用型)“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-34400-1

I. ①信… II. ①王… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①
TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第101697号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑:吉玲 责任编辑:吉玲 王寅生 任正一
版式设计:霍永明 责任校对:李秋荣
封面设计:张静 责任印制:乔宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2011年9月第1版第1次印刷
184mm×260mm·18印张·515千字
0 001—3 000册
标准书号:ISBN 978-7-111-34400-1
定价:35.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

普通高等教育电气工程与自动化 (应用型)“十二五”规划教材 编审委员会委员名单

主任委员：刘国荣

副主任委员：张德江 梁景凯 张元 袁德成 焦斌 吕进
胡国文 刘启中 汤天浩 黄家善 钱平 王保家

委员（按姓氏笔画排序）：

丁元明	马修水	王再英	王军	叶树江	孙晓云
朱一纶	张立臣	李先允	李秀娟	李海富	杨宁
陈志新	周渊深	尚丽萍	罗文广	罗印升	罗兵
范立南	娄国焕	赵巧娥	项新建	徐建英	郭伟
高亮	韩成浩	蔡子亮	樊立萍	穆向阳	

前 言

“信号与系统”是电气信息类专业的一门主要专业基础课，也是相关专业研究生入学考试课程之一。该课程的主要任务是研究确定信号通过线性时不变系统进行传输、处理的基本理论和基本分析方法以及某些典型系统的一些重要的基本概念，为进一步学习通信原理、数字信号处理等后续课程奠定基础。

全书共分为8章：第1章 信号与系统基础，第2章 连续系统的时域分析，第3章 连续系统的频域分析，第4章 连续系统的 s 域分析，第5章 离散系统的时域分析，第6章 离散系统的 z 域分析，第7章 系统函数，第8章 系统的状态变量分析。本书系统地介绍了信号与系统的基本理论和分析方法。从信号到系统，从连续系统到离散系统，从输入、输出方程到状态方程，从时域到变换域，以统一的观点阐明信号与系统的基本原理、概念和方法。本书主要特点是：以“实用”为原则，压缩繁琐的理论推导，注重基本概念、基本原理和基本方法的学习，从易到难，难易结合；例题、习题紧扣基本原理和基本概念。在学习经典理论基础的同时，本书还介绍了使用现代计算机仿真和辅助设计工具 MATLAB 来分析信号与系统问题的方法，以加深对基本概念和理论的理解。

本书由潍坊学院的王瑞兰担任主编，负责拟定大纲和统稿，并编写第8章；吉林建筑工程学院的李红编写第5、6章；兰州商学院的路永华编写第2、3、4章；许海霞编写第1章；杨佳编写第7章。

本书由长春工业大学付虹教授审阅，她对本教材的编写给予了很多指导和帮助，并提出了许多宝贵意见，谨致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，本书在内容的选择、文字表述等方面难免存在不妥及错误之处，敬请读者和专家批评赐教。

编 者

目 录

前言

第 1 章 信号与系统基础 1

- 1.1 概述 1
- 1.2 信号 2
 - 1.2.1 连续信号和离散信号 2
 - 1.2.2 周期信号和非周期信号 3
 - 1.2.3 实信号和复信号 4
- 1.3 信号的基本运算 5
 - 1.3.1 加法和乘法 6
 - 1.3.2 反转 7
 - 1.3.3 平移 7
 - 1.3.4 尺度变换 8
- 1.4 阶跃信号和冲激信号 9
 - 1.4.1 连续时间阶跃信号 9
 - 1.4.2 连续时间冲激信号 10
 - 1.4.3 冲激函数的导数和积分 11
 - 1.4.4 冲激函数的性质 11
- 1.5 系统的性质及分析方法 13
 - 1.5.1 线性 13
 - 1.5.2 时不变性 14
 - 1.5.3 因果性 16
 - 1.5.4 稳定性 16
 - 1.5.5 LTI 系统分析方法概述 16
- 习题 17

第 2 章 连续系统的时域分析 19

- 2.1 LTI 连续系统的响应 19
 - 2.1.1 微分方程的经典解 19
 - 2.1.2 初始值 24
 - 2.1.3 零输入响应和零状态响应 26
- 2.2 冲激响应和阶跃响应 29
 - 2.2.1 冲激响应 29
 - 2.2.2 阶跃响应 31
- 2.3 卷积积分 33
 - 2.3.1 卷积积分的定义 33
 - 2.3.2 卷积积分的图示与上下限的讨论 34
- 2.4 卷积积分的性质 38
 - 2.4.1 卷积的代数运算 39
 - 2.4.2 函数与冲激函数的卷积 40

- 2.4.3 卷积的微分和积分 42
 - 2.5 利用卷积积分求零状态响应 47
 - 2.6 用算子符号表示微分方程 49
 - 2.6.1 算子符号的基本规则 49
 - 2.6.2 用算子符号建立微分方程 50
 - 2.6.3 传输算子 $H(p)$ 51
 - 2.7 MATLAB 应用举例——线性系统的时域分析 52
 - 习题 55
- ## 第 3 章 连续系统的频域分析 57
- 3.1 信号分解与正交函数 57
 - 3.1.1 信号分解 57
 - 3.1.2 正交函数 59
 - 3.2 傅里叶级数 62
 - 3.2.1 傅里叶级数的三角形式 62
 - 3.2.2 傅里叶级数的指数形式 63
 - 3.2.3 信号的对称性与傅里叶级数的关系 64
 - 3.3 周期信号的频谱 65
 - 3.3.1 常见周期信号的频谱 65
 - 3.3.2 周期性矩形脉冲的频谱 68
 - 3.3.3 周期信号的功率 71
 - 3.4 非周期信号的频谱 73
 - 3.4.1 傅里叶变换 73
 - 3.4.2 常用信号的傅里叶变换 74
 - 3.5 傅里叶变换的性质 81
 - 3.5.1 线性（叠加性） 81
 - 3.5.2 奇偶性 82
 - 3.5.3 对称性 83
 - 3.5.4 尺度变换特性 84
 - 3.5.5 时移性 86
 - 3.5.6 频移性 86
 - 3.5.7 卷积定理 87
 - 3.5.8 时域微分和积分特性 87
 - 3.5.9 频域微分和积分特性 89
 - 3.5.10 帕塞瓦尔定理 90
 - 3.5.11 能量谱和功率谱 91
 - 3.6 周期信号的傅里叶变换 93
 - 3.6.1 周期信号的傅里叶变换 93

3.6.2 傅里叶级数与傅里叶变换	95	5.2.1 单位序列和单位阶跃序列	168
3.7 LTI系统的频域分析	96	5.2.2 单位序列响应和单位阶跃响应	169
3.7.1 频率响应	97	5.3 卷积和	173
3.7.2 理想低通滤波器的响应	101	5.3.1 卷积和的定义与图解法	173
3.8 取样定理	106	5.3.2 卷积和的性质	177
3.8.1 信号的取样	106	5.3.3 利用卷积和求零状态响应	179
3.8.2 时域取样定理	108	习题	180
3.8.3 频域取样定理	110	第6章 离散系统的z域分析	183
3.9 MATLAB应用举例——周期信号的频域分析	112	6.1 z变换及其收敛域	183
习题	114	6.1.1 z变换	183
第4章 连续系统的s域分析	118	6.1.2 收敛域	184
4.1 拉普拉斯变换	118	6.2 z变换的性质	187
4.1.1 拉普拉斯变换的简单推导	118	6.2.1 线性	187
4.1.2 收敛域	119	6.2.2 移位性	188
4.1.3 单边拉普拉斯变换	121	6.2.3 尺度变换特性	189
4.2 拉普拉斯变换的性质	123	6.2.4 卷积定理	190
4.2.1 线性	123	6.2.5 z域微分特性	191
4.2.2 尺度变换特性	123	6.2.6 z域积分特性	192
4.2.3 时移性	124	6.2.7 k域反转	193
4.2.4 复频域平移性	125	6.2.8 部分和	194
4.2.5 卷积定理	126	6.2.9 初值定理和终值定理	195
4.2.6 时域微分和积分特性	127	6.3 逆z变换	197
4.2.7 s域的微分和积分特性	131	6.3.1 幂级数展开法	197
4.2.8 初值定理和终值定理	133	6.3.2 部分分式展开法	199
4.3 拉普拉斯逆变换	135	6.4 z域分析	204
4.3.1 查表法	135	6.4.1 差分方程的变换域解	204
4.3.2 部分分式展开法	137	6.4.2 系统函数	208
4.3.3 留数法	140	6.4.3 系统的z域框图	209
4.4 复频域分析	141	6.4.4 s域与z域的关系	212
4.4.1 微分方程的变换解	141	6.4.5 系统的频率响应	213
4.4.2 系统函数	144	6.5 MATLAB应用举例——离散系统的z域分析	217
4.4.3 系统的s域模型	146	习题	219
4.4.4 拉普拉斯变换与傅里叶变换	152	第7章 系统函数	223
4.5 MATLAB应用举例——拉普拉斯变换	154	7.1 系统函数和系统特性	223
习题	156	7.1.1 系统函数的零点和极点	223
第5章 离散系统的时域分析	158	7.1.2 系统函数与时域响应	223
5.1 LTI离散系统的响应	158	7.1.3 系统函数与频域响应	226
5.1.1 差分方程	158	7.2 系统的稳定性及稳定性准则	231
5.1.2 差分方程的经典解	159	7.2.1 系统的稳定性	231
5.1.3 初始值	164	7.2.2 连续系统稳定性准则	232
5.1.4 零输入响应和零状态响应	164	7.2.3 离散系统稳定性准则	234
5.2 单位序列和单位序列响应	168	7.3 信号流图和梅森公式	236
		7.3.1 信号流图	237

7.3.2 梅森公式	238	8.2.3 离散系统状态方程的建立	258
7.4 系统模拟	240	8.3 连续系统状态方程的解	260
7.4.1 直接形式	240	8.3.1 状态方程的时域解	260
7.4.2 级联形式和并联形式	243	8.3.2 状态方程的变换域解	264
习题	245	8.4 离散系统状态方程的解	267
第 8 章 系统的状态变量分析	250	8.4.1 状态方程的时域解	267
8.1 状态变量与状态方程	250	8.4.2 状态方程的变换域解	270
8.1.1 状态变量	250	8.5 系统的可控制性和可观测性	273
8.1.2 状态方程	251	8.5.1 系统的可控制性	273
8.2 状态方程的建立	252	8.5.2 系统的可观测性	275
8.2.1 电路状态方程的建立	252	习题	276
8.2.2 连续系统状态方程的建立	255	参考文献	280

第 1 章 信号与系统基础

1.1 概述

人类在社会活动和日常生活中，总会涉及信息的获取、存储、传输与再现。人们常常把来自外界的各种报道统称为消息。消息涉及的内容极其广泛，包括天文、地理、历史、政治、经济、科技、文化等。消息可以通过书信、电话、广播、电视、互联网等多种媒体或渠道进行发布和传输。通常把消息中有意义的内容称为信息。人们关注消息的目的是为了获取和利用其中包含的信息。

为了有效地传播和利用消息，常常需要将消息转换成便于传输和处理的信号。信号是消息的载体，一般表现为随时间变化的某种物理量。根据物理量的不同特性，可把信号区分为声信号、光信号、电信号等不同类别。在各种信号中，电信号是一种最便于传输、控制与处理的信号。同时，在实际应用中，许多非电信号(如温度、压力、位移等)常可通过适当的传感器转换成电信号。因此，研究电信号具有重要意义。在本课程中，若无特殊说明，“信号”一词均指电信号。

信号的传输要由许多不同功能的单元组织起来的一个复杂系统来完成。从广泛的意义上说，一切信息的传输过程都可以看成是通信，一切完成信息传输任务的系统都是通信系统，例如电报、电话、电视、雷达等系统。

与信号传输技术同时发展起来的还有信号处理技术。信号处理可以理解为对信号进行某种加工或变换。加工或变换的目的是：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；将信号变换成容易分析和识别的形式，便于估计和选择它的特征参量。这些信号可能是通信中传输的信号，也可能是包含有信息的某些数据，诸如生物学中的信号(如脑电、心电数据)、计算机打印的科学实验数据、气象资料等。信号处理技术包含滤波、变换、增强、压缩、估值与识别等技术。自 20 世纪 80 年代以来，随着高速数字计算机和大规模集成电路技术的发展，信号处理的理论与方法得到了广泛运用。如多媒体通信、高清电视、数码相机，以及机械振动分析、机械故障诊断等。

信号传输与信号处理是两个独立的学科，但两者又是密切相关的学科，在发展中相互影响、相互促进。如处理带有不确定性的随机信号的技术，就依赖于研究信息传输所发展起来的理论，而信号处理技术的运用又大大提高了信号传输的质量。信号传输和信号处理的共同理论基础之一是信号分析和系统分析，即要研究信号的特性、系统的分析方法、实现系统各组成部分的具体电路以及这些电路对信号产生何种影响等问题。

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。人们在自然科学(如物理、化学、生物)以及工程、经济、社会等许多领域中，广泛地引用“系统”的概念、理论和方法，并根据各学科自身的规律，建立相应的数学模型，研究各自的问题。因此，不同系统具有不同的属性和规律。

在系统或网络理论的研究中，包括系统分析与系统综合两个方面。在给定系统的条件下，研究系统对于输入激励信号所产生的输出响应，这是系统分析问题。系统综合则是按某种需要先提出对于给定激励的响应，而后根据此要求设计(综合)系统。分析与综合二者关系密切，但又有各自的体系和研究方法。一般来说，系统分析是系统综合的基础。

本书着重讲述系统分析以及信号经系统传输或处理的一般规律，主要研究信号分析和系统分析的基本概念和基本分析方法。

1.2 信号

广义地说，信号是指能够传送某种信息的随时间变化的物理量。只有变化的量中才可能含有信息。电信号是随时间变化的电量，它们通常是电压或电流，在某些情况下，也可以是电荷或磁通。信号常表示为一个时间的函数，该函数的图形称为信号的波形。

如果信号可以用确定的时间函数来描述，就称其为确定信号。给定一个指定的时刻，这种信号就有确定的函数值。但是，在实际中带有信息的信号往往具有不可预知的不确定性。此外，在信号传输过程中，不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响，这些干扰和噪声也都具有一定的随机性。严格地说，除了实验室发生的有规律的信号外，一般的信号都是随机的。对于随机信号，不能给出确切的时间函数，只可能知道它的统计特性。但在一定的条件下，某些随机信号也会表现出某种确定性，如音乐表现为某种周期性变化的波形以及汽车行驶时产生的振动信号等。因此，研究确定信号是十分重要的，因为它不仅广泛地应用于系统分析和设计中，而且也是进一步研究随机信号的基础。本书只讨论确定信号。

1.2.1 连续信号和离散信号

根据信号时间定义域的特点不同，信号可分为连续时间信号和离散时间信号，简称连续信号和离散信号。

在给定的时间间隔内，除若干个不连续点外，对于任意时间值都可以给出确定的时间函数，这样的信号称为连续时间信号，常记作 $f(t)$ ，例如语音波形、随高度变化的大气压等。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是跳变的，如图 1-1 所示。时间和幅值都为连续的信号称为模拟信号，如图 1-1a 所示。

仅在一些离散的瞬间才有定义，即其时间变量仅在一个离散集上取值，而在其他时间没有定义的信号称为离散信号。时刻 t_k 与 t_{k+1} 之间的间隔 $T_k = t_{k+1} - t_k$ 可以是常数，也可以随时间变化。本书只讨论 T_k 等于常数的情况。若令 t_{k+1} 与 t_k 之间的间隔为常数 T ，则离散信号值在均匀离散时刻 $t = \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$

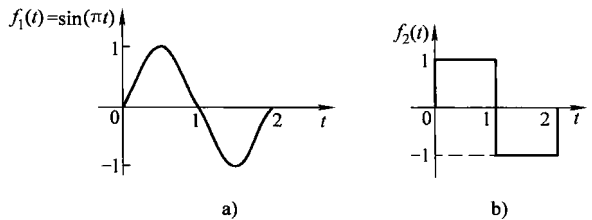


图 1-1 连续时间信号

时有定义，它可表示为 $f(kT)$ 。为了简便，常记作 $f(k)$ 。这样的离散信号也称为序列。例如，一张照片上各点亮度的采样、股票市场的指数等。图 1-2 给出了几个不同的离散信号。

序列 $f(k)$ 的数学表达式可以写成闭合形式，也可逐个列出 $f(k)$ 的值。通常把对某个序号 m 的序列值称为第 m 个样点的样值。列出每个样点的值，则图 1-2b 所示信号可表示为

$$f_2(k) = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 2 & k = -1 \\ 2 & k = 0 \\ 1 & k = 1 \\ -1 & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

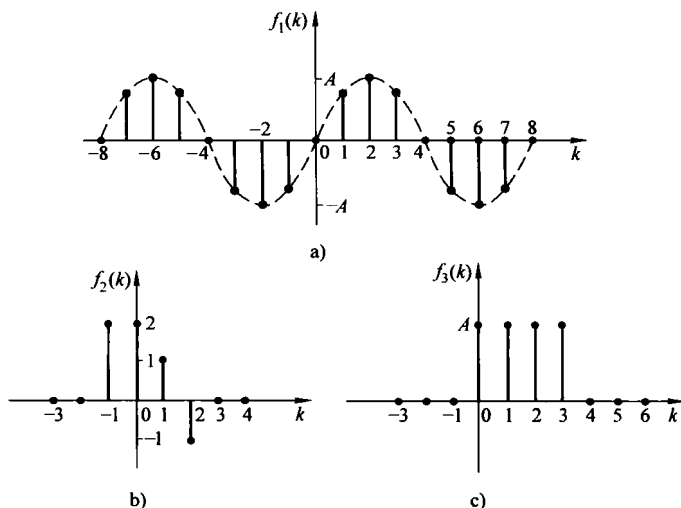


图 1-2 离散时间信号

为了简化表达方式, 信号 $f_2(k)$ 也可表示为序列 $f_2(k) = \{0, 2, 2, 1, -1, 0\}$ 。序列中数字 2 下面的箭头 \uparrow 表示与 $k=0$ 相对应, 左、右边依次是 k 取负整数和 k 取正整数时相对应的 $f_2(k)$ 值。若序列为单边指数序列, 以闭合形式表示为

$$f(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ e^{-\alpha k} & k \geq 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

如果离散时间信号的幅值是连续的, 则称为取样信号; 如果离散时间信号的幅值也被限定为某些离散值, 则称为数字信号。

1.2.2 周期信号和非周期信号

周期信号就是以一定的时间间隔 T 按相同规律重复循环变化的信号, 如图 1-3 所示。

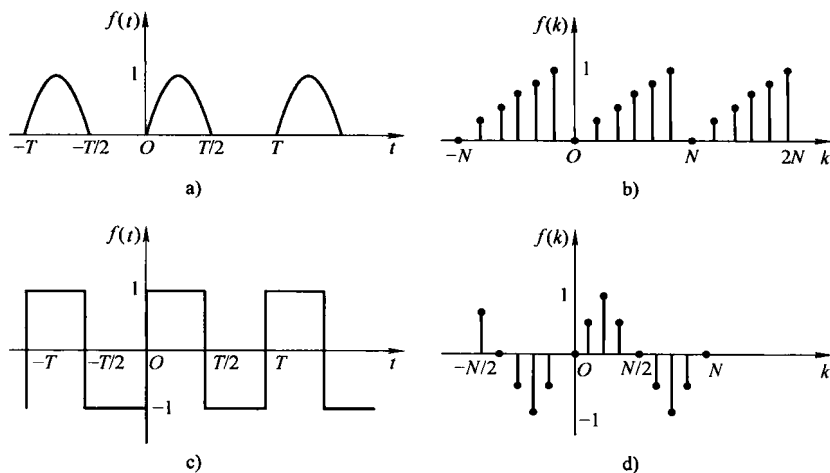


图 1-3 周期信号

a) 半波整流信号 b) 锯齿序列 c) 方波 d) 正弦序列 $\sin \beta k (\beta = 2\pi/N)$

对于连续的周期信号, 其数学表达式为

$$f(t) = f(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

对于离散的周期信号，其数学表达式为

$$f(k) = f(k + mN) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2)$$

满足这些关系式的最小 T 值和 N 值称为连续信号和离散信号的周期。只要给出周期信号在任一周期内的函数式或波形，就可以知道该信号在任一时刻的函数值。

对于离散的周期正弦序列(或余弦序列)

$$\begin{aligned} f(k) &= \sin \beta k = \sin(\beta k + 2m\pi) \\ &= \sin\left[\beta\left(k + \frac{2\pi}{\beta}m\right)\right] \\ &= \sin[\beta(k + mN)] \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中， β 为正弦序列的数字角频率，单位为 rad。

由式(1-3)可见，仅当 $2\pi/\beta$ 为整数时，正弦序列才具有周期 $N = 2\pi/\beta$ 。图 1-3d 画出了数字角频率 $\beta = 2\pi/N$ ，周期 $N = 8$ 的情形，它每经过 8 个单位循环一次。当 $2\pi/\beta$ 为有理数时(例如 $2\pi/\beta = N/M$ ， N 和 M 均为无公因子的整数)，该序列仍具有周期性，但其周期 $N = M \frac{2\pi}{\beta}$ 。当 $2\pi/\beta$ 为无理数时，该序列不具有周期性。

非周期信号的幅值在时间上不具有重复循环变化的特性。如果令周期信号的周期趋于无穷大，则可将其看成是非周期信号。

例 1-1 判断下列信号是否为周期信号，若是周期信号，确定其周期。

$$(1) f_1(k) = \sin\left(\frac{\pi}{6}k + \frac{\pi}{5}\right) \quad (2) f_2(k) = \sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right) + \cos(0.5\pi k) \quad (3) f_3(k) = \sin(2k)$$

解 (1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}k + \frac{\pi}{5}\right)$ 的数字角频率为 $\beta = \pi/6 \text{rad}$ ，由于 $2\pi/\beta = 12$ ，故 $f_1(k)$ 为周期序列，其周期为 12。

(2) $\sin\left(\frac{3\pi k}{4}\right)$ 和 $\cos(0.5\pi k)$ 的数字角频率分别为 $\beta_1 = 3\pi/4 \text{rad}$ ， $\beta_2 = 0.5\pi \text{rad}$ 。由于 $2\pi/\beta_1 = 8/3$ ， $2\pi/\beta_2 = 4$ 为有理数，故它们的周期分别为 $N_1 = 8$ ， $N_2 = 4$ ，故 $f_2(k)$ 为周期序列，其周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数 8。

(3) $\sin(2k)$ 的数字角频率为 $\beta = 2 \text{rad}$ ；由于 $2\pi/\beta = \pi$ 为无理数，故 $f_3(k)$ 为非周期序列。

由上面几例可看出：连续正弦信号一定是周期信号，而正弦序列不一定是周期序列；两连续周期信号之和不一定是周期信号，而两周期序列之和一定是周期序列。

1.2.3 实信号和复信号

物理可实现的信号常常是时间 t (或 k) 的实函数，其在各时刻的函数(或序列)值为实数，例如单边指数信号、正弦信号等，称为实信号。

函数(或序列)值为复数的信号称为复信号，最常用的是复指数信号。连续信号的复指数信号表示为

$$f(t) = Ke^{st} \quad -\infty < t < \infty \quad (1-4)$$

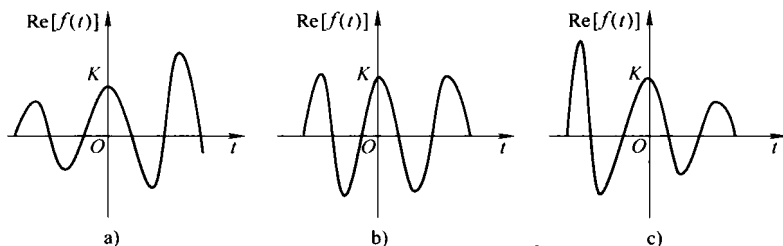
式中，复变量 $s = \sigma + j\omega$ ， σ 是 s 的实部，记作 $\text{Re}[s]$ ， ω 是 s 的虚部，记作 $\text{Im}[s]$ 。根据欧拉公式，式(1-4)可展开为

$$f(t) = Ke^{(\sigma + j\omega)t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

可见，一个复指数信号可分解为实部和虚部两部分，即

$$\begin{aligned} \text{Re}[f(t)] &= Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ \text{Im}[f(t)] &= Ke^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1-5)$$

两者均为实信号，而且是频率相同、振幅随时间变化的正(余)弦信号。 s 的实部 σ 表征了该信号振幅随时间变化的状况，其虚部 ω 表征了其振荡角频率。若 $\sigma > 0$ ，它们是增幅振荡；若 $\sigma < 0$ ，则是减幅振荡；当 $\sigma = 0$ ，是等幅振荡。图1-4画出了 σ 三种不同取值时，实部信号 $\text{Re}[f(t)]$ 的波形。虚部信号 $\text{Im}[f(t)]$ 的波形与 $\text{Re}[f(t)]$ 的波形相似，只是相位相差 $\pi/2$ 。当 $\omega = 0$ 时，复指数信号就成为实指数信号 $Ke^{\sigma t}$ 。如果 $\sigma = \omega = 0$ ，则 $f(t) = K$ ，这就是直流信号。可见，复指数信号概括了许多常用信号。复指数信号的重要特征之一是它对时间的导数和积分仍然是复指数信号。

图1-4 复指数信号的实部 $Ke^{\sigma t} \cos(\omega t)$ a) $\sigma > 0$ b) $\sigma = 0$ c) $\sigma < 0$

离散时间的复指数序列可表示为

$$f(k) = e^{(\alpha + j\beta)k} = e^{\alpha k} e^{j\beta k} \quad (1-6)$$

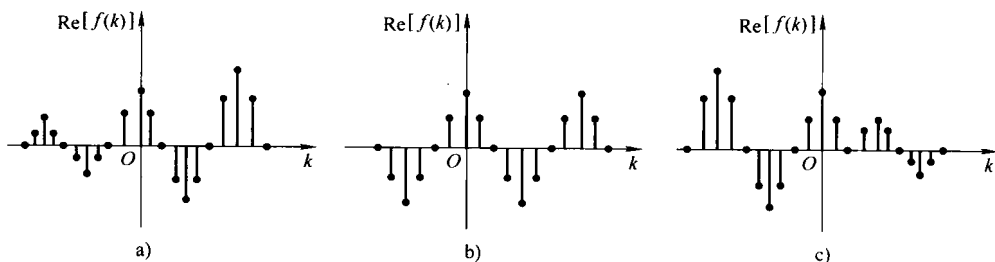
令 $a = e^{\alpha}$ ，式(1-6)可展开为 $f(k) = a^k \cos(\beta k) + ja^k \sin(\beta k)$

其实部和虚部分别为

$$\text{Re}[f(k)] = a^k \cos(\beta k) \quad (1-7)$$

$$\text{Im}[f(k)] = a^k \sin(\beta k)$$

可见，复指数序列的实部和虚部均是幅值随 k 变化的正(余)弦序列。式(1-7)中 a ($a = e^{\alpha}$)反映了信号振幅随 k 变化的状况，而 β 是振荡角频率。若 $a > 1$ ($\alpha > 0$)，它们是振幅增长的正(余)弦序列；若 $a < 1$ ($\alpha < 0$)，则是振幅衰减的正(余)弦序列；若 $a = 1$ ($\alpha = 0$)，是等幅的正(余)弦序列。图1-5画出了 a 的三种不同取值时复指数序列实部的波形，其中 $\beta = \pi/4$ 。若 $\beta = 0$ ，它就成为实指数序列 $a^k (e^{\alpha k})$ 。

图1-5 复指数序列的实部 $a^k \cos(\beta k)$ ($\beta = \pi/4$)a) $a > 1$ b) $a = 1$ c) $a < 1$

1.3 信号的基本运算

在信号与系统中经常要对信号进行运算和波形变换，研究信号通过系统各部件后的变化情况。因此，掌握信号的基本运算非常重要，常用的信号基本运算有加法、乘法、平移、反转和

尺度变换等。

1.3.1 加法和乘法

信号叠加的应用有很多,如在影视动画中添加背景就是一种信号叠加的过程,通过混频器和一根视频电缆可以同时传输多个频道的信号也是如此。信号相乘则常用于无线电广播和通信系统中的调制和解调、频率变换等系统。

两个连续信号相加(相乘),称为信号的加法(乘法)运算。它在任意时刻的瞬时值等于两个信号在该时刻的瞬时值的代数和(积)。连续信号加法(乘法)运算可分别表示为

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (1-8)$$

$$f(t) = f_1(t)f_2(t)$$

离散序列相加(相乘)可采用对应样点的值分别相加(相乘)的方法来计算。离散序列加法(乘法)运算可分别表示为

$$f(k) = f_1(k) + f_2(k) \quad (1-9)$$

$$f(k) = f_1(k)f_2(k)$$

例 1-2 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形如图 1-6a 和图 1-6b 所示,试求 $f_1(t) + f_2(t)$ 和 $f_1(t)f_2(t)$ 的波形,并写出其表达式。

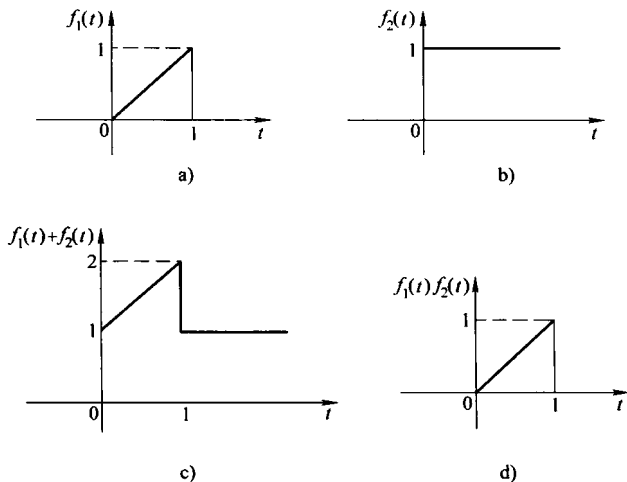


图 1-6 例 1-2 图

解 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的表达式为

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$f_1(t) + f_2(t)$ 的表达式为 $f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$, 波形如图 1-6c 所示。

$f_1(t)f_2(t)$ 的表达式为 $f_1(t)f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$, 波形如图 1-6d 所示。

例 1-3 信号 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的表达式分别为

$$f_1(k) = \begin{cases} 2 & k = -1 \\ 3 & k = 0 \\ 6 & k = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad f_2(k) = \begin{cases} 3 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 4 & k = 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 $f_1(k)f_2(k)$ 和 $f_1(k) + f_2(k)$ 的表达式。

解

$$f_1(k)f_2(k) = \begin{cases} 9 & k = 0 \\ 12 & k = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad f_1(k) + f_2(k) = \begin{cases} 2 & k = -1 \\ 6 & k = 0 \\ 8 & k = 1 \\ 4 & k = 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1.3.2 反转

将信号 $f(t)$ (或信号 $f(k)$) 的自变量替换成 $-t$ (或 $-k$)，其函数值不变，就得到另一个信号 $f(-t)$ (或信号 $f(-k)$)。这种变换称为信号的反转或信号的反褶。其几何含义是将信号以纵坐标为轴反转，如图 1-7 所示。

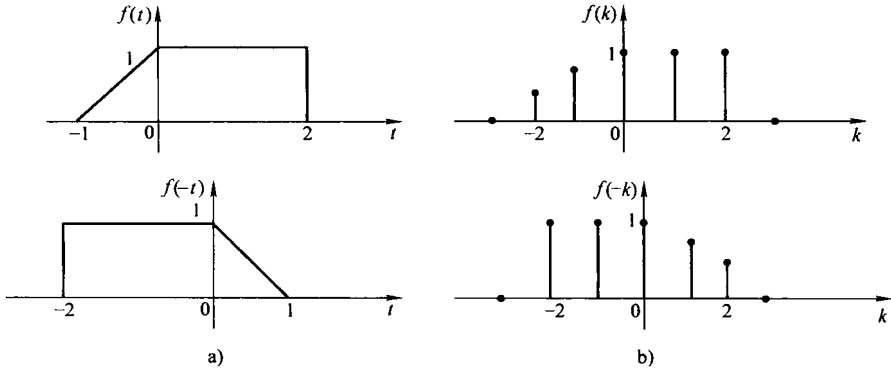


图 1-7 信号的反转
a) $f(t)$ 的反转 b) $f(k)$ 的反转

1.3.3 平移

平移也称移位。对于连续信号，若信号 $f(t)$ 表达式的自变量 t 替换为 $t - t_0$ ，则 $f(t - t_0)$ 相当于信号波形在时间轴上的整体移动。若 $t_0 > 0$ ，波形向右平移 t_0 个单位；若 $t_0 < 0$ ，波形向左平移 t_0 个单位，如图 1-8 所示。对于离散信号，若信号 $f(k)$ 表达式的自变量 k 替换为 $k - k_0$ ，若 $k_0 > 0$ ，则 $f(k - k_0)$ 是原序列向右平移 k_0 单位；若 $k_0 < 0$ ，则 $f(k - k_0)$ 是原序列向左平移 k_0 单位，如图 1-9 所示。

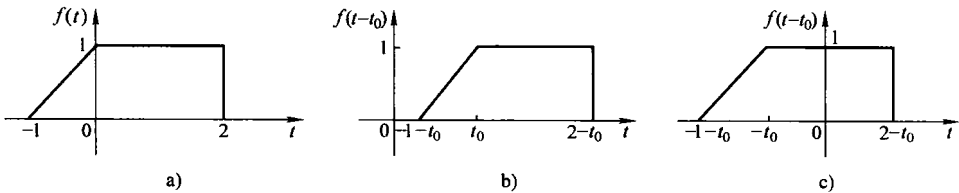


图 1-8 连续信号的平移
a) $t_0 = 0$ b) $t_0 > 0$ c) $t_0 < 0$

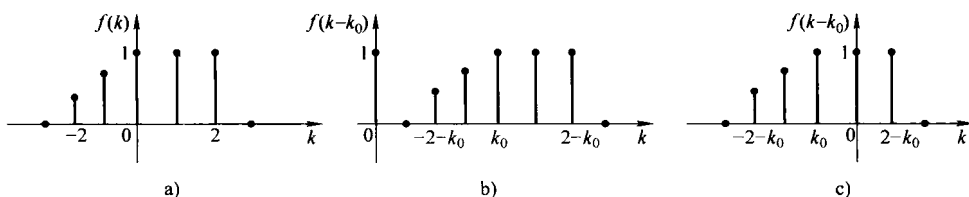


图 1-9 离散信号的平移

a) $k_0 = 0$ b) $k_0 > 0$ c) $k_0 < 0$

当信号通过多种不同路径传输时，信号所用的传输时间不同，因而产生延时的现象。如电视台发射的电波信号，经接收天线附近的建筑物反射再传送到天线的信号，就比直接传输到天线的信号在时间上要滞后，从而造成重影现象。在雷达、声纳及地震探矿中接收的信号也比发射的信号要延迟一段时间。这些都可以看做信号在时间上的延迟。

1.3.4 尺度变换

如果将信号 $f(t)$ 的自变量 t 乘以正实系数 a ，则信号波形 $f(at)$ 将是波形 $f(t)$ 的压缩或扩展。这种运算称为时间轴的尺度倍乘或尺度变换。若 $a > 1$ ，则信号 $f(at)$ 将原信号 $f(t)$ 以原点为基准，沿横轴压缩到原来的 $1/a$ ；若 $0 < a < 1$ ，则 $f(at)$ 表示将 $f(t)$ 沿横轴展宽至 $1/a$ 倍。若 $a < 0$ ，则 $f(at)$ 表示将 $f(t)$ 的波形反转并压缩或展宽至 $1/|a|$ 。图 1-10 所示为尺度变换的示例。

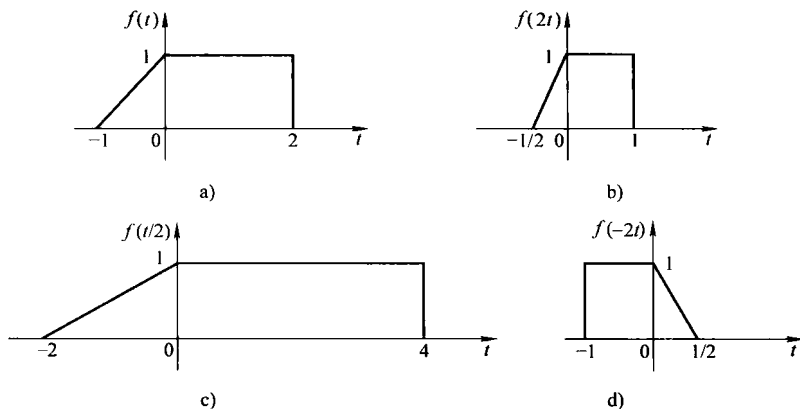


图 1-10 连续信号的尺度变换

a) $a = 1$ b) $a = 2$ c) $a = 1/2$ d) $a = -2$

若 $f(t)$ 是已录制声音的磁带，则 $f(-t)$ 表示将此磁带倒转播放， $f(2t)$ 是将此磁带以二倍速度播放， $f(t/2)$ 表示将原磁带播放速度降至一半。

离散信号通常不作展缩运算，这是因为 $f(ak)$ 仅在 ak 为整数时才有定义，而当 $a > 1$ 或 $a < 1$ ，且 $a \neq 1/m$ (m 为整数) 时，它常常丢失原信号的部分信息。例如图 1-11a 所示的序列，当 $a = 1/2$ 时，得 $f(k/2)$ ，如图 1-11c 所示；当 $a = 2$ 和 $a = 2/3$ 时，其序列如图 1-11b、图 1-11d 所示。由图可见，它们丢失了原信号的部分信息，因而不能看做是 $f(k)$ 的压缩或扩展。

信号 $f(at + b)$ 的波形可以通过对信号 $f(t)$ 的平移、反转和尺度变换获得。

例 1-4 信号 $f(t)$ 的波形如图 1-12a 所示，画出信号 $f(-2t + 2)$ 的波形。

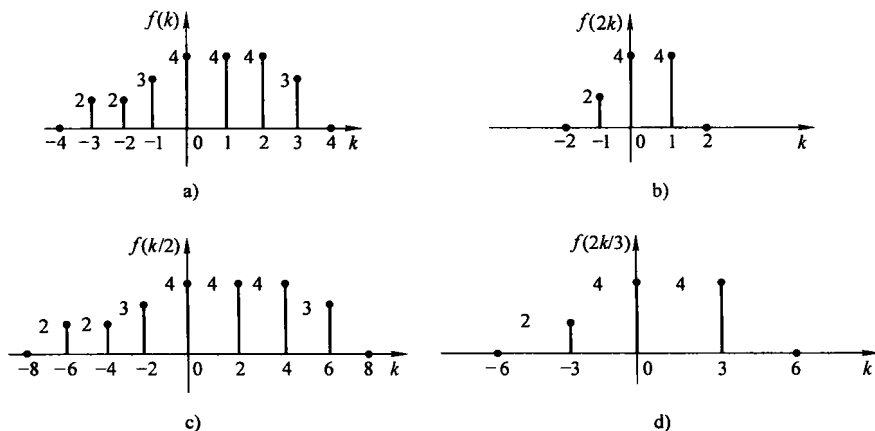


图 1-11 离散信号的尺度变换

a) $a=1$ b) $a=2$ c) $a=1/2$ d) $a=2/3$

解 将信号 $f(t)$ 左移两个单位得到 $f(t+2)$ ，如图 1-12b 所示；然后反转得 $f(-t+2)$ ，如图 1-12c 所示；再进行尺度变换得 $f(-2t+2)$ ，其波形如图 1-12d 所示。

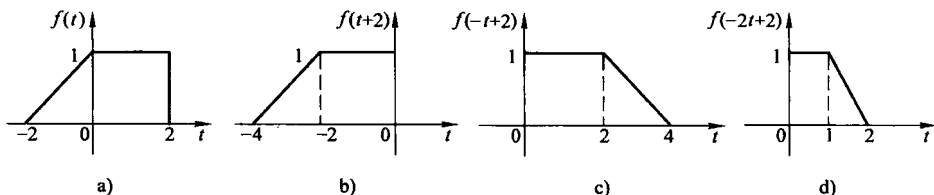


图 1-12 例 1-4 图

如果改变上述运算的顺序，例如先求 $f(-t)$ 或先求 $f(2t)$ 最终也会得到相同的结果。

1.4 阶跃信号和冲激信号

阶跃信号和冲激信号不同于普通的信号，称为奇异信号。它们是描述一类特定物理现象的数学模型，在信号与系统分析中具有重要的意义。本节只介绍连续时间阶跃信号和冲激信号，离散的阶跃序列和冲激序列将在第 5 章中介绍。

1.4.1 连续时间阶跃信号

连续时间单位阶跃信号用 $\varepsilon(t)$ 表示，定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

$\varepsilon(t)$ 的波形如图 1-13a 所示。单位阶跃信号平移 t_0 后得到 $\varepsilon(t-t_0)$ ，可表示为

$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (1-11)$$

波形如图 1-13b 所示。

注意：信号 $\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 处和 $\varepsilon(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 处都是不连续的。