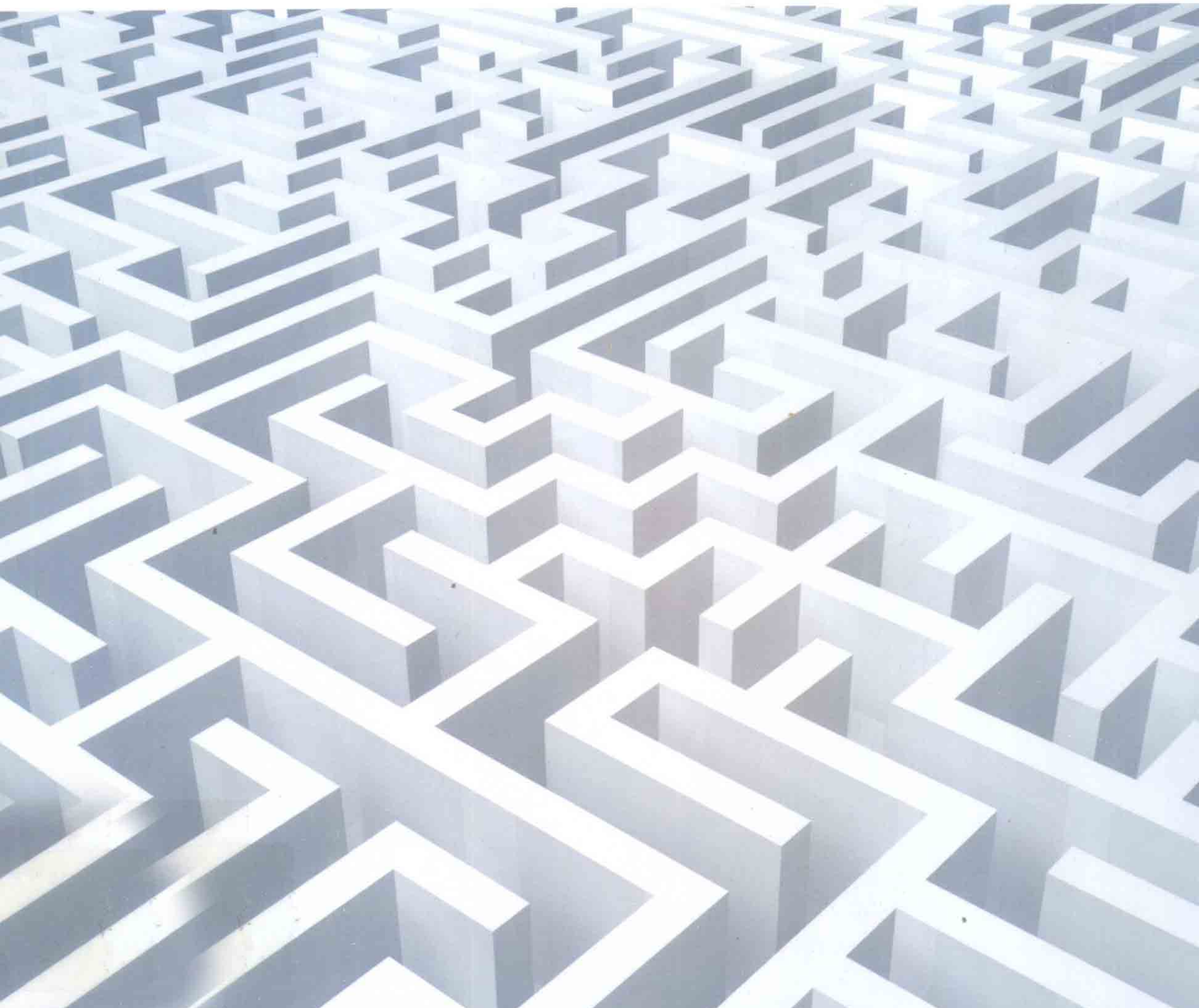
数学思维方法

蒋志萍 汪文贤 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学思维方法

蒋志萍　汪文贤　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维方法 / 蒋志萍　汪文贤著．—杭州：浙江大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-308-08743-8

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①蒋…　②汪…　Ⅲ．①数学—思维方法　Ⅳ．①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 107897 号

数学思维方法

蒋志萍　汪文贤　**著**

责任编辑　吴伟伟
文字编辑　徐　霞
封面设计　十木米
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　浙江时代出版服务有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　14
字　　数　267 千字
版 印 次　2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08743-8
定　　价　30.00 元

序

数学作为研究现实世界数量关系和空间形式的科学，以其高度的抽象性而著称。由于抽象，致使思维对于数学有着特别重要的意义和作用。同时，数学也是培养人的思维能力的重要载体。数学是思维的体操的说法得到许多人的认同，也说明了这一点。因此，开展数学思维方法的研究和教学就显得很有必要。特别的，对于教师教育相关专业，开设数学思维方法课程，一方面能让学生比较系统地接受数学思维方法的教育，另一方面又为他们日后从事中小学数学教学打下良好的数学思维理论和方法的基础。对于非数学专业的学生及非从事数学研究的学者，学习了解一些数学思维的知识，掌握一点数学思维的方法，对提高逻辑推断能力，形成理性思维品质，增强对现实社会现象和自然现象的洞察能力，有着不可替代的作用。

以数学思维方法为主题的书籍和教材出版了不少，各有特点。拿到蒋志萍老师、汪文贤老师撰写的《数学思维方法》，读了后感觉清新扑面，是我所见到的关于数学思维方法的书籍中很有特色的一部书稿。具体表现为以下四个特色：

第一，脉络清晰。绪论和第一章数学思维方法概述是全书的总论部分。绪论可看成数学思维方法的全息元，读后通过具体例子对数学思维方法就有了基本的了解。数学思维方法概述则主要阐述数学思维和数学思维方法的概念，并对数学中最基本的思维方法（分析法和综合法、抽象法和概括法）作了论述，最后给出一个很能体现应用数学思维方法的典型例题——菲波那契数列。第二章到第七章是全书的分论部分，也是本书的主体。六章内容形成如下主线：数学问题—数学猜想—数学合情推理—数学证明—数学公理化—数学建模。这一主线既符合数学学科发展的内在规律，也符合数学学习的基本规律。

第二，例题引路。全书在大部分章节都以典型的例题引出要讨论的内容，使得该书的可读性大大加强，而且其中很多例题都直接来自现行的中小学数学教材，这就有利于学生学习本门课程后，能居高临下地分析理解中小学教材内容。如第一章数学思维方法概述中的第四节数学思维方法应用一例，就以课程教材

研究所编著的、人民教育出版社出版的《义务教育课程标准实验教科书数学二年级下册》第 9 单元中的一道题引出问题，层层递进，不断引向深入，在读者领略数学思维方法之美妙的同时，了解一个事实：即使是小学数学中的一个貌似简单的问题，其背后也许就蕴含着丰富且深厚的知识背景。

第三，重点突出。浏览全书，可以发现本书在选材上并没有面面俱到，而是有侧重地选择内容，对数学思维方法内容进行了新的构架，这从前面对本书的总体线路描述上就可以看出。另外，合情推理是全书的重中之重。第三章数学猜想和第四章数学合情推理就是专门论述数学合情推理的，特别是第四章数学合情推理占有很大篇幅，论述了最基本的几种合情推理：观察和实验、归纳和类比、特殊化和一般化、想象和直觉、估算和统计。这较好地适应了现行中小学数学课程标准对数学合情推理有较高要求这样一种需要。

第四，素材翔实。本书有大量的例题和习题供教学时选用，仅第四章数学合情推理就有 61 个例题和 34 个习题。这些例题和习题既是本书的重要组成部分，也可在教学时根据实际情况选用。

在本书出版之际，写以上数语，是以为序。

徐宪民

2011.4.5

目 录

绪 论

用数学的眼光去观察世界,发现相关问题中蕴含的数学元素,通过考察这些数学元素间的联系,并提出数学问题,再通过一系列的合情推理,提出相应的数学猜想,或提出解决这一数学问题的基本思路,并建立数学模型。对于猜想就有个否定与肯定的问题,否定猜想则需要举出反例,肯定猜想则需要进行逻辑证明。对于数学模型,则有个检验、修正的问题。由此得到的一个个数学知识,要把它们系统化,而这就要使用公理化的方法。事实上,并非只有对数学知识进行系统整理时,才会用到数学的公理化方法。如众所周知的数学证明,就是数学公理化方法的一个缩影。用以上方法来发现数学问题、提出数学问题、分析数学问题并解决数学问题的思维方法,就是最基本的数学思维方法。

以上思想,也许可用以下的四个步骤简洁地表示出来:

首先,如美国数学家哈尔莫斯所说,"问题是数学的心脏",要开展思维,必须由数学问题开始。而一个好的数学问题,可以引出一串数学问题,即形成所谓的问题链。

其次,面对数学问题,人们在思考分析的基础上,通过一系列合情推理的方法,会形成对于该问题结论的某种猜想。

再次,通过合情推理得出的数学猜想未必是正确的,而作为肯定性的数学结论,一般必须通过严密的演绎推理,即通过证明获得数学定理。当然,也可提出否定结论的数学反例。

最后,对于来自实际生活生产中的问题,有时需要的并不是严格的数学定理,而是适用的数学模型。

下面是 3 个具体的例子,通过这 3 个例题,有助于读者进一步理解前面提出的问题。

例 1 设有数列 0,5,0,9,0,13,0,17,…,问:

(1)这个数列的第 20 项是多少?

(2)它的通项公式是什么?

解 设所给数列为$\{a_n\}$,$n\in \mathbf{N}^+$($\mathbf{N}^+$表示正整数集合)。

(1)根据所给数列的前7项,可知该数列可分为两个子数列:

①由奇数项构成的数列,设为$\{a_{n_{2k-1}}\}$,$k\in\mathbf{N}^+$:0,0,0,0,…,这是一个以0为常数的常数数列;

②由偶数项构成的数列,设为$\{a_{n_{2k}}\}$,$k\in\mathbf{N}^+$:5,9,13,17,…,这是一个以4为公差的等差数列。

由于数列$\{a_n\}$的第20项a_{20}即为数列$\{a_{n_{2k}}\}$的第10项,故由等差数列通项公式,可得这一项为41。

(2)由于数列$\{a_n\}$的奇数项是0,而$\frac{1+(-1)^n}{2}$当n为奇数时即为0,当n为偶数时则是1,故可得数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}(2n+1)$。

这一通项公式是正确的。事实上,当n为奇数时,显然有$a_n=0$;当n为偶数时,设$n=2k$,$k\in\mathbf{N}^+=\{$正整数$\}$时,$a_{2k}=\frac{1+(-1)^{2k}}{2}[2(2k)+1]=4k+1$。

由这一问题,你还能想到一个与此有关的问题吗?

问题1:在数列的前面加上1,即得数列:1,0,5,0,9,0,13,0,17,…,这一数列的通项公式是什么?

再考察例1,数列中只有一个0间隔,那么如果其中有两个0间隔呢?

问题2:对于数列0,0,7,0,0,13,0,0,19,…,这一数列的通项公式又是什么?

显然例1的经验现在用不上。因为在例1中构造$\frac{1+(-1)^n}{2}$,一方面是为了得到当n是奇数时,$a_n=0$;另一方面是为了当n是偶数时,$a_n=2n+1$。但本问题由于数列中有两个0间隔,问题变得复杂得多了。但有一点是肯定的,要得到0,−1是很关键的。这使我们联想到两个数的和为−1,如两个$-\frac{1}{2}$的和,$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$与$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$的和,更进一步的就是两个共轭根式的和;于是又联想到了共轭复数$-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$与$-\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$的和。这一联想让我们得到如下启发:前面我们找的1与−1是方程$x^2=1$的两个根,而$x^3=1$的三个复根则是ω、ω^2与ω^3,且$\omega=-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,$\omega^2=-\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,$\omega^3=1$。

这样,我们猜想问题2的通项公式是$a_n=\frac{\omega^n+\omega^{2n}+\omega^{3n}}{3}(2n+1)$。

不难证明这一通项公式是正确的。

事实上，由于数列中的项处于不是 3 的倍数的位置全是 0，而处于 3 的倍数的位置上的数，是以 6 为公差的一个等差数列。因此我们只要证明：

(1)当 n 不是 3 的正整数倍数时，$a_n=0$。

此时显然有 $a_n=\frac{\omega^n(1+\omega^n+\omega^{2n})}{3}(2n+1)=\frac{\omega^n(1-\omega^{3n})}{3(1-\omega^n)}(2n+1)=0$。

(2)当 n 是 3 的正整数倍数时，设 $n=3k$，则 $a_n=6k+1$。

同样显然的是，$a_n=a_{3k}=\frac{\omega^{3k}+\omega^{6k}+\omega^{9k}}{3}(2\times 3k+1)=\frac{1+1+1}{3}(6k+1)=6k+1$。

这就证明了通项公式是正确的。

问题 3：在问题 2 所给出的数列最前面加上数字 1，得数列 1，0，0，7，0，0，13，0，0，19，…，这一数列的通项公式又是什么呢？

于是我们自然会提出如下问题：

问题 4：0，0，0，9，0，0，0，17，0，0，0，25，…，这一数列的通项公式是什么？

由前面的经验，我们猜想这一数列的通项公式是 $a_n=\frac{1+x_1^n+x_2^{2n}+x_3^{3n}}{4}(2n+1)$，其中 1 与 $x_i(i=1,2,3)$ 是方程 $x^4=1$ 的四个复根。

读者可自行证明这一通项公式的正确性。

问题 5：在问题 4 所给出的数列最前面也加上 1，得数列 1，0，0，0，9，0，0，0，17，0，0，0，25，…，它的通项公式是什么？

请读者思考并自行解决。

由不完全归纳法，一般地，我们猜想对于一个其中有 $k-1$ 个 0 间隔的如上所给出的数列，则有：

问题 6：数列 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1},2k+1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1},4k+1,\cdots$，这一数列的通项公式是

$$a_n=\frac{x_1^n+x_2^{2n}+\cdots+x_{k-1}^{(k-1)n}+x_k^{kn}}{k}(2n+1)$$

其中，$x_i(i=1,2,\cdots,k-1,k)$是方程 $x^k=1$ 的 k 个复根。

证明 因为 $x^k=1$ 的 k 个复根为 $x_i=\cos\frac{2j\pi}{k}+i\sin\frac{2j\pi}{k}(j=1,2,\cdots,k-1,k)$。

若令 $x_1=\omega=\cos\frac{2\pi}{k}+i\sin\frac{2\pi}{k}$，则根据复根的性质，有 $x_2=\omega^2,x_3=\omega^3,\cdots,x_{k-1}=\omega^{k-1},x_k=\omega^k=1$。

由于这一数列中，所有处于不是 k 的整数倍的位置上的数全是 0，而所有处于 k 的整数倍的位置上的数则构成一个以 $2k$ 为公差的等差数列，因此我们只要

证明当 n 不是 k 的正整数倍数时，$a_n=0$；而当 n 是 k 的正整数倍数时，不妨设 $n=jk(j=1,2,\cdots)$，则要证明 $a_n=a_{jk}=2jk+1$。

事实上，当 n 不是 k 的整数倍时，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{x_1^n+x_2^{2n}+\cdots+x_{k-1}^{(k-1)n}+x_k^{kn}}{k}(2n+1)\\&=\frac{\omega^n+\omega^{2n}+\cdots+\omega^{(k-1)n}+\omega^{kn}}{k}(2n+1)\\&=\frac{\omega^n(1+\omega^n+\cdots+\omega^{(k-1)n})}{k}(2n+1)\\&=\frac{\omega^n(1-\omega^{kn})}{k(1-\omega^n)}(2n+1)=0\end{aligned}$$

当 $n=jk(j=1,2,\cdots)$时，则

$$\begin{aligned}a_n=a_{jk}&=\frac{\omega^{jk}+\omega^{2jk}+\cdots+\omega^{(k-1)\times jk}+\omega^{k\times jk}}{k}(2jk+1)\\&=\frac{1+1+\cdots+1}{k}(2jk+1)=2jk+1\end{aligned}$$

这就证明了数列的通项公式是 $a_n=\dfrac{x_1^n+x_2^{2n}+\cdots+x_{k-1}^{(k-1)n}+x_k^{kn}}{k}(2n+1)$。

问题 7：数列 $1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1},2k+1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1},4k+1,\cdots$的通项公式是怎样的？

上例告诉我们，由合情推理得出的数学结论，其正确性是要通过严格的演绎推理的。因为经合情推理所得到的数学结论，我们并不能保证其正确性。

例 2　如下图所示，在一条“方形螺线”上依序填上从 41 开始到 140 的自然数。

140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
105	104	103	102	101	100	99	98	97	130
106	77	76	75	74	73	72	71	96	129
107	78	57	56	55	54	53	70	95	128
108	79	58	45	44	43	52	69	94	127
109	80	59	46	41	42	51	68	93	126
110	81	60	47	48	49	50	67	92	125
111	82	61	62	63	64	65	66	91	124
112	83	84	85	86	87	88	89	90	123
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

仔细观察，你会有所发现。数学家乌勒姆就发现如下事实：

处于这个“方形螺线”的左下角到右上角的对角线上的 10 个数，即 41,43,47,53,61,71,83,97,113,131 全是质数。

这一发现令乌勒姆很是惊喜。他扩大这一“方形螺线”，再得到对角线上的 6 个数，即 151,173,197,223,251,281，经验证这 6 个数也是质数。至此，也许我们也会有这样的猜想：进一步扩大这一“方形螺线”，在相应的这一对角线上的数全是质数。

既然是猜想，那么有可能是正确的，同样也有可能是错误的。当然我们希望它最好是正确的。因为如果正确，那将是一个伟大的发现。因为我们可以通过画这一“方形螺线”，而随时得出一个足够大的质数来。而由于只要有足够的时间，画图总是可以进行的，这就意味着我们随时能找出比已知的大质数更大的质数来。虽然画图并不方便，但如果利用计算机的话，那么这就变得轻而易举。

同时，我们更希望这些质数之间存在某种规律，并找出其中的规律来，也就是说希望能找到一个表示其中规律的数学公式。

考察数列：41，43，47，53，61，71，83，97，113，131，151，173，197，223，251,281。

不难发现，从第二项起，后一项与前一项之差构成的数列是一个公差为 2 的等差数列：2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30。

这就说明，原数列是一个二阶等差数列。于是，可得原数列的通项公式为

$$a_n=n^2-n+41\ (n=1,2,\cdots,16)$$

不难验证由归纳法而得到的这一公式，对于这一“方形螺线”对角线上的 16 个数都是正确的。也容易验证，对于 $n=17,18,19,20,\cdots$，这一公式也是正确的。这一结果更增强了我们对这一公式对于后续项而言也是正确的信心。但我们还是不能说这一公式对 $n\geqslant41$ 都正确。因为我们并没有证明它。

而事实上，不难看出，当 $n=41$ 时，这一公式并不表示质数，而是一个合数。因为 $a_{41}=41^2-41+41=41^2$ 是合数。

这一反例的出现，宣告我们的猜想是错误的。

在数学中，以上两例所表示的思想具有一般性，即对于除公理以外的数学命题，要说它是正确的，必须加以证明；要说它是错误的，必须举出反例。这就是纯数学的本质特征。

而对于数学应用于解决现实生活、生产中出现的许多问题，我们更多地关注问题的解决，在解决实际问题的过程中肯定它的作用，或否定它的作用；而不是通过证明来肯定它，或通过举反例来否定它。这就是应用数学的本质特征。

例 3 据统计，每年由于汽车超速行驶而造成的交通事故是造成公路伤亡事故的主要原因之一。行驶中的汽车，在刹车后由于惯性的原因，还是要继续向

前滑行一段距离才能停住，这段距离称为“刹车距离”。为了测定某种型号汽车的刹车性能（车速不超出 140 千米/时），对这种汽车的刹车距离进行测试，测得数据如下表所示：

刹车时车速（千米/时）	0	5	10	15	20	25	30
刹车距离（米）	0	0.1	0.3	0.6	1.0	1.5	2.1

现有一辆该型号的汽车在国道上发生了交通事故，交警现场测得刹车距离为 46.5 米。面对这一事故，你会思考哪些问题？

也许对绝大多数人来说，这仅仅是个交通事故问题。这在现实生活中经常会遇到，事故有交警处理，还有什么问题啊？但对于一个学习数学的人来说，运用数学的眼光去看待这一交通事故问题，就有以下问题要回答：

（1）刹车时的车速是多少？

（2）在事故发生时，汽车是否超速行驶？

而这也是交警要回答的问题，因为这对于交警处理事故是重要的数据。

解决这一问题的基本思想，是建立数学模型。而建立数学模型，就是要根据已知的数据，寻找数据间蕴含的数学关系。

刹车时车速的变化引起刹车距离的变化，不同的刹车车速引起的刹车距离是不同的，且随着刹车时车速的增加刹车距离也随之增加，这些关系告诉我们刹车距离与刹车时车速之间具有一种递增的函数关系。

那么，这是一种什么样的函数关系呢？设刹车时的车速为 x，刹车距离为 y，则 $y=f(x)$。为了发现两者之间的函数关系，就需要利用好已知的数据。如何利用这些数据呢？既然是函数，不妨利用图像，化抽象为直观，探索其中的关系。

在直角坐标系中，通过描点，不难发现，图像呈开口向上的半支抛物线形状。于是我们猜想这是一个二次函数，设这个二次函数为

$$y=ax^2+bx+c(a>0),x\geqslant 0$$

由待定系数法，取三对坐标(0,0)，(10,0.3)和(20,1.0)，代入上式可求得

$$y=0.002x^2+0.01x$$

$y=0.002x^2+0.01x$ 就是我们所求得的数学模型。

那么，这个模型符不符合实际情况呢？通过对已知的另外 4 对数据的验证，不难发现，这些数据都是符合这一模型的。

由于现场交警测得的刹车距离是 46.5 米，于是有

$$46.5=0.02x^2+0.01x$$

解这个一元二次方程，根据 x 的取值范围，即问题的实际，可得 $x=150$。

这表明刹车时的车速为 150 千米/时，大于 140 千米/时，即汽车在发生事故时处于超速行驶中。

以上过程就是一个数学建模的过程，即将实际问题转化为数学问题，通过解决这一数学问题而解决实际问题的过程。

从以上3个例子中我们可以发现，数学思维和数学思维方法除了具有一般思维及其方法的共性外，还有其特殊的个性。作为数学思维方法课程来说，首先就得对数学思维和数学思维方法有个大致的了解，这就是本书的第一章数学思维方法概述的主要内容。

“问题是数学的心脏”，美国数学家哈尔莫斯如是说。没有问题就不会有数学，问题调动、激发我们的思维。数学问题在数学和数学思维中具有首要性，因此我们应该对数学问题有个比较详细的了解。这就是本书第二章数学问题的内容。

对于发现和提出的数学问题，通过合情推理，就可能提出相关数学猜想。数学猜想与其说是数学结论，更不如说是一种数学问题。但数学猜想比一般的数学问题有着更积极的意义，因为它具有明显的指向性。所以，数学猜想对于数学和数学思维方法来说，都是极其重要的。这就是本书的第三章数学猜想。

那么，如何从一般的数学问题中获得数学猜想呢？以上3例告诉我们，合情推理方法是获取数学猜想的基本方法。观察和实验、归纳和类比、一般化和特殊化、联想和直觉等，都是常用的合情推理的基本方法。合情推理以前在中小学教学中并未受到应有的重视，为此它成为本书的一个重点内容，即第四章数学合情推理。

合情推理虽然对于发现数学猜想具有重要作用，但由合情推理得到的数学猜想，毕竟是猜想。而猜想的正确性，则有待于严密的数学证明。于是本书专设第五章数学证明，着重讨论关于数学证明的有关内容。

通过证明得到的数学结论，那就是数学定理。数学的结论性知识，基本上以定义、公理和定理的形式来表达。但这些定义、公理和定理都是数学中的一个个知识点，要把这些知识点串联起来，形成一个知识系统，在数学中有一种特殊的方法，那就是公理化方法。这就是本书的第六章公理化方法的内容。这是数学特有的思维方法。

前面例3体现的是数学建模的思想方法，这种方法越来越受到重视，因为这是运用数学解决实际问题的有效方法。事实上，所谓数学建模就是建立起有关实际问题的相应数学模型，通过对数学模型的研究，达到解决实际问题的目的。因而，数学建模实际上是一个运用数学思维方法解决问题的过程。关于数学建模的基本思想方法将在本书第七章数学建模中作简要介绍。

综上所述，本书研究数学思维中的基本思维方法。全书分为两大部分：第一部分是总论，包括绪论和第一章数学思维方法概述；第二部分是全书的主体，包括第二章数学问题、第三章数学猜想、第四章数学合情推理、第五章数学证明、第六章公理化方法和第七章数学建模。

第一章
数学思维方法概述

人们常说，数学是思维的体操。此话表明数学对于培养人的思维能力有其独特的优势，因为数学的严密逻辑性，是别的学科难以替代的。正如培根所说，“数学使人严谨”。“数学思考”是《全日制义务教育数学课程标准(修改稿)》总体目标的四个方面中的其中一个方面，明确要求要发展学生的“形象思维和抽象思维”，“发展合情推理和演绎推理能力”，“体会数学的基本思想和思维方式”。

分析法和综合法、抽象法和概括法是数学思维方法最基本的方法，因此，本章除讨论数学思维和数学思维方法的含义和性质外，还讨论分析法和综合法、抽象法和概括法，最后以一个丰富的例子来体现数学思维及其方法的具体应用。

第一节　数学思维概述

什么是数学思维？数学思维有什么性质？数学思维的基本方法是什么？这是本节要讨论的主要问题。

一、数学思维的概念

什么是数学思维？从逻辑上说，首先，数学思维也是思维，即数学思维从属于一般的思维。因此与一般思维相同，数学思维也有自己思维的对象。数学思维的对象从大处讲，就是现实世界的数量关系、空间形式和抽象结构等；往小处说，就是数学的问题，如某个数学概念的本质属性是什么，某几个数学知识之间具有什么样的关系，要解决某个数学问题要用到哪些数学知识，如此等等。数学思维也必然具有一般思维所具有的共性，如数学思维也具有间接性、概括性和语言性，并且一般思维的一些基本方法和模式也适用于数学思维，等等。同时，数学思维也具有与一般思维所不同的个性。比如，语言是思维的外壳，因此，数学思维要用一定的语言来进行.这是共性。但众所周知，数学有自己独一无二的语

言系统，这个语言系统是数学思维的重要工具，这就是数学思维语言的特殊性。

其次，数学思维是一种科学思维，数学思维是数学科学与思维科学高度融合的产物。数学思维是关于数学对象的理性认识过程。所谓科学思维，是指人们认识自然、社会和人类的本质和客观规律性的思维。这是一种旨在求得建立在科学事实基础上、符合普遍自然规律的科学的思考方法和思维模式。而数学思维就是为了帮助人们认识自然、社会和人类中客观存在的数量关系、空间形式和抽象结构等方面的本质属性和内在规律性的这样一种科学思维。它具有一般科学思维的性质、方法和模式，如观察和实验、归纳和类比、特殊化和一般化的方法及其模式等；同时，它又具有自身特殊的思维方法和模式，如公理化的方法及其模式、数学归纳法的方法及其模式等。

根据以上分析，我们就可以将思维的定义应用到数学思维中来，从而得出关于数学思维的定义：

数学思维是人脑以数学为对象，并借助数学语言以抽象和概括为工具，对客观事物的数学结构和模型的间接概括的反映。简言之，数学思维是人脑对数学的一种间接概括的反映。

从心理学的角度，还可这样定义数学思维：

所谓数学思维，是指人脑对现实世界客观事物在数量关系、空间形式和抽象结构等方面的本质属性和内在规律性的反映。

数学思维一方面既从属于一般思维，又从属于科学思维；另一方面数学思维不仅有自己的思维对象，还有自己的语言，也有自己的特点、方法和模式。因此，从数学角度上，我们可以这样说：所谓数学思维，就是以自然、社会和人类自身客观存在的数量关系、空间形式和抽象结构为思维对象，以数学语言和符号为思维载体，以认识和发现数学规律为目的的思维。同一律和相似律是数学思维的基本规律。

从科学认识角度上去考虑，由于数学思维的问题性和解决问题的目的性，因此所谓数学思维，就是以数学问题为载体，通过发现问题、解决问题的形式，达到对现实世界数量关系和空间形式、抽象结构的本质的一般性的认识的一种思维。

总之，数学思维是数学活动中的思维，它具有一般思维的基本特征，但又有自己的个性，具有自己的特殊性。这种特殊性主要表现在思维活动的运演方面，它是按照客观存在的数学规律的表现方式进行的，即具有数学思维的特点和操作方式。因此，研究数学思维，除了要与具体的数学思维活动紧密结合起来，还有就是不能离开一般的思维规律，更不能停留于一般的思维，而要在把握一般思维共性的基础上，进一步揭示数学思维的特殊性。

数学学习的全过程是充满着思维的过程，思维是数学认知的核心，它决定着

数学学习的活动。因此，研究数学思维及其方法，对于更好地开展数学研究和教学都有极大的帮助。

二、数学思维的性质

数学思维具有以下性质：问题首要性、论证演绎性、语言独特性、高度抽象性和系统综合性。

（一）问题首要性

数学思维的问题首要性，包含以下三层含义：

(1)数学思维首先是由数学问题引起的。这就是说，数学思维与其他思维一样，问题是引起思维的导火线，没有问题便没有思维。所有的数学思维都是由数学问题引起的。事实上，数学的起源和发展就是由数学问题引起的，问题性是数学思维目的性的体现。这就是首要性的“首”吧。

(2)数学问题在数学思维中的特殊重要性。虽然，一切思维都是由问题引发的，也就是说，问题在一切思维中都具有重要的地位，但在数学思维中，数学问题所起的作用更显重要，数学问题的解决活动是数学思维活动的中心。这就是首要性的“要”了。美国数学家哈尔莫斯认为，问题是数学的心脏。这句名言恰到好处地表明了数学问题在数学思维中的重要性。问题促使了数学的发现和发展。数学思维表现为不断地提出数学问题、分析数学问题和解决数学问题。无论是数学研究还是数学学习，数学思维总是由提出问题开始的，并贯穿于问题解决的始终。数学思维的问题性在数学思维方面所起的作用，比起问题在其他一般思维中更显得明显，具有更重要的地位。可以毫不夸张地说，没有数学问题便没有数学。

(3)问题性在数学思维中的所有性质中是第一重要的。以上两点，第一点说明数学问题在数学思维中的“首”，第二点说明数学问题在数学思维中的“要”，综合起来，即为“首要”了。事实上，由于没有数学问题便没有数学思维，也就没有数学，也谈不上数学思维的性质了。因此，问题性是数学思维性质中第一重要的性质。

值得指出的是，数学解题的思维过程是数学问题的变换过程。数学问题的推广、引申和应用过程是新的数学问题发现和解决的过程，也是数学思维的深化过程和数学知识的发展过程。重视问题的分析、解决、应用、推广是数学思维问题性的精髓所在。

（二）论证演绎性

数学有一个明显不同于其他学科的思维方法，那就是在数学研究中，一切由合情推理所得到的数学结论，只能称作是数学猜想。而猜想的正确性，必须在进