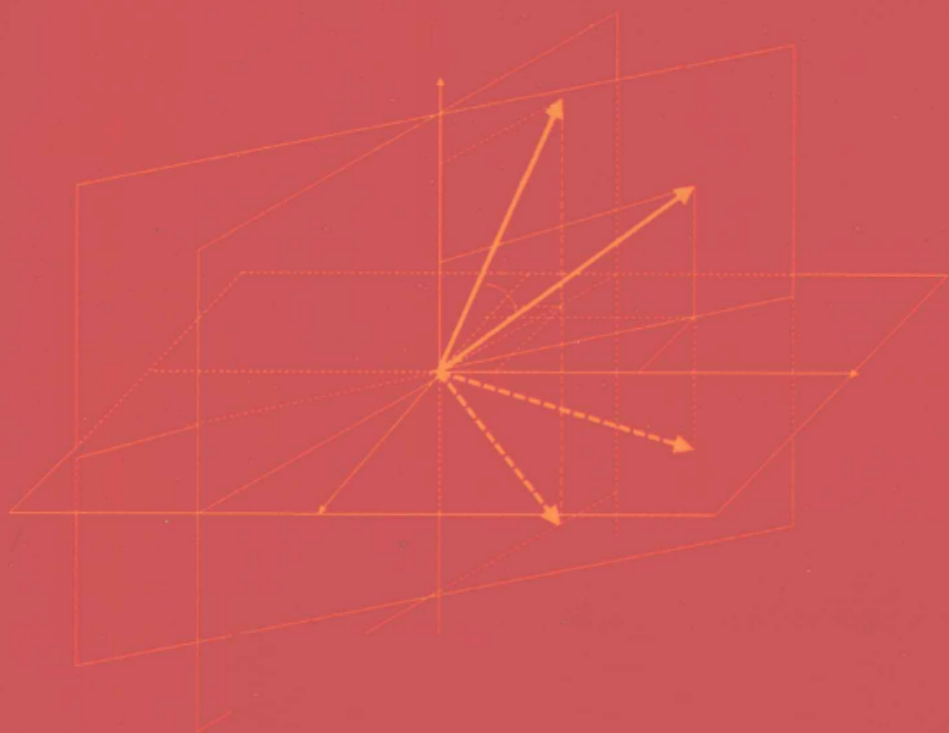


# 机器人几何代数 模型与控制

郝矿荣 丁永生 著



科学出版社

(TP-5184.0101)

# 机器人几何代数 模型与控制

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

ISBN 978-7-03-030380-6



工程技术分社

联系电话: 010-64034617

E-mail: [gcjs@mail.sciencep.com](mailto:gcjs@mail.sciencep.com)

销售分类建议: 机器人/机械/自动化

定价: 70.00 元

# 机器人几何代数模型与控制

郝矿荣 丁永生 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书以作者的研究成果为依托,讲述了向量空间、李代数以及对偶数环上的旋量理论等数学工具在机器人运动学中的应用。全书包含了李代数基本理论、机构运动学以及机构运动平台的视觉检测和控制三个部分。

全书共分12章。第1章为绪论;第2章对向量空间等基本概念进行回顾;第3~5章为李代数和对称数环的基本理论,介绍了李代数、对称数、李括号和对称内积的几何意义以及他们之间的关系;第6~9章给出了对称数环上的旋量场在机构运动学中的应用;第10~12章为本书的应用部分,给出了机器人运动平台的几何不变量检测方法,并进一步与智能算法相结合对机器人的动力学视觉伺服控制进行了探讨。

本书所提出的方法虽然以并联机器人模型为基础,但也可以应用于串联机器人,而且旋量场在对称数环上的相关性的研究可以应用到当前较为热门的机构构型综合中。本书给出的机构学解析解表达形式新颖,为后续的机器人检测控制奠定了基础。最后,本书还给出了机器人的智能检测和智能控制方法。

本书可作为研究生教材或相关专业本科教材,也可作为相关科研人员与工程技术人员的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

机器人几何代数模型与控制 / 郝矿荣,丁永生著. —北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-030380-6

I. ①机… II. ①郝…②丁… III. ①机器人-数学模型-研究②机器人控制-研究 IV. ①TP24

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第030380号

责任编辑:耿建业 迟 慧 / 责任校对:包志虹

责任印制:赵 博 / 封面设计:耕 者

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2011年3月第一版 开本:B5(720×1000)

2011年3月第一次印刷 印张:22 3/4

印数:1—3 000 字数:444 000

定价:70.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

自从 1978 年 Hervé 提出机构关节的运动可以由李群表示,便拉开了李理论在机器人机构学中应用研究的序幕。在这之前的 Ball 关于旋量理论的研究,以及可以追溯到始于 19 世纪上半叶的代数几何的研究,为李群在机器人技术中的应用奠定了坚实的基础。早期以李群和李代数为理论工具对机器人的研究大致分为两个方向,即以 Hervé 为代表的面向机器人的应用研究和以 Karger, Chevallier 为代表的面向机构内在机理的理论研究。显然前者的研究更多地被后来的机器人技术研究者所接受,其主要成果包括刚体位移的李群分类和机构构型,进而可以设计出新型的复杂机构。而后的研究成果体现在分析探讨机构的内在特性和机理,包括机构奇异位形的数学研究等内容。随着信息技术的发展,以李群和李代数为理论工具对机器人进行的研究受到了更多学者的关注,给机器人技术的发展带来了更多的机遇,也提出了更具挑战性的任务,从而使这些理论成果得以在新的形势下去完成新的任务。

本书作者多年来对两类成果进行了深入分析和研究,内容包括:基于李群和李代数语言的机器人机构的运动描述,李代数、对偶数在机构运动学中的应用方法,闭环机构的李代数二阶表示方法,并提出了机构奇异位形横向性准则。确定了基于对偶数的机构奇异位形的李代数表示方法和机构分类,同时验证了机构奇异位形的横向性准则,还提出了基于旋量场和对偶数理论的 6R 串联机器人逆解的一般求解方法。这种方法从微分几何仿射空间出发,计算简练,揭示了机构的内在特性。最后,我们将上述研究成果应用于机器人控制和机器人视觉伺服控制,使得这些看似深奥的理论能够为机器人控制提供一种新的途径。

全书共分 12 章。第 1 章介绍了几何代数方法在机器人控制中的作用。第 2 章对仿射空间等向量空间的概念进行了回顾。第 3~4 章讨论了几何代数的基本理论,包括代数结构的位移表示以及对偶数环和代数空间等数学工具对空间几何关系的基本表达。第 5 章对旋量场在对偶数环上的线性相关性进行讨论,并给出了对偶数环上机构的子李代数、子李群以及相应的机构实例。第 6 章讨论了刚体运动的李代数表示,机构运动学模型闭环运动方程及其一、二阶导数。第 7 章将雅可比矩阵与横向性准则结合,对机构的奇异位形进行分析。第 8 章给出了广义对偶欧拉角的定义。第 9 章讨论了基于广义对偶欧拉角的并联机构的解析解。第 10~11 章讨论了并联机构运动平台的位姿视觉检测。第 12 章提出了机器人运动平台的视觉伺服控制方法。

本书的部分基础工作是郝矿荣教授在法国国立路桥工程师大学(Ecole Nationale des Ponts et Chaussées)攻读博士学位时完成的,期间得到了Chevallier教授和Lerbet教授的悉心指导,为本书奠定了扎实的理论基础,并与巴黎中央工程师大学(Ecole Centrale Paris)的Hervé教授建立了长期的合作研究。在此对三位教授对本书的指导和帮助表示由衷的谢意。作者在与上海交通大学高峰教授的合作中受益颇多,对本书的出版很有帮助,特此,对高峰教授表示诚挚的感谢。

本书的成果还得到了国家自然科学基金(60775052)、国家自然科学基金重点项目(60534020)、国家863航天领域706重大专项子课题(863-706-19)、上海市基础研究重点项目(JC1400900)和教育部留学回国科研基金项目的支持,在此一并表示感谢。

感谢东华大学信息科学与技术学院和数字化纺织服装技术教育部工程研究中心对本书写作和出版的支持。

本书由郝矿荣进行体系结构和主要内容的规划。第1~9章、第12章由郝矿荣完成,第10章由丁永生和郝矿荣共同完成;第11章由丁永生完成。期间得到了研究生张淑平、邝宏武、吴笛飞、林志贵、陈建林、吴勇、赵睿、黄环、高霖龙、许海洋、王海涛、郭崇滨、窦易文、黄新、曹自洋、翟雪琴、朱玉蓉、孟飞、葛建兵、张建平等的帮助与支持,在此表示感谢。

本书内容涉及多个学科前沿,知识面广,由于作者学识有限,书中难免存在不妥之处,恳请广大同行、读者给予批评指正。

作者  
2011年3月

## 符号说明

符号	说明	符号	说明
$A, B$	位移, $\mathcal{D}$ 的元素	$M_{\text{II}}$	II 型奇异位姿集合
ad	$\mathcal{D}$ 的伴随映射	$M_{\text{I}}$	I 型奇异位姿集合
Ad	$D$ 的伴随映射	$M^s$	$S$ 的奇异位姿集合, $M$ 的子集
$A_J$	$f(q)$ 相对于 $q_{\text{in}}$ 的雅可比矩阵	$M$	$S$ 的运动学许可位姿集合
$B_{\Delta}$	$\mathcal{D}$ 在 $\Delta$ 上的一个基 $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$	$m$	系统 $S$ 中刚体的数量
$B_J$	$f(q)$ 相对于 $q_{\text{out}}$ 的雅可比矩阵	$n$	系统 $S$ 的自由度
$C_i^r$	向量场 $\mu_i$ 相对于基 $\mu_a$ 的坐标	$q^r$	系统 $S$ 的输入 $\{q_1^r, \dots, q_n^r\}$
$C_k$	系统 $S$ 中第 $k$ 个刚体	$Q^r$	相对于输入的中间变量函数
$d_k$	系统 $S$ 中第 $k$ 个运动副平移参数	$q^i$	系统 $S$ 的中间量 $\{q_1^i, \dots, q_{m-2n}^i\}$
$D$	位移群, 它是李群	$q_k$	系统 $S$ 中第 $k$ 个运动副旋转参数
$d$	系统 $S$ 运动副平移参数坐标	$Q_{\text{out}}$	输出和中间变量函数
$e$	位移群 $\mathcal{D}$ 的单位元素	$q_{\text{out}}$	系统 $S$ 的输出 $\{q_{\text{out}}^1, \dots, q_{\text{out}}^n\}$
$F$	闭合函数的 $\mathcal{D}$ 上的伴随映射形式	$q$	系统 $S$ 运动副旋转参数坐标
$f$	闭环运动函数	$R$	$L(\mathcal{D})$ 的元素, 螺旋位移
$i, j$	$\mu$ 中基 $\mu_a$ 以外的元素下标	$\mathbb{R}_q$	$f'(q)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 的核
$J$	闭环运动函数 $f(q)$ 的雅可比矩阵	$\mathbb{R}_s$	$\mathbb{R}_q$ 在 $\mathbb{R}^m$ 内的补
$L(\mathcal{D})$	$\mathcal{D}$ 的伴随映射集合	$\mathbb{R}$	实数集合
$L_{\mathbb{R}}$	$\chi$ 在 $\mathbb{R}$ 上一个基 $\{X_{\beta}\}_{\beta=1, \dots, r}$	$r$	$\mu$ 中在 $\mathbb{R}$ 上线性无关向量个数
$L_{\Delta}$	$\chi$ 的最大自由列 $\{X_{\alpha}\}_{\alpha=1, \dots, r_{\Delta}}$	$s$	$\mathfrak{S}_a$ 的维数
$M_{\text{III}}$	III 型奇异位姿集合	$S_m$	由刚体组成的机构系统
		$X, Y, Z$	向量场, $\mathcal{D}$ 的元素
		$X_i$	满足 $X_i \in \chi$ , 但 $X_i \notin L_{\Delta} \cup L_{\mathbb{R}}$
		$z_i^{q_0}$	$\hat{z}_i^r$ 的对偶部

符号	说明	符号	说明
$\hat{z}_i^q$	$X_i$ 相对于基 $B_\Delta$ 坐标的对偶坐标	$\mathcal{D}$	从属于 $\mathcal{D}$ 的李代数
$z_i^q$	$\hat{z}_i^q$ 的实部	$\mathfrak{F}_q$	由 $\mu$ 生成的向量空间
$\alpha, \beta$	$\mathfrak{F}_q$ 内元素的下标	$\mathcal{G}_q$	$\mathfrak{F}_q$ 在 $\mathcal{S}_a$ 内的补
$\mu_a$	$\mathfrak{F}_q$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个基	$l_k$	系统 $S$ 中第 $k$ 个运动副
$\{\mu_a, \mu\}_{a, \nu}$	$\mathcal{S}_a$ 的一个基	$\mathcal{S}_a$	$\mathfrak{F}_q$ 生成的子李代数
$\mu$	$S$ 的向量场集合	$\mathcal{L}_s$	对称算子集合
$\mu_k$	从属于 $\xi_k$ 的向量场, 属于 $\mathcal{D}$	$\mathcal{L}_a$	反对称算子集合
$\nu$	$\mathcal{S}_a/\mathfrak{F}_q$ 的下标	$\mathcal{L}^u$	$X_i$ 相对于基 $B_\Delta$ 的对偶坐标矩阵
$\xi_k$	$S$ 中第 $k$ 个位移生成算子, 属于 $\mathcal{D}$	$\mathcal{L}^o$	$\hat{\mathcal{L}}$ 的对偶部矩阵
$\{\xi, \eta, \zeta\}$	$\mathcal{D}$ 在 $\Delta$ 上的一个基	$\mathcal{L}$	$\hat{\mathcal{L}}$ 的实部矩阵
$\epsilon$	单位对偶数	$[\cdot, \cdot]$	$\mathcal{D}$ 的李括号
$\Delta$	对偶数集合	$\{\cdot, \cdot\}$	$\mathcal{D}$ 的对偶内积, 其值属于 $\Delta$
$\chi$	反对称向量场集合 $\{X_1, \dots, X_m\}$	$(\cdot, \cdot)$	Killing 内积
$\mathcal{G}^i$	$i$ 阶李括号生成的向量场集合	$[\cdot] \cdot [\cdot]$	Klein 内积



# 目 录

前言

符号说明

第 1 章 绪论	1
1.1 机构几何代数模型与机器人控制概述	1
1.1.1 几何代数和机构学的数学方法	1
1.1.2 机器人机构的设计	3
1.1.3 机构运动学分析	4
1.1.4 机器人运动控制研究现状	6
1.2 几何代数方法在机器人发展中的作用	13
1.2.1 新型解耦机构构型和机器人自主化设计研究	13
1.2.2 机器人多元感知与多信息融合	15
1.2.3 机器人自主化对控制方法的需求	16
1.2.4 几何代数方法在机器人发展中的作用	17
1.3 本书概述	18
1.3.1 李代数和对偶数方法研究	19
1.3.2 基于对偶数的反对称向量场计算	20
1.3.3 并联机构的闭环运动方程研究	20
1.3.4 并联机构的解析解	21
1.3.5 机器人视觉检测的几何方法	23
1.3.6 机器人视觉伺服控制	24
1.4 小结	25
第 2 章 仿射空间与仿射变换	26
2.1 仿射空间(affine space)	26
2.1.1 二维和三维正交算子	27
2.1.2 仿射空间定义两种形式	29
2.2 仿射变换和仿射群	30
2.3 等距和位移	33
2.4 小结	36
第 3 章 代数结构的位移表示	37
3.1 仿射空间向量场	37

3.1.1	反对称向量场的定义 .....	37
3.1.2	旋量与仿射空间向量场 .....	40
3.2	李代数的代数算子 .....	41
3.2.1	李群在李代数上的运算 .....	41
3.2.2	李括号 .....	42
3.2.3	Klein 内积 .....	44
3.2.4	偶数算子和 Killing 内积 .....	45
3.2.5	$\mathbb{D}$ 上的双线性不变量的确定 .....	46
3.3	李括号和 Klein 内积的几何意义 .....	49
3.4	向量空间上的自然基 .....	51
3.5	刚体运动学与代数结构 $\mathbb{D}$ 的关系 .....	52
3.6	刚体运动学中的一般性质补充 .....	56
3.7	小结 .....	61
<b>第 4 章</b>	<b>对偶数环和代数空间 .....</b>	<b>63</b>
4.1	对偶数和实数函数的关系 .....	63
4.2	对偶数的数学定义 .....	65
4.2.1	基于二维代数的对偶数环定义 .....	65
4.2.2	基于多项式的对偶数环定义 .....	66
4.2.3	对偶数环的线性算子定义 .....	66
4.3	对偶数模在李代数上的结构 .....	67
4.3.1	李代数的对偶数内积和混合积 .....	68
4.3.2	几何意义 .....	70
4.3.3	代数结构上的线性无关性 .....	71
4.4	代数结构的正交群及其意义 .....	77
4.4.1	正交群和特殊正交群 .....	78
4.4.2	等距群及其在 $\mathbb{D}$ 上的应用 .....	79
4.4.3	Rodrigues 一般化公式 .....	80
4.4.4	位移的矩阵表示 .....	83
4.4.5	对偶四元数和位移的对偶四元数表示 .....	84
4.4.6	位移的对偶四元数与矩阵表示的关系 .....	87
4.5	实向量空间在模 $\Delta$ 上的对偶化运算 .....	89
4.5.1	$\Delta$ 模的性质 .....	89
4.5.2	$\Delta$ 模代数 $\mathbb{D}$ 和 $\hat{E}$ 的关系 .....	91
4.6	小结 .....	93

<b>第 5 章 对偶数环上李代数的线性相关性</b> .....	94
5.1 在 $\Delta$ 上的基的定义 .....	94
5.2 在 $\Delta$ 上的基的变换 .....	97
5.3 反对称场集合的秩 .....	98
5.4 基于反对称场集合的最大自由列研究 .....	102
5.4.1 $r_{\Delta} = 3$ .....	104
5.4.2 $r_{\Delta} = 2$ .....	108
5.4.3 $r_{\Delta} = 1$ .....	112
5.4.4 $r_{\Delta} = 0$ .....	116
5.5 子李群的生成 .....	117
5.6 小结 .....	121
<b>第 6 章 刚体运动的李代数表示</b> .....	122
6.1 运动副的概念 .....	122
6.1.1 运动副和自由度 .....	122
6.1.2 单参数子群的位移表示 .....	123
6.1.3 运动链和子李群的分类 .....	123
6.2 并联机构的描述 .....	124
6.2.1 并联机构的闭环运动方程 .....	125
6.2.2 闭环方程的可微性 .....	126
6.2.3 闭环方程的性质 .....	127
6.2.4 $f'(q)$ 的局部研究 .....	130
6.2.5 二阶导数 .....	131
6.2.6 非奇异机构 .....	134
6.2.7 平面机构 .....	135
6.3 大于 2 阶的闭环运动方程 .....	140
6.4 小结 .....	142
<b>第 7 章 并联机构的奇异性分析</b> .....	143
7.1 级集 $S^{m-r}(f)$ 的性质和在机构分析中的应用 .....	143
7.1.1 子流形的定义 .....	143
7.1.2 级集 $S^{m-r}(f)$ 的性质 .....	145
7.1.3 子流形的切空间 .....	147
7.1.4 横向性准则和级集 $S^{m-r}(f)$ 研究 .....	148
7.2 空间 6R 并联机构的研究 .....	152
7.2.1 Wohlhart 空间 6R 机构 .....	152
7.2.2 横向性准则的应用 .....	154

7.3	并联机构奇异位形的分类 .....	156
7.3.1	I型奇异位形 .....	157
7.3.2	II型奇异位形 .....	157
7.3.3	III型奇异位形 .....	158
7.4	实例 .....	158
7.4.1	平面平行四杆机构 .....	158
7.4.2	Bricard 闭环机构 .....	162
7.4.3	Bennett 运动链 .....	165
7.4.4	空间正交球形机构 .....	168
7.4.5	星形并联机构 .....	171
7.4.6	R-CUBE 并联机构 .....	173
7.5	小结 .....	175
<b>第8章</b>	<b>广义对偶欧拉角</b> .....	<b>177</b>
8.1	闭环运动链位移的描述 .....	177
8.2	平面螺旋机构 .....	181
8.3	螺旋位移 .....	192
8.4	两个螺旋位移的积 .....	195
8.5	广义对偶欧拉角 .....	199
8.5.1	任一位移分解成广义对偶欧拉角的条件 .....	200
8.5.2	$\theta, \phi$ 和 $\psi$ 的解析解 .....	202
8.5.3	合位移 .....	203
8.5.4	奇异位形分析 .....	204
8.5.5	布里安特角 .....	210
8.5.6	对偶欧拉角 .....	211
8.6	小结 .....	213
<b>第9章</b>	<b>并联机构的解析解</b> .....	<b>214</b>
9.1	不变群和标量积 .....	214
9.2	并联机构闭环方程求解 .....	215
9.2.1	$q_1$ 和 $q_3$ 的解析表示 .....	215
9.2.2	$q_2$ 和 $q_4$ 的解析表示 .....	217
9.2.3	解析解和闭环运动方程的等价性 .....	219
9.3	基于 D-H 参数的并联机构解析解 .....	220
9.4	空间四杆机构的分析 .....	224
9.4.1	Bennett 机构的分析 .....	224
9.4.2	球形机构 .....	228

---

9.5	空间 6DOF 机构——Bricard 机构	231
9.6	6R 机构的代数解	233
9.7	小结	238
<b>第 10 章</b>	<b>机器人运动平台位姿立体视觉检测</b>	<b>239</b>
10.1	并联机器人位姿立体视觉检测的矩形不变量方法	241
10.1.1	空间仿射变换与矩形不变量描述	241
10.1.2	基于矩形不变量的并联机构位姿估计算法设计	244
10.1.3	运动目标的姿态估计	246
10.1.4	实验结果与分析	249
10.2	基于点相关的并联机构迭代位姿估计	254
10.2.1	基于点相关位姿估计算法的位姿描述	254
10.2.2	算法设计与约束方程	255
10.2.3	实验结果与分析	256
10.3	基于双目立体视觉的运动平台位姿检测算法设计	263
10.3.1	双目立体视觉原理及成像模型	263
10.3.2	基于双目立体视觉的运动平台位姿检测算法设计	264
10.3.3	实验结果与讨论	272
10.4	基于尺度不变量的并联机器人位姿立体视觉检测系统	276
10.4.1	基于 SIFT 的并联机器人位姿立体视觉检测系统框架	276
10.4.2	基于 SIFT 的立体匹配算法	276
10.4.3	并联机器人位姿立体视觉检测的几何方法	278
10.4.4	系统实现与仿真结果	281
10.5	小结	283
<b>第 11 章</b>	<b>基于免疫进化算法的并联机构位姿确定方法</b>	<b>285</b>
11.1	引言	285
11.2	免疫进化算法简述	286
11.2.1	免疫进化算法的生物学基础	286
11.2.2	免疫进化算法描述	287
11.3	基于免疫进化的位姿计算方法设计	288
11.3.1	并联机构位姿估计问题描述	288
11.3.2	免疫进化算法设计	289
11.3.3	算法改进	292
11.3.4	算法特性	294
11.4	实验结果与讨论	294
11.4.1	模型点的不同配置对位姿估计的影响	294

11.4.2	与基于遗传算法的位姿确定方法的性能比较 .....	297
11.4.3	利用视频图像序列来检测目标运动位姿 .....	300
11.5	小结 .....	302
<b>第 12 章</b>	<b>机器人视觉伺服控制及优化 .....</b>	<b>303</b>
12.1	机器人的动力学控制模型 .....	304
12.1.1	机器人单元模块的分析 .....	304
12.1.2	六自由度机器人的控制模型 .....	309
12.2	基于视觉伺服的运动目标捕捉技术 .....	312
12.2.1	视觉伺服控制系统结构 .....	313
12.2.2	视觉伺服控制方法 .....	314
12.2.3	基于时间最优的运动目标捕捉 .....	316
12.2.4	实验结果 .....	323
12.3	动力学视觉伺服控制及其优化 .....	326
12.3.1	视觉阻抗和视觉反馈信息处理 .....	327
12.3.2	动力学视觉伺服系统的实现 .....	330
12.3.3	仿真实验 .....	334
12.4	小结 .....	336
<b>参考文献</b>	.....	<b>338</b>

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 机构几何代数模型与机器人控制概述

机构的数学特性是机器人领域的重要研究课题之一,主要包括机构特性的数学描述、机构位姿的检测和机构运动的控制,以便于计算机指令和控制算法的高效实现。这一领域涉及多学科的交叉,如数学、力学、机械、计算机、信息科学、材料甚至生命科学等学科,因此也导致其研究的复杂化。随着机构的复杂化、机构的应用领域多样化和计算机工具的进步,这一机构系统的数学描述和新算法的设计对机构数学模型提出更高的要求。

近年来,人类的活动领域不断扩大,机器人应用也从制造领域向非制造领域发展。像海洋开发、宇宙探测、采掘、建筑、医疗、农林业、服务、娱乐等行业都提出了自动化和机器人化的要求。这些行业与制造业相比,其主要特点是工作环境的非结构化和不确定性,因而对机器人的要求更高,需要机器人具有行走功能、对外感知能力以及局部的自主规划能力等,是机器人技术的一个重要发展方向<sup>[1]</sup>。这些要求使得机器人向集成化、模块化、智能化和多感知系统发展,同时这些性能的实现与机器人自身性能的模块化表示紧密相关,因此几何代数方法是机器人机构数学建模的有力工具,是机器人实现自主化的重要途径。

主题为数学与机器人学之间相互影响的会议于 2000 年 5 月由美国国家科学基金会在弗吉尼亚州阿灵顿主持召开。专家们讨论了机器人学中数学的重要性以及机器人学问题对数学发展起的促进作用。专家们提出了很多问题,其中涉及较多数学分支和机器人学的多个领域<sup>[2]</sup>。由于机器人是一个非常复杂的系统,其中包括机械系统、机电驱动系统、计算机控制系统、信息采集与反馈系统,同时需要将计算机控制与机电驱动装置和传感器结合起来,这一综合性的任务已超出了工程师的能力。该领域的任何理论都要经得起实际机械装置的考验。因此几何代数方法也是机器人学的重要分支之一。

### 1.1.1 几何代数和机构学的数学方法

回顾 Grassman 和 Clifford 的工作可知,几何代数是由 Hestenes 定义的带有几何释义的多线性代数。Hestenes 的本意是通过几何代数建立物理学中统一的符号运算专有术语,事实上由于历史的原因,今天有多个领域基于不同的形式都在

使用这些术语,如张量(tensors)、矩阵(matrices)、扭矩(torques)、矢量(vector)、旋量(spinors)、四元数(quaternions)等,而这些由 Henestes 命名的术语恰恰是 Clifford 想赋予 Clifford 代数的<sup>[3]</sup>。

已经证明几何代数对于一些物理问题的解决非常便利,如涉及旋转、相位角的问题等。同时几何代数在量子力学、经典力学、电磁学以及相对论等领域都表现出其结构紧凑、直观的特点。目前几何代数的应用已经拓展到机器视觉、生物力学、机器人学以及太空飞行动力学等领域。

Sophus Lie 的李群李代数是几何代数在机器人学中的一个重要分支。Sophus Lie 的主要成就是发现了连续变换群,在他去世后才被命名为李群。李代数可以理解为是李群的线性化和生成的相应向量场,或叫做无穷小生成元,且被表示为群的线性化形式<sup>[4]</sup>。

从 19 世纪末诞生到现在,李群李代数经历了一个多世纪的发展。从研究晶体排列到研究刚体的运动分析,均获得了广泛而成功的应用。旋量作为李代数的一个元素,其研究早于李群、李代数的出现,现在已经是一个比较成熟的理论工具。旋量理论与李群、李代数在机构学中的应用,大大地丰富了机构学的研究手段,推动了当代机构学的研究和发展<sup>[5]</sup>。

数学家 Clifford(1845—1897)提出了一个极具原创性的建议,即在“motor”理论中,存在一些二阶幂零元作为特殊向量用于描述一个“motor”。继 Clifford 以后,在加入李代数结构的条件下,Ball 的关于螺丝的传统理论<sup>[6]</sup>将我们引领到对偶数环的欧氏代数的研究。这一观点使运用于刚体运动学分析的几何代数性质得以全面系统化。

关于螺丝理论,较早的系统性工作在形式上具有多样性,有些体现为代数学,有的则为纯几何学,一些较为完整统一的是前面提到的 Ball 以及 Study 的工作<sup>[7]</sup>。Hunt 建立的机构几何学应用已经成为这一领域的经典。基于线性代数方法的螺丝理论也在机器人运动学领域得到广泛应用<sup>[8]</sup>。在 Ball 和 Zanchevskiy 的螺丝理论以及 Kotelnikov 将对偶数应用于向量理论的基础上,Dimentberg 将螺丝的对偶计算进一步应用于机构运动学<sup>[9]</sup>。随后,Keler<sup>[10]</sup>、Yang、Freudenstein<sup>[11]</sup>、Veldkamp<sup>[12]</sup>、Sugimoto<sup>[13]</sup>、Duffy<sup>[14]</sup>、Pradeep 等<sup>[15]</sup>都研究了对偶数在机构运动学中的应用。Chevallier 介绍了对偶数运动学计算的现代数学方法<sup>[16~18]</sup>。

立足于三维欧氏位移群的李群特有结构对机构进行深入研究,将使得许多在运动学和动力学中显得神秘的性质如“旋量”等得到合适的解释。这类工作在运动学方面主要体现在 Hervé<sup>[19,20]</sup>、Karger<sup>[21]</sup>等的研究中,而动力学方面主要包括 Chevallier 的工作<sup>[22,23]</sup>。

李代数方法在机构学中的应用首先追溯到 1978 年,Hervé 介绍了运动副位移群的李群表示方法,通过位移群的非空位姿集合判定机构可能的运动来确定机构



的自由度。从而定义了位移几何群的代数结构,进而定义机构运动副及其主要性质。随后,Chevallier 研究了位移群的代数性质、刚体运动中位姿空间的微分流形结构以及李代数、对偶数和对偶四元数在运动学中的关系。Murray 和 Li 等在他们的著作《机器人操作的数学导论》中对李群与机器人运动进行了系统介绍<sup>[24]</sup>。

### 1.1.2 机器人机构的设计

机器人机构构型理论的研究具有十分重要的理论和实际意义,是目前国际学术界和工业界广泛关注的热点和前沿。

机器人机构的构型理论首先要建立在对其末端运动特征和末端运动约束特征的准确描述上。一个机构由一系列刚体及运动副连接构成。机构分析的基本问题是找到连接刚体的任意运动副的合适数学表示,已经证明该问题通过两种途径得以解决,即机构连接的并和交运算,并运算对应于串联机构,交运算则对应并联机构。该方法的有效性已经在三自由度并联机构的设计中得到验证<sup>[25]</sup>。连接基座与动平台的三个支链产生纯平移运动,每个支链的位移子集是一个子李群。三个子集之交仍然是由空间平移构成的子李群。伺服电机与基座相连,这使得它的体积和重量不受太多限制,进而驱动非常大的负载。另外三个支链为重量较轻而运动灵活的桁架结构,从而使这类并联机构实现高速度、高加速度的精准定位。

近年来,关于并联机器人的研究发展很快,并且涉及范围很广。由于造价低廉,旋转关节并联机器人研究逐渐受到重视,典型的有三自由度 R-CUBE 全旋转关节解耦并联执行机构<sup>[26]</sup>以及著名的三自由度 Delta 机器人。Hervé 和 Sparacino 列举了一系列类 Delta 机器人机构<sup>[27]</sup>。Tsai 给出了基于平面平行四边形机构的全旋转关节的三平移自由度并联机构设计。Zhao 和 Huang<sup>[28]</sup>研究了过约束 3-RRC (revolute-revolute-cylindrical) 平移操作器的运动学特性。Baron 和 Bernier 研究了星形三自由度并联机构的设计。Carricato 和 Parenti-Castelli<sup>[29]</sup>介绍了系列三平移自由度并联机构。Kong 和 Gosselin 对 3-CRR 平移并联机构的运动学和奇异位形进行了研究。Fang 给出了三自由度旋转关节并联机构的设计综合<sup>[25]</sup>。Kim 和 Tsai<sup>[30]</sup>提出了同类机构的优化设计。Liu 在 2006 年先后提出了对称结构平面 5R 并联机构优化设计和基于运动学优化的 PRRRP 结构 2-DOF 并联机器人设计<sup>[31,32]</sup>。

由于高自由度的大部分并联机构的末端操作器存在位姿运动的耦合,为简化控制环节,近期并联机构研究倾向于将末端操作器的运动进行解耦设计,尽量避免复杂的多自由度关节,但这会使机构设计受到限制;同时,由于并联机构的复杂性,一般较难设计出结构解耦的高自由度的空间机构,尤其是能够实现末端操作器旋转运动的解耦机构。因此并联机器人的解耦设计和功能实现往往是一对矛盾,因此控制问题的解决不能完全依赖机构自身的解耦。