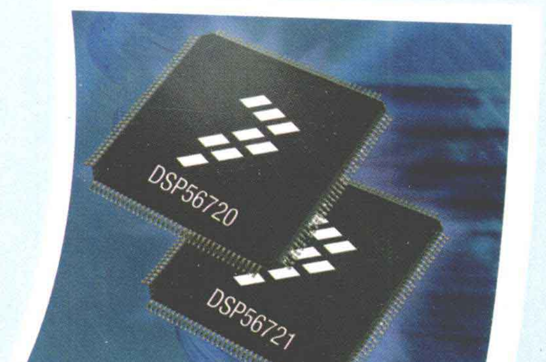
十二五

普通高等学校"十二五"规划教材

数字信号处理

贾君霞　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

数字信号处理

贾君霞　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内容简介

本书是结合编者多年来的教学实践经验编写而成的。在编写上力求选材少而精，突出基本概念的阐述，并通过精心设计的例题来引导读者理解原理和掌握解决问题的方法。

本书系统讲述了数字信号处理的基本原理和分析方法。全书内容包括离散时间信号与系统的时域分析、频域分析，离散傅里叶变换（DFT），快速傅里叶变换（FFT），数字滤波器的设计，数字滤波器的结构和多采样率数字信号处理。书中结合各章的重点，列举典型例题，并给出用 MATLAB 解决问题和求解计算或设计的程序及结果，以便于读者理解。

本书适合作为普通高等学校通信工程、电子科学与技术、电子信息工程、自动化、自动控制、检测技术与仪器以及其他相近专业的教材，还可以作为科技人员的参考书，亦可作为民办高校、自考等相关专业教材。

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理/贾君霞主编. —北京：中国铁道出版社，2011.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-13068-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①贾… Ⅲ.①数字信号处理—高等数校—教材 Ⅳ.①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 148970 号

书　　名：**数字信号处理**

作　　者：贾君霞　主编

策划编辑：曾亚非　李小军

责任编辑：李小军　鲍　闻　　**读者热线**：400-668-0820

责任印制：李　佳　　**封面制作**：白　雪

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054）

印　　刷：北京东海印刷有限公司

版　　次：2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印张**：19　　**字数**：519 千

书　　号：ISBN 978-7-113-13068-8

定　　价：33.00 元

前　言

“数字信号处理”是高等院校电子信息类专业的一门必修课程。随着信息科学和计算技术的飞速发展，数字信号处理的理论与应用得到了飞跃式发展，应用领域和范围日益扩大。为了满足教学中对数字信号教材的需求，编者在参考国内外同类教材的基础上，结合多年的教学经验编写了这本书。

本书编写的宗旨如下：

(1) 内容选择上既要保持课程的完整性，又要考虑前后课程不同教学大纲的要求，力求做到取舍合理，重点突出，便于教和学；

(2) 突出基本原理，强调基本概念，重视基本分析方法，注重理论联系实际；

(3) 适量补充新内容——多采样速率信号处理的基本原理、采样率转换系统的实现方法和高效结构、对格型滤波器；

(4) 将数字信号处理的理论和算法、数字滤波器的设计和结构与 MATLAB 语言很好地结合；

(5) 将例题、理论练习题和 MATLAB 上机实验题合理搭配，有机结合。

本书先修课程是信号与系统、工程数学等，书中有些内容，如差分方程、Z 变换等，可以根据学生的基础情况，做适当省略或补充。

全书共 8 章：其中，第 1 章、第 2 章的第 1 节和第 3～6 节由周庆华编写；第 2 章的第 2 节由彭静和周庆华共同编写；第 3 章和第 6 章由彭静编写；第 4 章和第 7 章由杨志飞编写；第 5 章和第 8 章由贾君霞编写。全书由贾君霞统稿、定稿。本书在编写过程中得到了兰州交通大学电信学院电信基础教研室全体教师的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中难免有不足之处，欢迎广大读者批评指正，以便今后修订完善。

编　者

2011 年 5 月

目　　录

绪 论

随着现代科学技术的发展，特别是大规模集成电路的出现，使数字信号处理技术水平获得空前提高。数字信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、广泛应用于众多领域的前沿交叉性学科。它研究把信号用数字或符号表示成序列，通过计算机或通用（专用）信号处理设备，用数字的数值计算方法处理，以便于提取有用信息和应用。

0.1 数字信号处理技术的发展

数字信号处理（DSP）技术发展历程如下：

1982 年世界上诞生了首枚 DSP 芯片。这种 DSP 器件功耗和尺寸稍大，但运算速度却比 CPU 快了几十倍，尤其在语音合成和编码/解码器中得到了广泛应用。

到 20 世纪 80 年代中期，随着 CMOS 技术的进步与发展，第二代基于 CMOS 工艺的 DSP 芯片应运而生，其存储容量和运算速度都得到了成倍提高，成为语音处理、图像硬件处理技术的基础。

20 世纪 80 年代后期，第三代 DSP 芯片问世，运算速度进一步提高，其应用范围逐步扩大到通信、计算机领域。

20 世纪 90 年代 DSP 发展最快，相继出现了第四代和第五代 DSP 器件。现在的 DSP 属于第五代产品，它与第四代相比，系统集成度更高，将 DSP 芯核及外围元件综合集成在单一芯片上。这种集成度极高的 DSP 芯片不仅在通信、计算机领域大显身手，而且逐渐渗透到人们日常消费领域。

经过 20 多年的发展，DSP 产品的应用已扩大到人们的学习、工作和生活的各个方面，并逐渐成为电子产品更新换代的决定因素。目前，对 DSP 爆炸性需求的时代已经来临，前景十分可观。

0.2 数字信号处理系统的基本组成

我们先来讨论模拟信号的数字化处理系统。此系统首先把模拟信号变换为数字信号，然后用数字技术进行处理，最后再还原成模拟信号。这一系统的方框图如图 0.1 所示。实际的系统并不一定要包括它的所有框图。例如：有些系统只需要数字输出，可直接以数字形式显示或打印，就不需要 D/A 转换器；另一些系统的输入就是数字量，因而就不需要 A/D 转换器；纯数字系统则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

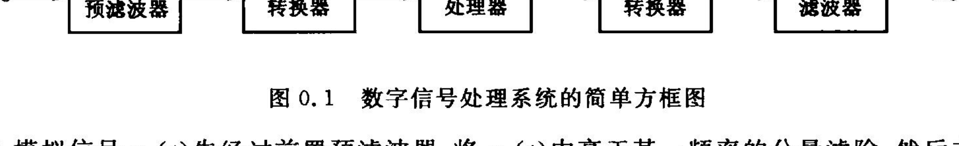


图 0.1　数字信号处理系统的简单方框图

输入模拟信号 $x_a(t)$ 先经过前置预滤波器，将 $x_a(t)$ 中高于某一频率的分量滤除，然后在 A/D 转换器中每隔 T_s 秒取出一次 $x_a(t)$ 的幅度，采样后的信号称为离散时间信号，它只表示一些离散时间点 $0, T_s, 2T_s, \cdots, nT_s, \cdots$ 上的信号值 $x_a(0), x_a(T_s), x_a(2T_s), \cdots, x_an(T_s), \cdots$ 采样过程即是对模拟信

号的时间离散化的过程，随之在 A/D 转换器的保持电路中将采样信号转换成数字信号，因为一般采用有限位二进制码，所以它所表示的信号幅度就是有一定限制的，例如 4 位码，只能表示 $2^4=16$ 种不同的信号幅度，这些幅度称为量化电平，所以经 A/D 变换器后，不但时间离散化了，而且幅度也离散化了，这种信号就称为数字信号，它是数的序列，每个数用有限个二进制数来表示，我们用 $x(n)$ 来代表信号数字化后的序列，自变量 n 是整型变量，表示这个数在序列中的次序，为了形象起见，用一个垂直线段来表示 $x(n)$ 的数值大小。随后，数字信号序列 $x(n)$ 通过数字信号处理系统的核心部分，即数字信号处理器，按照预定的要求进行加工处理，得到输出数字信号 $y(n)$。再后，$y(n)$ 通过 D/A 转换器，将数字信号序列反过来变成模拟信号，这些信号在时间点 $0, T_s, 2T_s, \cdots, nT_s, \cdots$ 上的幅度等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值大小。最后通过一个模拟滤波器，滤除不需要的高频分量，平滑成所需的模拟输出信号 $y_a(t)$。

0.3 数字信号处理的实现方法

由于数字信号处理的主要对象是数字信号，且是采用运算的方法达到处理目的的，所以基本上可以分成三种实现方法，即软件实现、硬件实现及软硬件结合实现方法。以下介绍这三种实现方法及特点。

1. 硬件实现

采用三种运算器，即加法器、乘法器、延时器及其组合设计适合于各种目的的数字电路系统，以完成序列运算。如调制解调器、快速傅里叶变换芯片、数字滤波器芯片等。在数字信号处理中，硬件电路实时快速处理是一大优点，缺点是设备只能专用。现在结合嵌入式系统理念设计的专用数字电路对处理数字序列可能有很大好处。

2. 软件实现

一般来说，在通用计算机上或嵌入式系统上，采用高级语言编制各种需要的计算程序，可以达到处理数字信号的目的。但软件方法因为速度慢的原因适合于对实时性要求较低或不要求实时性的场合。应该注意的是，随着计算机性能的提高，实时性要求也在变化，过去由于条件限制，即使硬件实时性也有一定延迟，而今用软件方法同样可以达到实时性处理要求。软件实现是用一台通用的数字计算机运行数字信号处理程序。其优点是经济，一机可以多用；缺点是处理速度慢，这是由于通用数字计算机的体系结构并不是为某一种特定算法而设计的。在许多非实时的应用场合，可以采用软件实现方法。例如，处理一盘混有噪声的录像（音）带，我们可以将图像（声音）信号转换成数字信号并存入计算机，用较长的时间一帧帧地处理这些数据。处理完毕后，再实时地将处理结果还原成一盘清晰的录像（音）带。通用计算机即可完成上述任务，而不必花费较大的代价去设计一台专用数字计算机。

3. 软硬件结合实现

现在处理数字信号的主要方法还是各种数字信号处理器（如流行的美国 TI 公司的 TMS320DSP 系列），它结合软件和硬件的方式，利用设计特殊的数字信号处理芯片及存储器构成处理硬件电路系统，其中采用高级语言编制的程序来完成运算。DSP 处理方式灵活方便，随着集成电路的发展，已经能达到很高的速度，可进行数字图像实时处理，该方法已经被广泛用于包括通信工程在内的领域之中。因此 DSP 技术及其应用已成为信号处理学科研究的中心内容之一 。

0.4 数字信号处理的特点

模拟信号处理系统只能对信号进行一些常规的简单处理，而数字信号处理是用数值运算的方法实现对信号的处理，可以用计算机进行很多复杂的处理。所以相对于模拟信号处理，数字信号处理

有很多优点，归纳如下：

(1)精度高。用模拟电路计算对数时，达到1%的精度都很困难，而且模拟电路内部和外部噪声也影响处理精度。数字系统的处理精度由系统字长(二进制位数)决定，计算机和DSP的字长由8位提高到16位、32位和64位，可以选择合适的字长满足各种精度要求。另外数字系统一般工作在二进制状态，所以基本不受内部噪声的干扰。

(2)灵活性高。数字信号处理系统的性能取决于系统参数，这些参数存储在存储器中，容易改变，因此系统的性能容易改变。

(3)可靠性高。只要设计正确，就可以确保数字系统稳定工作，稳定可靠的另一种含义是指数字系统的特性不易随使用条件的变化而变化。由于各级数字系统之间是通过数据进行耦合的，所以不存在模拟电路中的阻抗匹配问题。例如，用两个程序模块实现某种信号处理功能，将第一级程序的处理结果数据作为第二级程序的输入数据即可。

(4)容易大规模集成。由于数字部件具有高度规范性，便于大规模集成，从而使数字系统体积小、重量轻、性能价格比高。

(5)时分复用。可利用数字信号处理器同时处理几个通道的信号。

(6)高性能指标。不仅可以对模拟系统逼近，而且可以完成许多模拟系统完不成的任务；例如电视中的画中画、各种视频特技等。

0.5 数字信号处理技术的主要内容

1965年的快速傅里叶变换算法是信号处理从模拟阶段到数字阶段的标准，经过40多年的发展已经形成了比较完善的理论体系：

(1)信号的采集； (2)离散信号的分析；
(3)离散系统分析； (4)信号处理中的快速算法；
(5)信号的估值； (6)滤波技术；
(7)信号的建模 ； (8)信号处理中的特殊算法。

目前，信号处理在优化、自适应、高分辨率、多维多通道等一些领域内的理论和方法日趋系统化。随着数字信号处理应用领域的不断扩大，人们开始研究非平衡、非高斯的信号与背景噪声；研究时变、非因果、非最小相位、非线形的系统；考虑系统的各种实际因素，研究其鲁棒性。总之，随着基础理论的不断完善、交叉科学的不断发展、微电子技术与计算机技术的不断进步，可以预见21世纪将是数字信号处理理论与算法的大发展时期。

本书作为专业基础课教材，主要讲述其基本理论和基本分析方法，并介绍MATLAB的实现，原理和应用紧密结合，每章后配有思考题和习题，每章有MATLAB实验内容，以便于教学和自学。

思考题

1. 数字信号处理和模拟信号处理在手段上有什么区别？
2. 数字信号处理与模拟信号处理相比有什么优势？
3. 数字信号处理的实现方式有哪些？
4. 数字信号处理的应用领域有哪些？
5. 数字信号处理技术的发展阶段有哪些？

第 1 章

离散时间信号与系统的时域分析

本章作为全书的基础，主要学习内容为时域离散信号的表示方法和典型信号；线性时不变系统的因果性和稳定性；系统的输入、输出描述法；线性常系数差分方程的解法；最后介绍模拟信号的数字处理方法。

1.1 离散时间信号——序列

对模拟信号 $x_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 T_s，得到

$$x_a(t)\big|_{t=nT_s} \overset{\text{采样}}{=\!=\!=} x_a(nT_s),\ -\infty < n < +\infty \tag{1.1.1}$$

对于不同的 n 值，$x_a(nT_s)$ 是一个有序的数字序列，该数字序列就是时域离散信号。实际信号处理中，这些数字序列值按顺序放在存储器中，nT_s 代表的是前后顺序。为简化，采样间隔可以不写，形成 $x(n)$ 信号，$x(n)$ 也可以称为**序列**。对于具体信号，$x(n)$ 也代表第 n 个序列值。需要说明的是，这里 n 取整数，取非整数时无定义。另外，在数值上它等于信号的采样值，即

$$x_a(nT_s) = x(n),\ -\infty < n < +\infty \tag{1.1.2}$$

如果 $x(n)$ 是通过观测得到的一组离散数据，可用集合符号表示，但一般要注明时间起点，例如：

$$x(n) = \{\cdots, 1.3,\ 2.5,\ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{3.3},\ 1.9,\ 0,\ 4.1, \cdots\}$$

对于有限长序列，也可用下标来表示序列的时间起点，如 $x(n)=\{1,2,3,4,5\}_2$，则表示 $x(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{1},2,3,4,5\}$.

1.1.1 常用的典型序列

1. 单位采样序列 $\delta(n)$

(1)单位采样序列：

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=0 \\ 0 & \text{当 } n\neq 0\end{cases} \tag{1.1.3}$$

单位采样序列也可以称为**单位冲激序列**、**单位脉冲序列**，特点是仅在 $n=0$ 时取值为 1，其他均为零。它类似于模拟信号和系统中的单位冲激信号 $\delta(t)$，但不同的是 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时，取值无穷大，$t\neq 0$ 时取值为零，对时间 t 的积分为 1。即表达式为 $\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{当 } t=0 \\ 0 & \text{当 } t\neq 0\end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$。$\delta(t)$ 完全是一种数学极限，而 $\delta(n)$ 完全是一个现实序列。单位采样序列 $\delta(n)$ 和单位冲激信号 $\delta(t)$ 如图 1.1.1 所示。

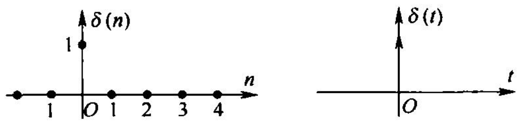


图 1.1.1　单位采样序列和单位冲激信号

(2)任意时刻的单位采样序列：

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=n_0\\ 0 & \text{当 } n\neq n_0\end{cases} \tag{1.1.4}$$

它的特点是：仅在 $n=n_0$ 时取值为 1，其他均为零。

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1 & \text{当 } n\geqslant 0\\ 0 & \text{当 } n<0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

单位阶跃序列如图 1.1.2，它类似于模拟信号中的单位阶跃信号 $u(t)$。

$\delta(n)$与 $u(n)$之间的关系如下式所示：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1.1.6}$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\delta(n-m) \tag{1.1.7}$$

另外，对于任意序列，也可以用单位采样序列的移位加权和表示，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1.1.8}$$

式中

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=m\\ 0 & \text{当 } n\neq m\end{cases}$$

这种任意序列的表示方法，在信号分析中是一个很有用的公式。

【例 1.1.1】　$x(n)$的波形图如图 1.1.3 所示，试用单位序列的加权和形式表示。

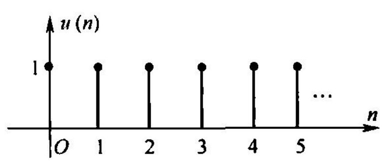


图 1.1.2　单位阶跃序列

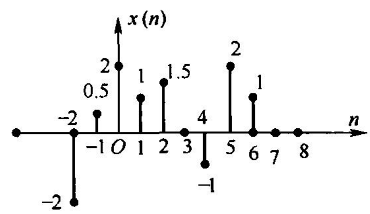


图 1.1.3　用单位序列的加权和形式表示序列

解　$x(n)$可以表示为

$$x(n)=-2\delta(n+2)+0.5\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)+1.5\delta(n-2)-\delta(n-4)+2\delta(n-5)+\delta(n-6)$$

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.9}$$

即矩形的宽度 N 表示序列中包含 N 个 1。当 $N=4$ 时，$R_4(n)$的波形如图 1.1.4 所示。矩形序列可以用单位阶跃序列表示，如下式：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{1.1.10}$$

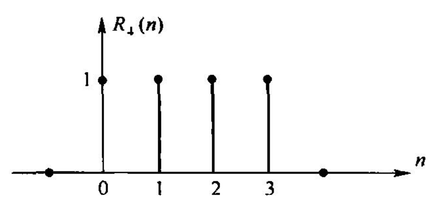


图 1.1.4　矩形序列

4. 实指数序列

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1.1.11}$$

如图 1.1.5 所示，当$|a|<1$时，该序列是收敛的；$|a|>1$时，该序列是发散的。

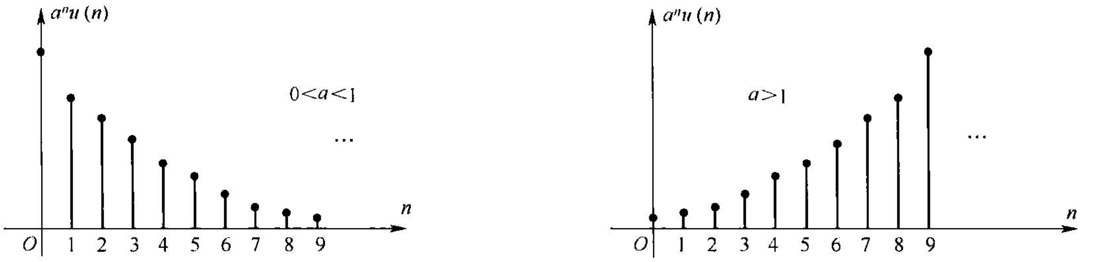


图 1.1.5　实指数序列

5. 正弦序列

$$x(n)=\sin(\omega n) \tag{1.1.12}$$

式中，ω 称为正弦序列的数字域频率，单位是 rad/s，它表示序列变化的速率，或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数。

该序列是由模拟信号采样得到的。

$$x_a(t)=\sin(\Omega t)\xrightarrow{\text{采样}}x_a(n\Omega T)\xrightarrow{\omega=\Omega T}x_a(n\omega)$$

因为在数值上，序列值与采样信号值相等，因此得到数字角频率 ω 和模拟角频率 Ω 之间的关系为

$$\omega=\Omega T_s=\frac{\Omega}{f_s} \tag{1.1.13}$$

即模拟角频率和数字角频率成正比例关系。

6. 复指数序列

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}=e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+je^{\sigma n}\sin(\omega_0 n) \tag{1.1.14}$$

ω_0为数字域频率。

1.1.2 序列的周期性

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 **N**，使下面等式成立：

$$x(n)=x(n+N)\qquad -\infty<n<+\infty \tag{1.1.15}$$

则称序列 $x(n)$为周期性序列，周期为 N，注意 N 要取整数，例如：

$$x(n)=\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

上式中，数字域角频率是 $\pi/4$，由于 n 取整数，可以写成下式：

$$x(n)=\sin\left[\frac{\pi}{4}(n+8)\right]$$

上式表明 $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$是周期为 8 的周期序列，也是正弦序列。

下面讨论一般正弦序列的周期性，设

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$$

则

$$x(n+N)=A\sin[\omega_0(n+N)+\varphi]=A\sin(\omega_0 n+N\omega_0+\varphi)$$

若 $N\omega_0=2k\pi$，k 为整数时，则 $x(n)=x(n+N)$

根据周期序列的定义可知，这时正弦序列为周期序列，其周期满足（N、k 必须为整数）。

$$N=2k\pi/\omega_0 \tag{1.1.16}$$

正弦序列有以下三种情况：

（1）当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，如 $\sin\frac{\pi}{4}n$，此时 $N=\frac{2\pi}{\omega_0}=8$，正弦序列是以 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为周期的周期序列。

（2）当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数，是一个有理数时，如 $\sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\frac{4}{5}\pi}=\frac{5}{2}$，取 $k=2$，则 $N=5$，设 $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{P}{Q}$，其中 P、Q 是互素的整数。取 $k=Q$，那么 $N=P$，则正弦序列是以 P 为周期的周期序列。

（3）$\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数，如 $\sin\left(\frac{4\pi}{\sqrt{5}}n\right)$，此时 N 不可能取整数。此时正弦序列不是周期序列。

【例 1.1.2】 试判断下面的序列是否是周期序列，是周期序列指出周期。

（1）$x(n)=\sin\left(\frac{\pi}{8}n+\frac{\pi}{4}\right)$；

（2）$x(n)=3\cos\left(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{4}\right)$；

（3）$x(n)=\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{1}{4}n\right)\right]$。

解 （1）$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/8}=16$，则该序列是以 $N=16$ 为周期的周期序列。

（2）$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{4\pi/5}=\frac{5}{2}$，取 $k=2$ 则 $N=5$，则该序列是以 $N=5$ 为周期的周期序列。

（3）$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{4}n\right)}=\cos\left(\frac{1}{4}n\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{4}n\right)$，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$ 为无理数，则该序列不是周期序列。

1.1.3 序列的运算

序列的运算包括乘法、加法、移位、翻转及尺度变换、差分和累加等。

1. 移位

设某一序列为 $x(n)$，当 m 为正时，$x(n-m)$ 则是指序列逐项依次延时（右移）m 位而给出的一个新序列，当 m 为负时，$x(n-m)$ 是指依次超前（左移）m 位。

2. 翻转

序列的翻转是将序列以 $n=0$ 的纵轴为对称轴进行对褶，构成新的序列，即

$$x(n)\xrightarrow{\text{翻转}}x(-n) \tag{1.1.17}$$

3. 和

序列之间的和，是指它的同序号的序列值逐项对应相加。

4. 积

序列之间的积，是指它的同序号的序列值逐项对应相乘。

5. 累加

设序列为 $x(n)$，则序列 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k) \tag{1.1.18}$$

它表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值等于这一个 n_0 上的 $x(n_0)$ 值以及 n_0 以前的所有 n 值上的 $x(n)$ 值之和。

6. 差分运算

一阶前向差分：将序列先进行左移，再相减。

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n) \tag{1.1.19}$$

一阶后向差分：将序列先进行右移，再相减

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1) \tag{1.1.20}$$

二阶前向差分：

$$\Delta[\Delta x(n)]=\Delta^2 x(n)=\Delta x(n+1)-\Delta x(n)=x(n+2)-2x(n+1)+x(n) \tag{1.1.21}$$

二阶后向差分：

$$\nabla[\nabla x(n)]=\nabla^2 x(n)=\nabla x(n)-\nabla x(n-1)=x(n)-2x(n-1)+x(n-2) \tag{1.1.22}$$

k 阶差分后的系数满足二项式定理：

$$\nabla^k x(n)=(1-D)^k x(n),Dy(n)=y(n-1) \tag{1.1.23}$$

7. 尺度变换

(1)抽取，$x(n)$每隔 m 点取一点，m 为正整数。即表达形式为

$$x(n)\xrightarrow{\text{抽取}}x(nm) \tag{1.1.24}$$

如果已知 $x(n)$，则 $y(n)=x(3n)=\{x(0),x(3),x(6),\cdots\}$，即

$$y(0)=x(0),y(1)=x(3),y(2)=x(6),y(3)=x(9)$$

(2)插值：在原序列 $x(n)$相邻两点之间插入 $m-1$ 个零值点或其他点(由各种插值函数决定)，保留 $x(0)$表达形式为

$$x(n)\xrightarrow{\text{插值}}x(n/m),m>1 \tag{1.1.25}$$

$y(0)=x(0),y(3)=x(1),y(6)=x(2),\cdots$，则 $y(1),y(2),y(3),y(5)$等需要插值，可以补零，也可以补其他。

【例 1.1.3】 已知序列序列 $x_1(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)$，$x_2(n)=2^n[u(n)-u(n-4)]$，试求序列的各种运算。

(1)$y_1(n)=x_1(n)+x_2(n)$　　(2)$y_2(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$

(3)$y_3(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}x_1(k)$　　(4)$y_4(n)=x_2(-n)$

(5)$y_5(n)=x_2(2n)$　　(6)$y_6(n)=x_2(\frac{1}{2}n)$

(7)$y_7(n)=x_2(-2n-2)$

解　将 $x_1(n)$，$x_2(n)$写成集合的形式：

$$x_1(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},0,2\},\qquad x_2(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},2,4,8\}$$

则(1)$y_1(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{2},2,6,8\}$；　(2)$y_2(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},0,8\}$；

(3)$y_3(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},1,3,3,\cdots\}$；　(4)$y_4(n)=\{8,4,2,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1}\}$；

(5)$y_5(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},4\}$；　(6)$y_6(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},0,2,0,4,0,8\}$；

(7)先翻转 $x_2(-n)=\{8,4,2,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1}\}$，再尺度 $x_2(-2n)=\{4,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1}\}$；最后时移

$x_2(-2(n+1))=\{4,1,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{0}\}$；或先尺度 $x_2(2n)=\{1,4\}$，再时移 $x_2(2(n-1))=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{0},1,4\}$，

最后翻转 $x_2(-2n-2)=\{4,1,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{0}\}$，则 $y_7(n)=\{4,1,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{0}\}$。

1.2　离散时间系统的时域分析

设时域离散系统的输入为 $x(n)$，经过规定的运算，系统输出序列用 $y(n)$ 表示。设运算关系用 $T[\cdot]$ 表示，输出与输入之间关系用下式表示：

$$y(n)=T[x(n)] \tag{1.2.1}$$

其框图如图 1.2.1 所示。

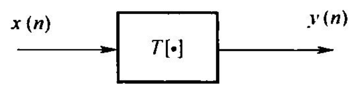


图 1.2.1　时域离散系统

在时域离散系统中，最重要最常用的是线性时不变因果稳定系统，这是因为很多物理过程都用这类系统表征，且可实现、便于分析。

1.2.1　离散时间系统的特性

1. 线性

线性系统是满足叠加原理的系统。设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别作为系统的输入序列，其输出分别用 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 表示，$y_1(n)=T[x_1(n)]$，$y_2(n)=T[x_2(n)]$

则：线性系统一定满足下面两个公式：

$$T[x_1(n)+x_2(n)]=y_1(n)+y_2(n) \tag{1.2.2}$$

$$aT[x_1(n)]=ay_1(n) \tag{1.2.3}$$

满足(1.2.2)式称为线性系统的可加性；满足(1.2.3)式称为线性系统的比例性或齐次性；将以上两个式子结合起来，可表示成(其中，a,b 为任意常数)：

$$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n) \tag{1.2.4}$$

【例 1.2.1】 判断 $y(n)=3x(n)+4$ 所代表的系统是否具有线性特性。

解

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=4x_1(n)+3$$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=4x_2(n)+3$$

$$y(n)=T[x_1(n)+x_2(n)]=4x_1(n)+4x_2(n)+3$$

则 $y(n)\neq y_1(n)+y_2(n)$，因此该系统不具有线性特性。

2. 时不变性

如果系统对输入信号的运算关系 $T[\cdot]$ 在整个运算过程中不随时间变化，或者说系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关，则这种系统称为时不变系统，用公式表示如下：若 $y(n)=T[x(n)]$，则

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)] \tag{1.2.5}$$

【例 1.2.2】 证明 $y(n)=T[x(n)]=nx(n)$ 所表示的系统不是时不变系统。

证明　因为　$T[x(n-m)]=nx(n-m)$

及　$y(n-m)=(n-m)x(n-m)$

所以　$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$

故此系统不是时不变系统。

【例 1.2.3】 判断 $y(n)=nx(n)+4$ 是一个时变系统。

解　$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)+4$，

而 $y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)+4\neq T[x(n-n_0)]$

所以 $y(n)=nx(n)+4$ 是一个时变系统。

同时具有线性和时不变性的离散时间系统称为线性时不变(Linear Time Invariant,LTI)离散时间系统,简称 LTI 系统。

3. 因果性

系统在 n 时刻的输出只和系统在该 n 时刻及 n 时刻以前的输入序列有关,而和 n 时刻以前的输入序列无关,则称该系统具有因果性质,或称该系统为因果系统。如果 n 时刻的输出还取决于 n 时刻以后的输入序列,在时间上违背了因果性,系统无法实现,则系统被称为非因果系统。因此系统的因果性体现了系统的可实现性。

线性时不变系统具有因果性的充分必要条件是系统的单位脉冲响应满足下式:

$$h(n)=0,n<0 \tag{1.2.6}$$

如 $h(n)=a^nu(n-4)$ 为因果系统,而 $h(n)=a^nu(n+4)$ 就是非因果系统。

4. 稳定性

所谓稳定性,是指系统输入有界,系统输出也是有界的(BIBO)。系统稳定的充分必要条件是系统的单位脉冲响应绝对可和,用公式表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$$

【例 1.2.4】 判断系统 $h(n)=a^nu(n)$ 的稳定性和因果性。

解 (1)因果性

因为在 $n<0$ 时,$h(n)=0$,故此系统为因果系统。

(2)稳定性

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a^n|=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|a|} & \text{当 } |a|<1\\ \infty & \text{当 } |a|\geqslant 1\end{cases}$$

所以 $|a|<1$ 时此系统稳定,$|a|\geqslant1$ 时此系统不稳定。

1.2.2 线性时不变系统的离散卷积

设系统输入 $x(n)=\delta(n)$,系统输出 $y(n)$ 的初始状态为零,定义这种条件下系统的输出为单位脉冲响应,用 $h(n)$ 表示。也就是说单位脉冲响应 $h(n)$ 是系统对 $\delta(n)$ 的零状态响应,它表征了系统的时域特征。用公式表示为

$$h(n)=T[\delta(n)] \tag{1.2.7}$$

设系统的任意输入 $x(n)$ 可表示成单位脉冲序列移位加权和为

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)$$

那么,系统输出为

$$y(n)=T[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)]$$

根据线性系统的比例性质

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

又根据时不变性质

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n) \tag{1.2.8}$$