普通高等院校数学类规划教材

应用线性代数

LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等院校数学类规划教材

应用线性代数

LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

主编　曹铁川

编者　高桂英　刘怡娣

高旭彬　张　鹤

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用线性代数 / 大连理工大学城市学院基础教学部组编. —大连 ：大连理工大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5611-6344-3

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 139745 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路80号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

丹东新东方彩色包装印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：12.75　字数：283千字

2011年7月第1版　2011年7月第1次印刷

责任编辑：王　伟　责任校对：李　慧

封面设计：熔点创意

ISBN 978-7-5611-6344-3　定　价：25.00元

前　言

在大学教育中，线性代数是理工、金融、管理等众多专业必修的一门重要基础课程．不仅因为它的理论与方法遍及自然科学、工程技术以及经济学等多个领域，有着应用的广泛性，而且从人才素质培养方面来讲，也是不可或缺的．

线性代数的基本概念、基本理论和基本方法具有较强的逻辑性、抽象性，这些特点恰恰又使一些初学者望而生畏．《应用线性代数》是为普通高等院校，特别是应用型本科院校所编写的．考虑到实际的授课对象，我们在编写过程中，在遵循本学科系统性与科学性的前提下，内容选择尽量少而精，概念的引入、理论的展开、篇章的过渡，尽可能从学生熟知的实例出发，并选择恰当的切入点，由浅入深，循序渐进，融会贯通．本书充分注意到应用型本科学生的发展要求，既重视理论基础，又注重实际应用，对于较难的理论证明作了适当的弱化处理，代之以通俗直观的举例或类比加以说明．

例如，从我国古代著名算题及解线性方程组入手，给出了二阶、三阶行列式的概念，并统一于用递归法定义的 n 阶行列式，这样的定义自然易懂，避免了用逆序法定义的繁琐，还使学生尽早熟悉了代数余子式的概念．

又如，从电路、线性方程组，以及我国民间流传甚广的“田忌赛马”故事中引出矩阵的概念，从救灾物品捐助、运输等实际问题中，归纳出矩阵的加法、数乘，以及矩阵和矩阵的乘法定义．结合解线性方程组的消元法，引出了矩阵的初等变换及矩阵秩的概念．

对于初学者难以理解的向量的线性相关性、向量组的秩、最大线性无关组，我们采用了“调色”的比喻，帮助学生直观理解．再如，关于向量空间、向量空间的基、向量的坐标等概念，是通过与解析几何的知识类比加以说明的．每章之后我们特别附设了“应用实例阅读”一节，收录了一些具有真实背景并用该章知识即能圆满解决的成功范例．这些实例涉及领域广泛，生动地展示了线性代数作为表达、分析、计算工具，在解决离散线性关系问题时的强大功能．

简而言之，我们着力追求的是把“直观化”、“形象化”以及“应用性”的教学构想贯彻本书始终．

《应用线性代数》涵盖了线性代数课程的最基本内容和方法，通过本课程的学习，读者

将熟悉和掌握行列式的运算、矩阵理论和基本运算、线性方程组的理论和求解方法，掌握矩阵的特征值和特征向量、矩阵的对角化及二次型的标准化和正定二次型的基本理论等．本书还介绍了如何在线性代数运算中使用MATLAB软件，为应用型本科院校学生的培养提供新的尝试方式.

本书由大连理工大学城市学院基础教学部组织编写，曹铁川任主编并负责统稿．编者有高桂英（第2、5章）、刘怡娣（第1章）、高旭彬（第3章）、张鹤（第4章）.

大连理工大学数学科学学院冯红教授悉心阅读了书稿，并提出了宝贵建议．限于编者水平，不妥之处在所难免，期待读者和同行批评指正，在此一并表示谢意.

编　者
于大连理工大学城市学院
2011年6月

目　录

第1章　行列式

行列式是一种特定的算式，是线性代数中的一个重要概念. 行列式在对矩阵和线性方程组等问题的研究中起着重要的作用. 作为重要的数学工具之一，在数学的许多分支和工程技术中也有着广泛的应用. 本章的主要内容是通过对二元线性方程组和三元线性方程组的讨论，引出二阶行列式、三阶行列式的概念并推广到 n 阶行列式，介绍行列式的性质和计算，以及求解线性方程组的克莱姆法则.

1.1　二阶和三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

行列式的概念最初是伴随着求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组提出来的.

【例 1-1】 鸡兔同笼问题是我国古代著名趣题之一，大约在 1 500 年前，《孙子算经》中就记载了这个问题：今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？

本题用二元一次方程组很容易解出答案.

解　设鸡有 x 只，兔子有 y 只，则由题意得

二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases},$$

利用消元法，得

$$\begin{cases} x=23 \\ y=12 \end{cases},$$

即鸡 23 只，兔 12 只.

一般地，对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法求解方程组，得到唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{1-2}$$

引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc, \tag{1-3}$$

并称这个由 4 个数 a,b,c,d 排成的两行、两列的式子 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**，其中 a,b,c,d 称为二阶行列式的 4 个**元素**.

由定义可知，$ad-bc$ 就是图 1-1 中行列式实连线（称为**主对角线**）上的两个元素的乘积与虚连线（称为**副对角线**）上的两个元素的乘积之差.

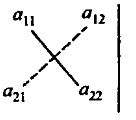

图 1-1

在线性方程组(1-1)中，若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$（称为**系数行列式**），$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当 $D\neq 0$ 时，方程组的唯一解就可以用行列式的形式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上面的结果，实际上提供了一种用行列式求解二元一次方程组的方法. 例如在前面“鸡兔同笼”问题中，$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2\neq 0$，方程组有唯一解.

鸡数
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix}}{D}=\frac{46}{2}=23,$$

兔子数
$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix}}{D}=\frac{24}{2}=12.$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1-1 由 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成的三行三列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**. 它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31})-(a_{12}a_{21}a_{33})-(a_{11}a_{23}a_{32}),$$

其中，a_{ij} 称为行列式的**元素**；i 表示 a_{ij} 所在的**行数**，j 表示 a_{ij} 所在的**列数**.

从定义可以看出，三阶行列式表示的代数和中共有 6 项，而每一项都是不同行、不同列的三个数的乘积，其计算方法可按照图 1-2 中的对角线法则来记忆.

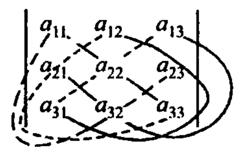

图 1-2

把 a_{11} 到 a_{33} 的实连线称为**主对角线**，a_{13} 到 a_{31} 的虚连线称为**副对角线**，图中三条实线是平行于主对角线的连线，三条虚线是平行于副对角线的连线，实线上三个元素之积冠以正号，虚线上三个元素之积冠以负号.

【例 1-2】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}$ 的值.

解 用对角线法则计算，得

$$\begin{aligned}D&=1\times(-1)\times0+1\times5\times1+4\times3\times2-4\times(-1)\times1-1\times3\times0-1\times5\times2\\&=0+5+24-(-4)-0-10\\&=23\end{aligned}$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases},$$

若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

经验证，当 $D\neq0$ 时，方程组有唯一解，且可用行列式表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

其中三阶行列式 D 由方程组未知量的系数构成，称为系数行列式. D_1，D_2，D_3 分别是由常数列 b_1，b_2，b_3 代替 D 中的第一列、第二列、第三列所构成的三阶行列式.

【例 1-3】 用行列式求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\ 2x_1+x_2-2x_3=-2\\ 3x_1-x_2+x_3=4\end{cases}.$$

解 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$$=1\times1\times1+1\times(-2)\times3+1\times2\times(-1)-1\times1\times3-1\times2\times1-(-1)\times(-2)\times1$$

$$=-14,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-28,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-42.$$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=1 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=2 \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=3 \end{cases}.$$

1.1.3 二阶行列式和三阶行列式的关系

由二阶行列式和三阶行列式的定义可知，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31})-(a_{12}a_{21}a_{33})-(a_{11}a_{23}a_{32}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1-4}$$

观察此式可以看出，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘以一个二阶行列式的代数和.

为了进一步了解三阶行列式和二阶行列式的关系，下面给出余子式和代数余子式的概念.

以三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为例，对元素 a_{11} 而言，将元素 a_{11} 所在的行和列划去后，留下的元素按原来的相对位置不变构成的二阶行列式，称为元素 a_{11} 的**余子式**，记为

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

记 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为元素 a_{11} 的**代数余子式**.

类似有元素 a_{21} 的代数余子式 $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

一般地，在三阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下的元素按原来的相对位置不变构成的二阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

【例 1-4】 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，求第一行各元素的余子式和代数余子式.

解

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5,\ A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=5;$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3;$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-7,\ A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=-7.$$

【例 1-5】 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，求行列式的值以及行列式的各行每个元素与其对应代数余子式的乘积之和.

解 $D=3\times4\times1+1\times3\times5+2\times0\times(-2)-(-2)\times4\times5-1\times2\times1-3\times3\times0=65$

对于第一行有

$$\begin{aligned}&3\times(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\\&=3\times(4-0)-1\times(2-15)+(-2)\times(0-20)\\&=12+13+40\\&=65.\end{aligned}$$

对于第二行有

$$\begin{aligned}&2\times(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+4\times(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}+3\times(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\\&=-2\times(1-0)+4\times(3+10)-3\times(0-5)\\&=-2+52+15\\&=65.\end{aligned}$$

对于第三行有

$$\begin{aligned}&5\times(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+0\times(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+1\times(-1)^6\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\\&=5\times(3+8)+0+(12-2)\\&=65.\end{aligned}$$

这里注意到一个现象，即行列式每一行的各元素与其对应代数余子式的乘积之和结果相同并且等于行列式的值，事实上有下面的结论.

定理 1-1 三阶行列式的值等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和,并称此为**行列式的展开定理**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,3) \tag{1-5}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,3).$$

在上面的例题中,注意到若行列式的某行(列)元素有“0”,则可以简化运算,因此应用展开定理计算行列式的时候,往往选取含有“0”元素比较多的行(列).

1.2 n 阶行列式

由二阶行列式和三阶行列式的关系可发现,三阶行列式的值等于它的第一行各个元素与其对应代数余子式的乘积之和. 如果定义一阶行列式 $|a| = a$,那么在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中,与三阶行列式相似,各元素的代数余子式记作

$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -a_{21},$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = a_{11},$$

则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \tag{1-6}$$

如果把式(1-6)和式(1-5)作为二阶、三阶行列式的定义,那么这种定义方法是统一的,其特点都是用低阶行列式定义高一阶的行列式. 下面按照这种递归的方法,给出 n 阶行列式的定义.

定义 1-2 设 n^2 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$,记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 **n 阶行列式**,它是一个算式,其值为:

当 $n=1$ 时,$D = |a_{11}| = a_{11}$;

$$\text{当 } n\geqslant 2 \text{ 时}, D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n};$$

其中，a_{ij} 称为行列式的**元素**；i 表示 a_{ij} 所在的**行数**；j 表示 a_{ij} 所在的**列数**.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

由定义可知，行列式的算式是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的乘积构成的和式，即第一行各元素与其代数余子式的乘积之和，称此和式为**展开式**.

n 阶行列式中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**，另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

【例 1-6】 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 根据行列式的定义，

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+ \\ &\quad (-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\times(3-2)-3\times(25-1)+(-1)\times(-15+1)-4\times(-10+1) \\ &= 2-72+14+36 \\ &= -20. \end{aligned}$$

【例 1-7】 计算对角行列式(除主对角线上的元素，其余元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 注意到行列式的每一行只有一个非零元素，反复使用行列式的定义，有

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ & a_{33} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 1-8】 证明 n 阶**下三角行列式**(主对角线以上的元素全为零)($n\geqslant 2$)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,结论显然成立,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}$.

假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立,则由定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式,根据归纳法假设得

$$D_n=a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn})=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

用完全类似的方法可以证明**上三角行列式**(主对角线以下的元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.3 行列式的性质

直接用行列式定义计算行列式,一般是比较繁琐的.下面讨论一些行列式的性质,以期简化行列式的计算.

将行列式 D 的各行与同序号的列互换,所得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**,记作 D^{T}.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 这个性质可用数学归纳法证明,由于证明表述较繁,略去其证明.下面仅以二阶和三阶行列式为例,验证其正确性.

设二阶行列式 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,则

$$D_2^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=D_2,$$

所以 $D_2=D_2^T$.

设三阶行列式 $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_3^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$，将 D_3 按第一行展开

$$\begin{aligned} D_3 &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}). \end{aligned}$$

将 D_3^T 按第一列展开

$$\begin{aligned} D_3^T &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{21}+a_{13}A_{31} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}) \\ &= D_3. \end{aligned}$$

所以 $D_3=D_3^T$.

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等地位，因而讨论行列式性质时，凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

在 1.1 节中，我们曾验证了三阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和. 更一般地，有下面的定理.

定理 1-2　n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为**行列式按行(列)展开法则**，证明从略.

性质 2　互换行列式的任意两行(列)，行列式的值变号.

对于一般的 n 阶行列式，此性质的证明从略. 下面以三阶行列式为例加以说明. 例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

交换行列式 D 的第一行与第二行后的行列式记作 D_1，则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

将 D 按第一行展开，有

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

将 D_1 按第二行展开，有

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{11}B_{21}+a_{12}B_{22}+a_{13}B_{23} \quad (\text{此处的 } B_{ij} \text{ 指的是 } D_1 \text{ 中各元素的代数余子式}) \\ &= a_{11}(-A_{11})+a_{12}(-A_{12})+a_{13}(-A_{13}) \quad (\text{第一行与第二行交换}) \\ &= -(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}) \\ &= -D. \end{aligned}$$

推论 若行列式的某两行(列)完全相同，则此行列式的值等于零.

证明 把这相同的两行互换位置，则由性质 2 得到 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 将上式左端的行列式按第 i 行展开. 注意到左右两端行列式第 i 行元素的代数余子式是相同的，故

$$\begin{aligned} \text{左端} &= ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=\text{右端}. \end{aligned}$$

推论 若行列式某一行(列)的元素均含有公因子 k，则 k 可以提到行列式的外面.

推论 若行列式某一行(列)的元素全为零，则此行列式的值等于零.

性质 4 若行列式有两行(列)对应元素成比例，则该行列式的值等于零. 即

$$\begin{array}{r} \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$