# 竞赛数学原理与方法

JINGSAISHUXUE
YUANLI YU FANGFA

徐学文 著

科学出版社

# 竞赛数学原理与方法

徐学文　著

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书共分17个专题，内容涉及数列的递推关系及性质，函数迭代与函数方程，重要不等式，平面几何的重要定理，数论的重要定理及基本方法，组合数学的原理与方法，图论的原理与方法，对策的基本结论及方法等竞赛数学的主要内容. 每个专题由基本原理、试题编制和方法解读三个部分组成，论述了竞赛数学中常用的基本原理，竞赛试题的形成过程及竞赛数学中常用的思想方法.

本书的读者对象为师范院校数学专业研究生、本科生、高中数学教师以及广大数学爱好者.

**图书在版编目(CIP)数据**

竞赛数学原理与方法/徐学文著. 一北京：科学出版社，2011. 6

ISBN 978-7-03-031411-6

Ⅰ.竞… Ⅱ.徐… Ⅲ.数学一竞赛一师范学校一教材 Ⅳ.O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第105768号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011年6月第一次印刷 印张：12 3/4

印数：1—3 000 字数：246 000

**定价：25.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　言

竞赛数学知识面广，思想性强，方法灵活，题型丰富，这有利于开拓学生的视野，增强学生的探索精神，锻炼学生的意志品质，培养学生的创新思维能力．然而，随着数学竞赛活动的深入发展，竞赛数学的试题越来越多，竞赛数学的书籍越编越厚，极大的增添了学生的学习负担．撰写本书的目的是希望为竞赛数学爱好者提供一本简明读物，让读者能在较短的时间内了解竞赛数学的主要内容和思想方法，认识竞赛数学的解题规律．本书收录了笔者多年来关于竞赛数学的研究成果，其中有些成果是首次公开发表．

本书共分 17 个专题，它们涵盖了竞赛数学的基本内容．除第 9 个专题外每个专题由基本原理、试题生成、方法解读和习题四个部分组成，介绍了该专题所涉及的基本理论与解题方法，展现了竞赛试题的形成过程．书中力求通过试题编制的过程让读者了解竞赛试题形成机制，通过方法解读让读者了解竞赛试题解题的基本规律．本书基本沿用了中学数学教材的数学符号，如用 $\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 分别表示整数集、有理数集、实数集、复数集，另外，书中用$\overline{A}$表示集合$A$的补集，用$|A|$表示有限集 $A$ 中的元素个数，用 $a\equiv b(\bmod m)$表示 $a$ 与 $b$ 被 $m$ 除的余数相同．

本书得到了教育部财政部 2010 年度国家级数学团队“数学与应用数学专业主干课程”建设项目（教高函[2010]12 号）资助．

本书得到了教育部财政部 2010 年度国家级精品课程“偏微分方程”建设项目（教高函[2010]14 号）资助．

本书的出版得到了华中师范大学数学与统计学学院领导与科学出版社的大力支持，在此致以衷心的感谢．

由于作者水平有限，书中难免有缺点和错误，敬请读者批评指正．

# 目　　录

1　数学归纳法 …… 1
1. 基本原理 …… 1
2. 试题生成 …… 2
3. 方法解读 …… 3
习题 1 …… 8

2　抽屉原则 …… 10
1. 基本原理 …… 10
2. 试题生成 …… 11
3. 方法解读 …… 12
习题 2 …… 16

3　数列的递推关系 …… 17
1. 基本原理 …… 17
2. 试题生成 …… 19
3. 方法解读 …… 20
习题 3 …… 27

4　数列及性质 …… 28
1. 基本原理 …… 28
2. 试题生成 …… 29
3. 方法解读 …… 31
习题 4 …… 36

5　函数迭代与函数方程 …… 38
1. 基本原理 …… 38
2. 试题生成 …… 39
3. 方法解读 …… 42
习题 5 …… 48

**6 几个著名的不等式** …… 50
1. 基本原理 …… 50
2. 试题生成 …… 55
3. 方法解读 …… 60
习题 6 …… 63

**7 多项式** …… 64
1. 基本原理 …… 64
2. 试题生成 …… 66
3. 方法解读 …… 68
习题 7 …… 74

**8 复数与方程** …… 75
1. 基本原理 …… 75
2. 试题生成 …… 76
3. 方法解读 …… 78
习题 8 …… 83

**9 平面几何的重要定理** …… 85
1. 基本原理 …… 85
2. 定理的应用 …… 90
习题 9 …… 93

**10 数论问题的常用方法** …… 95
1. 基本原理 …… 95
2. 试题生成 …… 96
3. 方法解读 …… 98
习题 10 …… 105

**11 数论的几个重要定理** …… 106
1. 基本原理 …… 106
2. 试题生成 …… 108
3. 方法解读 …… 109
习题 11 …… 114

**12 计数原理** …… 116
1. 基本原理 …… 116
2. 试题生成 …… 118
3. 方法解读 …… 121
习题 12 …… 126

**13 容斥原理与母函数** …… 127
1. 基本原理 …… 127
2. 试题生成 …… 129
3. 方法解读 …… 131
习题 13 …… 136

**14 组合几何** …… 137
1. 基本原理 …… 137
2. 试题生成 …… 139
3. 方法解读 …… 141
习题 14 …… 146

**15 图论的基本原理** …… 148
1. 基本原理 …… 148
2. 试题生成 …… 153
3. 方法解读 …… 155
习题 15 …… 159

**16 染色问题** …… 160
1. 基本原理 …… 160
2. 试题生成 …… 162
3. 方法解读 …… 164
习题 16 …… 168

**17 对策问题** …… 170
1. 基本原理 …… 170
2. 试题生成 …… 173
3. 方法解读 …… 175
习题 17 …… 179

**答案与提示** …… 180

# 1 数学归纳法

数学归纳法是证明序列命题的常用方法. 设 $n$ 是整数,$P(n)$ 是与 $n$ 相关的命题,$A$ 是非负整数集的一个子集,要证明 $\forall n \in A$,命题 $P(n)$ 成立,这时可考虑用数学归纳法. 数学归纳法有多种表现形式,中学数学中常用的第一数学归纳法与第二数学归纳法是它的两种重要表现形式. 在竞赛数学中,还需了解其他的表现形式. 下面对归纳法的基本原理和常见的几种表现形式作一介绍.

## 1. 基本原理

数学归纳法以皮亚诺的归纳公理为数学基础. 由于可以证明归纳公理和最小数原理等价,所以人们常用最小数原理证明数学归纳法. 我们先对最小数原理作一介绍.

**最小数原理** 设 $M$ 是自然数集的一个非空子集,则 $M$ 中必有最小数,即 $\exists n_0 \in M$,使得 $\forall n \in M$,均有 $n \geqslant n_0$.

为了便于说明数学归纳法的其他表现形式,我们先证明如下结论:

**定理 1** 设 $A$ 是一个非空集合,$A_1, A_2, \cdots, A_K, \cdots$ 均为非空集合,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K \cup \cdots$$

若 $\forall n \in A_1$,有命题 $P(n)$ 成立. 又在假设 $\forall n \in A_k$,命题 $P(n)$ 成立的前提下,能推出 $\forall n \in A_{k+1}$,命题 $P(n)$ 成立,则 $\forall n \in A$,命题 $P(n)$ 成立.

**证** 反证法:若结论不成立,即 $\exists n_0 \in A$,使得命题 $P(n_0)$ 不成立,因为

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K \cup \cdots$$

所以 $n_0$ 属于某个 $A_i$. 令 $B = \{i \mid \exists n \in A_i$,使得 $P(n)$ 不成立$\}$,则 $B \neq \varnothing$,且 $B \subseteq N$. 由最小数原理知,$B$ 中有最小数 $s$,由于 $s$ 是集合 $B$ 的最小数,又 $\forall n \in A_1$,$P(n)$ 成立,所以 $s > 1$,$s - 1 \geqslant 1$. 由 $s$ 的规定知,$\forall n \in A_{s-1}$,命题 $P(n)$ 成立,再由定理的条件知 $\forall n \in A_s$,命题 $P(n)$ 均成立,这与 $\exists n \in A_s$,使得 $P(n)$ 不成立相矛盾,故原假设不成立,即定理结论成立.

不难看出,在定理 1 中,取 $A_k = \{k\}$,$k \in N_+$,则得到第一数学归纳法. 如果在

定理 1 中取 $A_k=\{1,2,3,\cdots,k\},k\in N_+$，则得到第二数学归纳法.

设 $l\in N,l\geqslant 2$，在定理 1 中，令

$$A_1=\{1,2,\cdots,l\},$$
$$A_2=\{l+1,l+2,\cdots,2l\},$$
$$\cdots$$
$$A_k=\{(k-1)l+1,(k-1)l+2,\cdots,kl\},$$
$$\cdots$$

不难得出如下形式的归纳法：

**定理 2**(跳跃归纳法)　设 $P(n)$ 是关于正整数 $n$ 的命题，若 $P(1),P(2),\cdots,P(l)$ $(l\geqslant 2)$ 均成立，又在假设 $P(k)$ 成立的前提下，能推出 $P(k+l)$ 成立，则对于一切正整数 $n,P(n)$ 均成立.

在跳跃归纳法中，人们常把整数 $l$ 称为归纳跨度.

在定理 1 中，对集合 $A_k$ 作出不同的规定，我们还可以得到如下形式的倒退归纳法.

**定理 3**(倒退归纳法)　设对于 $n=n_0$ $(n_0\geqslant 1)$，命题 $P(n_0)$ 成立，若由 $P(k)$ 成立能推出 $P(k-1)$ $(k\leqslant n_0)$ 成立，则对于 $n\in\{1,2,\cdots,n_0\}$，命题 $P(n)$ 均成立.

**定理 4**(倒退归纳法)　若对于 $n=2^k$ $(k=1,2,\cdots)$，命题 $P(n)$ 成立. 又由 $P(k)$ 成立能推出 $P(k-1)$ 成立，则对于 $n\in N$，命题 $P(n)$ 均成立.

除上述表现形式外，我们还可以根据需要写出不同形式的数学归纳法.

## 2. 试题生成

编制数学归纳法试题的方法之一是改变归纳的跨度. 对于与整数 $n$ 相关的命题 $P(n)$，如果由 $P(k)$ 成立不易推出 $P(k+1)$ 成立，但由 $P(k)$ 成立容易推出 $P(k+l)$ $(l\geqslant 2)$ 成立，则可用 $P(n)$ 的这一特性编制与跳跃归纳法相关的试题. 例如，我们选取两个正整数 $a,b$，为了方便解释，不妨取 $a=2^2,b=3^2$，现考虑正整数 $n$ 表示成若干个 $a$ 与 $b$ 的和这一问题. 显然，若 $n$ 能表示成 $a$ 与 $b$ 的和，则易证 $n+4$ 也能表示成 $a$ 与 $b$ 的和. 又容易验证 $5\times 9,5\times 9+1,5\times 9+2,5\times 9+3$ 均能表示成 $a$ 与 $b$ 的和，这样我们就得到如下试题：

**题 1**　已知 $n$ 为正整数($n\geqslant 45$)，求证：必存在非负整数 $x,y$，使得 $n=4x+9y$.

编制与数学归纳法相关试题的另一方法是将一般问题特殊化. 若命题 $P(n)$ 对一切正整数都成立，那么对于特定的正整数 $n_0$，命题 $P(n_0)$ 也成立. 利用这种特殊化方法，易得到竞赛试题. 例如，我们容易用跳跃归纳法证明：对于任意正整数 $n$，方程 $x^2+y^2=z^n$ 都有正整数解. 取 $n=2011$，则得到如下试题：

**题 2** 证明方程 $x^2+y^2=z^{2011}$ 存在正整数解.

我们可以利用数列 $\{a_n\}$ 的性质来编制归纳法试题. 对于由递推关系给出的数列,常可用数列相邻几项共有的性质 $P$ 导出这几项的后项也有性质 $P$. 例如,我们选择一个向下迭代 2 步的一个分式递推关系

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}} \tag{1}$$

并给出初值 $a_1=a_2=a_3=1, a_4=2$. 显然,当 $n$ 为偶数时,由式(1),易得

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_3+a_1}{a_2}=2$$

从而有

$$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$$

当 $n$ 为奇数时,由式(1),易得

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_4+a_2}{a_3}=3$$

从而有

$$a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$$

综合即得

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n-a_{n-1}, & n\text{ 为偶数}\\ 3a_n-a_{n-1}, & n\text{ 为奇数}\end{cases} \tag{2}$$

由式(2) 易用数学归纳法证明:对于任意正整数 $n$,$a_n$ 为整数. 这样,我们得到如下试题:

**题 3** 已知 $a_1=a_2=a_3=1, a_4=2$,当 $n\geqslant 4$ 时,有

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}} \tag{3}$$

求证:对于任意正整数 $n$,$a_n$ 都是整数.

对于题 3,我们还可以将式(3) 作适当变形,使题目的难度进一步加大.

## 3. 方法解读

用数学归纳法证明命题,要注意如下几点:

(1) 注意归纳起点的选择. 有些关于正整数 $n$ 的命题,由 $P(1)$ 成立不一定能推出 $P(2)$ 成立,由 $P(2)$ 成立也不一定能推出 $P(3)$ 成立,只有从某个 $n_0$ 开始,当 $k\geqslant n_0$ 时,由 $P(k)$ 成立能推出 $P(k+1)$ 成立,此时归纳起点可从 $n_0$ 开始,对于 $P(1),P(2),\cdots,P(n_0-1)$ 的证明则另想他法.

(2) 注意归纳形式的选择. 归纳法有多种表现形式,应把握题型特点,选择适当的归纳法. 例如,若由命题 $P(k)$ 成立不易推出 $P(k+1)$ 成立,而由命题 $P(k)$ 成立易推出 $P(k+l)$ $(l\geqslant 2)$ 成立,这时应用跳跃归纳法. 又如,若由 $P(k)$ 成立不易

推出 $P(k+1)$ 成立，而由 $P(k)$ 成立易推出 $P(k-1)$ 成立，这时应选择倒退归纳法.

(3) 注意加强命题. 有些关于自然数的命题 $P(n)$，直接用归纳法证明 $P(n)$ 成立比较困难，这时可考虑证明 $P(n)$ 的加强命题 $f(n)$，这里 $f(n)$ 是 $P(n)$ 的充分条件.

(4) 注意命题的活化. 有些关于某些特定整数的命题 $P(n_0)$，直接证明比较困难时，这时可考虑证明命题 $P(n)$，而将 $P(n_0)$ 看成是 $P(n)$ 的特例.

(5) 注意创造条件用归纳假设. 有些关于正整数的命题 $P(n)$，在证明 $P(k+1)$ 时不能直接运用归纳假设，这时应将 $P(k+1)$ 的条件作适当的转化，使之满足归纳假设的条件，进而用归纳假设完成证明.

(6) 注意归纳变量的选择. 有些关于双变元的命题 $P(m,n)$，可用双变元归纳法证明. 若用单变元归纳法证明，这时应注意选择归纳变量是 $m$ 还是 $n$.

**例 1** 试证明对任何自然数 $n \geqslant 6$，每一个正方形都可分成 $n$ 个正方形.

**分析** 由于我们可以将一个正方形分成 4 个正方形，从而能使正方形的个数增加 3 个. 因此我们用归纳跨度为 3 的跳跃归纳法来证明.

**证** 当 $n=6,7,8$ 时，由图 1 知结论成立.

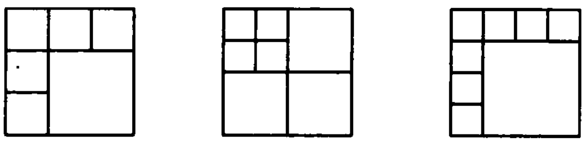


图 1

假设对于 $n=k\ (k \geqslant 6)$ 时结论成立，那么对于 $n=k+3$，我们先将正方形分成 $k$ 个正方形，再将这 $k$ 个正方形中的一个分成 4 个小正方形，从而得到 $k+3$ 个正方形，即 $n=k+3$ 时结论成立. 由归纳法原理知结论成立.

**例 2** 设 $f(n)$ 是 $N_+ \to N_+$ 的映射，满足：

(1) $f(2)=2$;

(2) $\forall m,n \in N_+$，有 $f(mn)=f(m)f(n)$;

(3) 当 $m,n \in N_+$ 且 $m<n$ 时，有 $f(m)<f(n)$.

证明：对于任意正整数 $n$，都有 $f(n)=n$.

**分析** 由条件(2) 知，我们可以用 $f(m)$ 与 $f(n)$ 的值去求 $f(mn)$ 的值. 因此当 $k+1$ 是合数时，我们可用归纳假设求出 $f(k+1)$ 的值. 但是当 $k+1$ 是质数时，我们不能用归纳假设求出 $f(k+1)$，也就是说，此时由 $f(n)\ (n \leqslant k)$ 的值不能求出 $f(k+1)$ 的值. 这就提示我们不宜直接用第一归纳法、第二归纳法及跳跃归纳法来证明此题.

**证** 由条件(1) 及(2)，不难用数学归纳法证明：$\forall k \in N_+$，有 $f(2^k)=2^k$.

对于 $n \in N_+$，当 $n=1$ 时，因为 $f(1) \in N_+$，所以 $f(1) \geqslant 1$. 又由条件(3)知 $f(1)<f(2)=2$，所以 $f(1) \leqslant 1$，从而有 $f(1)=1$.

又当 $n>1$ 且 $n \neq 2^k(k \in N_+)$ 时，必存在这样的 $m \in N_+$，使得 $2^m<n<2^{m+1}$. 设 $n=2^m+s, 1 \leqslant s \leqslant 2^m-1$，由于

$$2^m=f(2^m)<f(2^m+1)<f(2^m+2)<\cdots<f(2^m+2^m-1)<f(2^{m+1})=2^{m+1}$$

又 $f(2^m+j) \in N_+$，从而有

$$f(2^m+j)=2^m+j \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^m-1)$$

所以
$$f(2^m+s)=2^m+s$$
故
$$f(n)=n$$

**例 3** 证明：存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$，满足 $a_1<a_2<a_3<\cdots$，使得对所有正整数 $n$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 都是完全平方数.

**分析** 假定 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$ 是完全平方数，设为 $x^2$，要证明

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2=x^2+a_{k+1}^2$$

为完全平方数，不妨设为 $z^2$，则有

$$x^2+a_{k+1}^2=z^2 \tag{1}$$

若式(1)成立，则由勾股数的性质知 $z$ 必为奇数，因此我们将 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 为"完全平方数"加强为"奇数的平方".

**证** 我们证明如下命题：存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$，$a_1<a_2<a_3<\cdots$，使得对任意正整数 $n$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 为奇数的平方. 下面我们归纳构造满足条件的数列.

对于 $n=1$，取 $a_1=5$.

假设对于 $n=k$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 已给定，满足 $a_1<a_2<\cdots<a_k$，且对于 $1 \leqslant i \leqslant k$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2$ 均为奇数的平方. 那么对于 $n=k+1$，设

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2=(2m+1)^2$$

取 $a_{k+1}=(2m^2+2m)^2$，则有

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2 &= (2m+1)^2+(2m^2+2m)^2 \\ &= (2m^2+2m)^2+2(2m^2+2m)+1 \\ &= (2m^2+2m+1)^2 \end{aligned}$$

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2$ 也是奇数的平方. 由归纳法原理知满足条件的数列存在.

**例 4** 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，求证：当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)$$

**分析** 由 $a_k^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)$，推不出 $a_{k+1}^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)$.

事实上,因为 $a_{k+1}^2=\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2=a_k^2+\frac{2}{k+1}a_k+\frac{1}{(k+1)^2}$,若用归纳假设放缩不等式,则有

$$\begin{aligned}
a_{k+1}^2&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{2}{k+1}a_k+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{2}{k+1}a_k-\frac{2}{k+1}a_{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{2}{k+1}(a_k-a_{k+1})+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{2}{k+1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)-\frac{1}{(k+1)^2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

式(1) 右边比我们要证明的结论小,这说明用归纳假设放缩时已放缩过度. 为此我们希望通过加强命题的方法来证明. 设 $g(n)$ 是一个非负数列,我们希望能有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+g(n) \qquad (2)$$

下面分析 $g(n)$ 应满足的条件. 若结论成立,因为

$$a_{k+1}^2=\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2=a_k^2+\frac{2}{k+1}a_k+\frac{1}{(k+1)^2}$$

用归纳假设 $a_k^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+g(k)$,则有

$$\begin{aligned}
a_{k+1}^2&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+g(k)+\frac{2}{k+1}a_k+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+g(k+1)+\left[g(k)-g(k+1)-\frac{1}{(k+1)^2}\right]
\end{aligned}$$

要 $a_{k+1}^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+g(k+1)$,只要

$$g(k)-g(k+1)-\frac{1}{(k+1)^2}>0$$

即

$$g(k+1)<g(k)-\frac{1}{(k+1)^2} \qquad (3)$$

也就是说,若想通过数学归纳法证明式(2),只需证式(2) 中的 $g(n)$ 满足式(3) 即可. 现在取 $g(n)=\frac{1}{n}$,容易验证 $g(n)$ 满足式(3),从而我们能用数学归纳法证明加强命题:

对于 $n\geqslant 2$,有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n} \tag{4}$$

式(4) 的证明留给读者去完成.

**例 5** 设 $S$ 为一个 2010 元集合,$N$ 为满足 $0\leqslant N\leqslant 2^{2010}$ 的整数,证明:可以将 $S$ 的子集进行黑白染色,使得

(1) 任意两个白子集的并集仍是白子集;

(2) 任意两个黑子集的并集仍是黑子集;

(3) 恰有 $N$ 个白子集.

**分析** 直接对 2010 证明较困难,将 2010 改为 $n$,证明对于 $n$ 元集 $S$ 及 $0\leqslant N\leqslant 2^n$,可将 $S$ 的子集进行黑白染色使其满足题中的三个条件,下面用归纳法证明这一命题.

**证** 当 $n=1$ 时,$S$ 的子集为 $S,\varnothing$. 对于 $0\leqslant N\leqslant 2$,将它们中的 $N$ 个子集染成白色,其余子集染成黑色,这种染色的结果满足 3 个条件.

假设对于 $n=k$,结论成立,那么对于 $n=k+1$,$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\}$,将 $S$ 的不含 $a_{k+1}$ 的子集分别记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^k}$,$S$ 的含 $a_{k+1}$ 的子集分别记为 $B_1,B_2,\cdots,B_{2^k}$,使得对于 $1\leqslant i\leqslant 2^k$,有

$$B_i=A_i\cup\{a_{k+1}\}$$

现对于满足 $0\leqslant N\leqslant 2^{k+1}$ 的 $N$,若 $0\leqslant N\leqslant 2^k$,则用归纳假设将 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^k}$ 中的 $N$ 个子集染成白色,其余的子集染成黑色,使其满足题中条件(1) 和(2),然后将 $B_1,B_2,\cdots,B_{2^k}$ 全染成黑色,这种染色方式恰有 $N$ 个白子集,并且任意两个白子集的并集仍为白子集,任意两个黑子集的并集仍为黑子集.

若 $2^k+1\leqslant N\leqslant 2^{k+1}$,设 $N=2^k+r$ $(1\leqslant r\leqslant 2^k)$,则用归纳假设将 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^k}$ 中的 $r$ 个染成白色,其余 $2^k-r$ 个染成黑色,使其满足条件(1) 和(2),然后再将 $B_1,B_2,\cdots,B_{2^k}$ 全部染成白色. 这种染色方式共有 $r+2^k=N$ 个白子集,并且任意两个白子集的并集仍为白子集,任意两个黑子集的并集仍为黑子集.

综上可知,命题对一切 $n$ 均成立. 特别对 $n=2010$ 也成立.

**例 6** 证明:任意正的真分数 $\dfrac{m}{n}$ 都可以表示成不同的正整数的倒数之和.

**分析** $\dfrac{m}{n}$ 中含有两个变元 $m,n$,需选择一个作为归纳变元.

**证** 我们对 $m(<n)$ 进行归纳.

当 $m=1$ 时,结论成立.

假设对于 $m<k$ 的正整数都成立,那么对于 $m=k$ 和任意 $n>k$,若 $k\mid n$,则

$\frac{k}{n}=\frac{1}{\frac{n}{k}}$,结论成立. 若 $k$ 不整除 $n$,设 $n=qk-r$,$q$ 为正整数,$0<r<k$,则有

$$\frac{k}{n}=\frac{kq}{nq}=\frac{n+r}{nq}=\frac{1}{q}+\frac{r}{nq}$$

由归纳假设知

$$\frac{r}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_s}$$

其中 $1<n_1<n_2<\cdots<n_s$ 是互不相等的正整数,所以

$$\frac{k}{n}=\frac{1}{q}+\frac{1}{qn_1}+\frac{1}{qn_2}+\cdots+\frac{1}{qn_s}$$

其中 $q<qn_1<qn_2<\cdots<qn_s$,所以命题成立.

**例 7** 设有 $2^n$ ($n\geqslant 1$) 个球,把它们分为若干堆. 我们可以任意选甲、乙两堆按照如下规则移动:若甲堆的球数 $m_1$ 不少于乙堆的球数 $m_2$,则从甲堆拿 $m_2$ 个球放到乙堆中去,这样算挪动一次. 证明可以经过有限次挪动把所有球合并成一堆.

**分析** 在进行归纳推理时,由 $2^k$ 个球成立去推导球数为 $2^{k+1}$ 时成立,球数是 $2^k$ 的 2 倍,要想用归纳假设,必需将 $2^{k+1}$ 个球变成 $2^k$ 个球,因此需要创造条件再用归纳假设.

**证** $n=1$ 时,2 个球分成堆有 2 种可能:一堆,2 个;二堆,一堆 1 个. 结论显然成立.

今假设 $n=k$ 时结论成立. 即 $2^k$ 个球的任意分成若干堆,总可以通过有限次移动把它们合成一堆. 那么对于 $2^{k+1}$ 个球分成若干堆,注意到总球数是 2 的倍数,依各堆球的个数被 2 除后的余数不同可将球堆分为 2 类:第一类由其所含球数是 2 的倍数的球堆组成;第二类由其所含球数是 2 的倍数加 1 的球堆组成;设第二类共有 $s$ 堆,则我们断言 $s$ 为偶数,否则与总球数是 2 的倍数矛盾.

依下述方式进行:将第二类球堆,2 堆一组分成若干组后,每组的 2 堆之间进行一次移动后它们同时变成第一类球堆. 于是,我们通过有限次移动把所有球堆都变成了第一类,即每堆的球数为偶数. 将每堆中的球 2 个球包在一起作为一个球看待,即得到 $2^k$ 个"包"球,从而可应用归纳假设,故结论成立.

## 习 题 1

1. 设自然数 $n\geqslant 3$,证明可以将一个正三角形划分为 $n$ 个等腰三角形.

2. 证明:对任意正整数 $n\geqslant 3$,都存在一个完全立方数,它可以表示为 $n$ 个正整数的立方.

3. 对怎样的正整数 $n$,集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 能分成5个互不相交的子集,每个子集的元素之和相等.

4. 证明:如果 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\pi\ (0\leqslant A_i\leqslant\pi,\ i=1,2,\cdots,n)$,那么

$$\sin A_1+\sin A_2+\cdots+\sin A_n\leqslant n\sin\frac{\pi}{n}$$

5. 证明:对正整数 $n$,当且仅当 $n$ 是3的倍数时,$1990^n-1$ 才是7的倍数.

6. 已知对任意 $n\in N_+$,有 $a_n>0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\right)^2$,求证:$a_n=n$.

# 2 抽屉原则

抽屉原则也叫鸽笼原理，它是德国数学家狄利克雷首先提出的，因此也叫狄利克雷原理. 抽屉原则是组合数学中的基本原理之一，它是解决存在性问题的理论依据.

## 1. 基本原理

抽屉原则有多种表现形式，基本原理如下：

**定理 1** 把 $n+1$ 个球放入 $n$ 个盒子里，则必有一个盒子至少有两个球.

定理 1 的证明可用反证法. 事实上，若结论不成立，则每个盒子至多装 1 球，从而所有盒子中的球数不超过 $n$，这与盒中放了 $n+1$ 个球矛盾. 为了将定理 1 推广，我们考虑如下问题：设有 $n$ 个盒子，第 1 个盒子希望至少装 $m_1$ 个球，第 2 个盒子希望至少装 $m_2$ 个球，…，第 $n$ 个盒子希望至少装 $m_n$ 个球，这里 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 均为正整数，为了至少满足一个盒子的要求，需要把多少个球分给这 $n$ 个盒子.

显然，若每一个盒子的要求均得不到满足，则第 1 个盒子至多装有 $(m_1-1)$ 个球，第 2 个盒子至多装有 $(m_2-1)$ 个球，…，第 $n$ 个盒子至多装有 $(m_n-1)$ 个球，从而 $n$ 个盒子至多装 $(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_n-1)=m_1+m_2+\cdots+m_n-n$ 个球. 因此若把 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 个球放入这 $n$ 个盒子，则必有一个盒子能实现自己的要求. 这样，我们得到如下原理：

**定理 2** 设 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是正整数，把 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 个球放入 $n$ 个盒子，则存在 $i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，使得第 $i$ 个盒子里至少装有 $m_i$ 个球.

在定理 2 中令 $m_1=m_2=\cdots=m_n=2$，则可得到定理 1，因此定理 2 是定理 1 的推广.

定理 1 与定理 2 都叫抽屉原则，为了解决存在性问题，掌握如下一些结论是必要的.

**定理 3** 把无限集划分成有限个子集，则必有一个子集为无限集.

**定理 4** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数，$A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$