北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

偏微分方程数值解讲义

李治平 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

偏微分方程数值解讲义

李治平　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解讲义/李治平编著. —北京: 北京大学出版社, 2010. 8

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-17647-4

Ⅰ. 偏… Ⅱ. 李… Ⅲ. 偏微分方程-数值计算-高等学校-教材 Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 160875 号

书　　名: 偏微分方程数值解讲义
著名责任者: 李治平　编著
责 任 编 辑: 曾琬婷
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-17647-4/O · 0821
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn　电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印　刷　者: 北京飞达印刷有限责任公司
经　销　者: 新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5　10 印张　270 千字
2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
定　　价: 22.00 元

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

内容简介

本书是为高等院校计算数学专业高年级本科生和研究生偏微分方程数值解法课程编写的教材. 全书分为差分方法和有限元方法两个相互独立的部分. 差分方法部分的先修课程是数值分析、数值代数; 有限元部分则同时要求学生对实变函数与泛函分析有初步的了解. 掌握一定的数学物理方程的理论和方法无疑有助于本课程的深入学习.

本书在选材上注重充分反映偏微分方程数值解法中的核心内容, 力图展现算法构造与分析的基本思想; 在内容的处理上, 体现了由浅入深、循序渐进的原则; 在叙述表达上, 严谨精练、清晰易读, 便于教学与自学. 为便于读者复习、巩固、理解和拓广所学的知识,每章之后配置了相当数量的习题, 并在书后附上了大部分习题的答案或提示.

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范院校计算数学以及相关学科的本科生和研究生的教材或教学参考书, 也可供从事计算数学、应用数学和科学工程计算研究的科技人员参考.

作者简介

李治平 北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 1987 年在北京大学获博士学位. 主要研究方向是偏微分方程数值解法.

序　言

自 1995 年以来, 在姜伯驹院士的主持下, 北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际, 创造性地贯彻教育部“加强基础, 淡化专业, 因材施教, 分流培养”的办学方针, 全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势, 在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新, 以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革, 取得了显著的成效. 2001 年, 北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖, 在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面, 我们按照加强基础、淡化专业的要求, 对教学各主要环节进行了调整, 使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上, 接受学时充分、强度足够的严格训练; 在对学生分流培养阶段, 我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则, 大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容, 为新的培养方向、实践性教学环节, 以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础, 又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应, 积极而慎重地进行教学计划的修订, 适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时, 并增加了数学模型和计算机的相关课程, 使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中, 在注重专题课程的同时, 我们制定了 30

多门研究生普选基础课程 (其中数学系 18 门), 重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合, 我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考, 记录了我们教学实践的足迹, 体现了我们教学改革的成果, 反映了我们对新世纪人才培养的理念, 代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展, 数学的基本理论更加深入和完善, 而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛, 而且活跃于生产第一线, 促进着技术和经济的发展, 所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学, 正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化, 数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素, 将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区, 但要十分稳重和积极; 人才培养无止境, 既要遵循基本规律, 更要不断创新. 我们现在推出这套丛书, 目的是向大家学习. 让我们大家携起手来, 为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张继平
2002 年 5 月 18 日
于北京大学蓝旗营

前　　言

偏微分方程数值解一直是计算数学专业本科的重要专业课. 以前, 该课程分为差分方法和有限元方法两门各一学期的课程. 近年来, 由于种种原因, 偏微分方程数值解压缩为 48 课时的一学期的课程. 为了适应这一变化, 我们编写了这部教材. 目的在于使学生通过只有不到原来一半课时的学习, 在偏微分方程数值解方面受到比较系统的基本训练, 并初步掌握差分方法和有限元方法中最基本、最核心的内容.

本书的内容分为差分方法和有限元方法两部分, 内容相当丰富. 实事求是地讲, 如果详细讲授, 每一部分的内容都可以独立作为周学时为 3 的一学期课程的教材. 为了在周学时为 3 的一学期的课程中同时涵盖两部分的内容, 我们的做法是: 着重讲授算法的理论框架和分析方法的基本思想以及计算结果的分析, 而将大部分分析和计算工作的细节作为习题留给学生完成. 我们将学习内容分解为基本思想方法的学习和基本功的训练两部分. 学生通过课堂学习初步了解基本思想的形成过程及其实现过程的要点, 然后通过课后习题和数值实验完成基本思想的实现过程, 从而理解和掌握相关的学习内容. 当然, 这样做的前提是要求学生有比较扎实的先修课程的基本功, 尤其是数学分析的基本功. 另外, 本书中的部分章节 (例如 §1.5, 2.3.2 小节, 2.3.3 小节, 2.3.4 小节, 2.4.2 小节, 2.4.3 小节, 3.2.5 小节, 3.2.6 小节, §3.4, 3.5.3 小节, 3.5.4 小节, 3.5.5 小节, §4.5, §4.6 (甚至整个第 4 章), 第 7 章 (除 §7.1, 7.4.1 小节之外), 第 8 章) 可列为选讲内容, 实际讲授时, 可以根据需要适当挑选其中的部分内容, 以便给最基本的内容留出足够的课时, 保证教学质量.

差分方法的内容主要由格式构造与算法分析两部分组成. 在格式构造方面, 渗透始终的基本思想是用网格函数 (格点函数、分片常数函数等) 替代光滑函数作函数空间的离散化, 用差商替代微商、数值积分

替代积分等方法做微分算子的离散化，从而将微分方程问题转化成为相应的差分方程问题. 在这一基本思想指导下，书中针对椭圆型、抛物型和双曲型方程介绍了直接差分离散化格式、有限体积格式、基于半离散化方法的格式、迎风格式等最基本的格式构造方法，以及边界条件的差分近似. 从算法分析的角度讲，贯穿差分方法部分的主线是差分格式的相容性、稳定性、收敛性和误差分析. 简单地说，相容性衡量的是差分算子对微分算子的逼近程度，稳定性衡量的是差分格式的解关于扰动的敏感性和连续依赖性，其中稳定性又是重中之重. 对椭圆型方程和抛物型方程的差分格式，我们介绍了应用最大值原理和比较定理分析 $\mathbb{L}^\infty$ 范数意义下稳定性的方法；对抛物型方程和双曲型方程的差分格式，我们介绍了应用 Fourier 分析方法分析 $\mathbb{L}^2$ 范数意义下稳定性的方法；我们还介绍了通过建立能量不等式分析差分格式稳定性的方法. 作为更深层次的内容介绍，本书还讨论了差分格式的一些重要的整体性质，例如差分格式的守恒性质、耗散与色散性质、修正方程分析等等.

有限元方法的内容也主要由格式构造与算法分析两部分组成. 格式构造部分包括椭圆边值问题的变分形式、有限元空间的构造和自适应算法. 理解偏微分方程边值问题与其相应的变分问题之间的关系是正确提出有限元问题和应用有限元方法的基础，关键在于正确给出试探函数空间、检验函数空间、变分方程或相应的能量泛函，其中包括如何将不同的边界条件处理成强制型边界条件和自由边界条件. 有限元方法在一定意义上讲是一种特殊的构造对试探函数空间和检验函数空间具有一定逼近性质的有限维函数空间的方法，其特点是有限元函数空间有一组由分片定义的函数拼装而成的支集很小的基底函数. 本书介绍了几个经典的 Lagrange 型和 Hermite 型有限元的构造. 作为自适应算法的例子，书中介绍了几种常用的三角形单元的细分方法. 算法分析部分包括有限元解的先验误差估计和后验误差估计. 本书中先验误差估计的框架是利用变分问题的抽象误差估计将有限元解的误差估计转化为 Sobolev 空间的插值误差估计，再通过仿射等价开集上 Sobolev 半范数的关系和多项式商空间的等价范数给出多项式不变插值算子的

误差估计. 本书的后验误差分析基于残量型后验误差估计子. 误差分析这部分内容比较抽象, 但对于希望进一步深入研究有限元理论的初学者来说是很好的入门基础.

在本书的编写过程中, 曾得到了北京大学课程建设基金的资助, 在本书的出版过程中, 责任编辑曾琬婷做了大量辛勤的工作. 作者在此一并表示诚挚的谢意.

李治平

2009 年 12 月于燕园

目　　录

第 1 章　椭圆型偏微分方程的差分方法

§1.1　引　　言

一般的含 n 个自变量的**二阶线性椭圆型偏微分方程**(简称**二阶线性椭圆型方程**) 有以下形式:

$$\pm L(u) \triangleq \pm \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \right) u = f, \qquad (1.1.1)$$

其中 L 称为**二阶线性椭圆型微分算子**, 其系数 a_{ij}, b_i, c 和右端项 (或源项)f 为自变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 的实函数, 且在方程 (1.1.1) 的定义域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中满足椭圆性条件

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \xi_i \xi_j \geqslant \alpha(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \\ \alpha(\boldsymbol{x}) > 0,\ \forall \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{gathered} \qquad (1.1.2)$$

算子 L 和方程 (1.1.1) 称为**一致椭圆型**的, 如果

$$\inf_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \alpha(\boldsymbol{x}) = \alpha > 0. \qquad (1.1.3)$$

例如, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是一个二阶线性一致椭圆型微分算子, Poisson 方程

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

是一个二阶线性一致椭圆型方程.

一般的含 n 个自变量的 $2m$ **阶线性椭圆型偏微分方程**(简称 $2m$ **阶线性椭圆型方程**) 有以下形式:

$$\pm L(u) \triangleq \pm \left(\sum_{k=1}^{2m} \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} a_{i_1, \cdots, i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} + a_0 \right) u = f, \quad (1.1.4)$$

其中 L 称为 $2m$ **阶线性椭圆型微分算子**, 其系数 $a_{i_1,\cdots,i_k}$, a_0 和右端项 f 为自变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 的实函数, 且在方程 (1.1.4) 的定义域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中满足椭圆性条件

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1,\cdots,i_{2m}=1}^{n} a_{i_1,\cdots,i_{2m}}(\boldsymbol{x})\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2m}}\geqslant\alpha(\boldsymbol{x})\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2m},\\&\alpha(\boldsymbol{x})>0,\ \forall\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\Omega.\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

同样, 当式 (1.1.3) 成立时, 称椭圆型微分算子 L 和方程 (1.1.4) 是一致椭圆型的. 注意, 当 $n>1$ 时, 所有线性椭圆型方程都是偶次阶的. 作为典型的例子, 重调和方程

$$\Delta^{2m}u=f$$

就是一个 $2m$ 阶线性一致椭圆型方程, Δ^{2m} 是一个 $2m$ 阶线性一致椭圆型微分算子.

包含 p 个未知函数 $u_1,\cdots,u_p$ 的线性椭圆型方程组可以写成

$$\begin{aligned}\pm L(\boldsymbol{u})_i\triangleq\pm\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}a^{i,j}_{i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}+a_0^{i,j}\right)u_j=f_i,\\ i=1,\cdots,p,\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

其中 L 称为 $m=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\{m_j\}$ 阶线性椭圆型微分算子, 其系数 $a^{i,j}_{i_1,\cdots,i_k}$, $a_0^{i,j}$ 和右端项 f_i 为自变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$的实函数, 且在方程组 (1.1.6) 的定义域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中满足椭圆性条件

$$\det\left(A_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right)\geqslant\alpha(\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{\sum\limits_{l=1}^{p}m_l/2}\tag{1.1.7}$$

$$\alpha(\boldsymbol{x})>0,\ \forall\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\Omega,$$

这里 $p\times p$ 阶矩阵 $(A_{ij}(x,\xi))$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$A_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{i_1,\cdots,i_{m_j}=1}^{n}a^{i,j}_{i_1,\cdots,i_{m_j}}(\boldsymbol{x})\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{m_j}},$$

其中 m_j 为偶数, 它是 u_j 在方程组中出现的最高阶导数的阶数. 同样, 当式 (1.1.3) 成立时, 称方程组 (1.1.6) 是一致椭圆型的. 以位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ 为未知函数的三维线性弹性力学方程组

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}-(\lambda+\mu)\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \tag{1.1.8}$$

是一个含三个未知函数的三维 $(n=3)$ 二阶 $(m_1=m_2=m_3=2)$ 线性一致椭圆型偏微分方程组, 其中常数 $\lambda>0$, $\mu>0$ 是 Lamé 系数, $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$ 是载荷向量, Δ, $\mathbf{grad}=\nabla$ 和 div 分别是 Laplace 算子、梯度算子和散度算子, 在不同的坐标系中它们有不同的分量表达形式. 在直角坐标系中

$$\mathbf{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{div}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

$$\Delta=\mathbf{div}\,\mathbf{grad}=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

许多定常的 (即不随时间变化的) 物理过程可由线性椭圆型方程 (组) 来描述, 例如定常的热传导问题、扩散问题, 弹性力学、静电学、静磁学问题, 定常有势流问题, 等等. 更一般地, 许多与时间相关的物理过程的平衡态可由线性椭圆型方程 (组) 来描述. 在应用中, 一些物理参数可能会依赖于状态 (即方程的解) 及其变化率, 这时微分算子 L 的系数 $a_{i_1,\cdots,i_k}^{i,j}$, $a_0^{i,j}$ 可能是未知函数 u 及其不超过 $k-1$ 阶导数的函数, 右端项 f 也可能是未知函数 u 的函数. 对此, 我们可以类似地引入非线性 (一致) 椭圆型微分算子和非线性椭圆型方程 (组) 的定义. 本课程主要讨论线性偏微分方程的数值解, 偶尔也会简单地涉及上述形式的非线性偏微分方程.

例 1.1 (定常对流扩散问题) 设 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 是流体在 $\boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 点的流动速度, $u(\boldsymbol{x})$ 是某种物质的密度分布函数, 扩散沿 $u(\boldsymbol{x})$ 的负梯度方向, 扩散速率正比于扩散系数 $a(\boldsymbol{x})>0$. 又设 $f(\boldsymbol{x})$ 是源或汇的密度分布函数, 即单位体积内物质产生 $(f>0)$ 或消失 $(f<0)$ 的速率. 于是, 对 Ω 中的任意具有分片光滑边界的开子集 ω, 由定常的假设