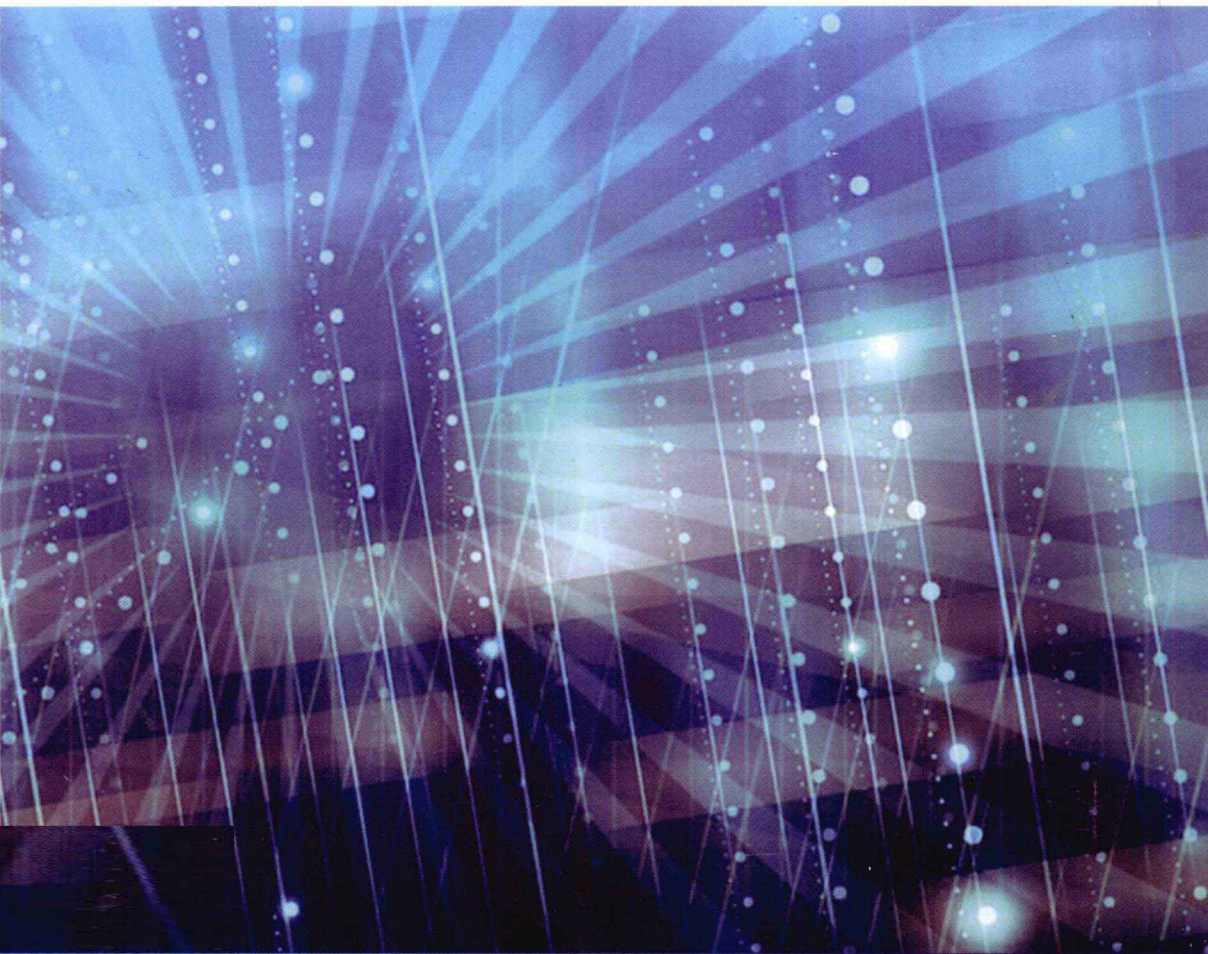


# 半导体激光器 理论基础

杜宝勋 著

高功率半导体激光国家重点实验室



科学出版社

# 半导体激光器 理论基础

杜宝勋 著

高功率半导体激光国家重点实验室

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书针对半导体激光器, 强调其理论基础和理论的系统性. 主要内容包括: 光增益理论、光波导理论、谐振腔理论、半导体发光、速率方程分析和典型半导体激光器的理论.

本书可以作为光电子专业研究生课程的试用教材, 也可以供相关专业的教师和科技人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

---

半导体激光器理论基础/杜宝勋著. —北京: 科学出版社, 2011  
ISBN 978-7-03-029281-0

I. 半… II. ①杜… III. ①半导体激光器 IV. ①TN248.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第203524号

---

责任编辑: 张 静/责任校对: 鲁 素

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏 杰 印 刷 厂 印 刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2011年1月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011年1月第一次印刷 印张: 12 1/4

印数: 1—2 000 字数: 234 000

定价: 40.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前 言

在 2002 年后,本人应邀为长春理工大学和长春光学精密机械与物理研究所的研究生班讲课,讲授《半导体激光器理论基础》,使用的主要参考书是《半导体激光器原理》(兵器工业出版社,2001 年版和 2004 年修订版).在 2001 年长春光谷会议期间,为了培养高技术人才和发展光电子产业,吉林大学高鼎三院士和中国科学院半导体研究所王启明院士先后推荐这本书作为研究生课程的试用教材,并曾分别为该书题词和写序.该书是为高功率半导体激光国家重点实验室写的讲义,尚不完全适用于研究生班.在讲课过程中,还发现了一些错误和不妥之处.现在,结合讲课的经验,将该书改写为《半导体激光器理论基础》,内容增删很多,章节变化很大,旨在强调理论基础和理论的系统性.

激光器是光振荡器,是由光放大器和谐振腔组成的.图 0.1 所示的双异质结构(DH)是典型半导体激光器芯片的理论模型,其中宽带隙的 N 型和 P 型半导体层夹着窄带隙的本征半导体层.窄带隙的半导体层是光增益介质,也就是放大器.

对于载流子,DH 具有载流子注入和载流子限制效应.N 型和 P 型半导体分别将电子和空穴注入到本征半导体内,两种载流子在这里复合发光,因光子受激发射而产生光放大.因此,本征半导体层是有源层,而 N 型和 P 型半导体层是注入层.同时,P 型和 N 型半导体分别提供的电子势垒和空穴势垒将注入的载流子限制在有源层内,这是载流子限制.载流子限制提高了载流子注入效率.因此,注入层也称为限制层.

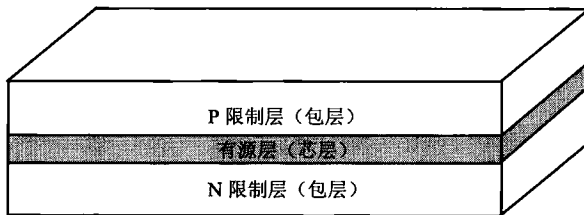


图 0.1 典型半导体激光器芯片的理论模型——双异质结构(DH)

另一方面,对于光波,DH 具有光波导效应,即光限制效应.由于窄带隙半导体的折射率大于宽带隙半导体的折射率,光波被限制在有源层内,这是光限制.光限制加强了光波与有源层的耦合.因此,有源层也称为芯层,而限制层也称为包层.

此外, DH 的两个平行的垂直于有源层的端面, 或两个平行的平行于有源层的表面, 构成了法布里-珀罗(F-P)谐振腔. 前者是端面出光的长度很大的水平谐振腔, 后者是表面出光的长度很小的垂直谐振腔.

总之, DH 是光放大器和谐振腔一体化的结构, 它还具有载流子限制效应和光限制效应. 因此, 对于半导体激光器, 我们必须首先精通载流子注入、载流子限制、光增益、光波导、谐振腔等基础理论, 然后才能解决器件分析和器件设计问题. 本书的内容正是这样安排的. 全书分为 7 章 24 节, 在 40~50 学时内讲完. 由于课时和篇幅的限制, 本书尽量压缩定性的文字描述, 而尽量采用定量的数学分析. 当然, 在讲课时, 必须深入浅出, 把物理模型和因果关系解释清楚, 保证工科学生能够理解.

对物理问题的讨论, 尽量采用数学分析表达式, 以便读者深化对物理概念的理解, 有利于收到举一反三和触类旁通的教学效果. 这是著者的风格. 王启明先生在《半导体激光器原理》的序言中向读者介绍了这种风格.

在本书出版之际, 著者感谢北京大学物理学院虞丽生教授, 她向科学出版社推荐出版本书. 还要感谢高功率半导体激光国家重点实验室主任刘国军教授和长春理工大学学术委员会主任姜会林教授, 他们在百忙中对著者和本书鼎力相助.

最后, 欢迎读者提出批评和建议.

著 者

2010 年 5 月, 北京

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 光增益经典理论</b> .....	1
1.1 电磁波 .....	1
1.1.1 波动方程 .....	1
1.1.2 光学常数 .....	2
1.1.3 平面波 .....	3
1.1.4 光强度 .....	4
1.1.5 相速度和群速度 .....	5
1.2 介质电极化 .....	6
1.2.1 洛伦茨模型 .....	7
1.2.2 复电极化率 .....	7
1.2.3 K-K 关系 .....	9
1.2.4 自由电子的贡献 .....	11
1.2.5 振子强度 .....	12
1.3 激光 .....	12
1.3.1 光增益和光吸收 .....	13
1.3.2 折射率 .....	14
1.3.3 兰姆方程 .....	16
1.3.4 激光条件 .....	17
参考文献 .....	18
<b>第 2 章 光增益量子理论</b> .....	19
2.1 电子和光子 .....	19
2.1.1 微观粒子 .....	19
2.1.2 电子 .....	21
2.1.3 光子 .....	22
2.2 电子光跃迁 .....	24
2.2.1 与时间有关的微扰 .....	24
2.2.2 跃迁概率 .....	26
2.2.3 矩阵元 .....	28
2.3 光吸收和光发射 .....	30

2.3.1	光吸收概率	30
2.3.2	爱因斯坦公式	31
2.3.3	能带间的跃迁	33
2.4	密度矩阵分析	36
2.4.1	密度矩阵	37
2.4.2	线性电极化	38
2.4.3	光增益饱和	39
2.4.4	振子速率方程	41
	参考文献	42
<b>第 3 章</b>	<b>半导体发光</b>	<b>43</b>
3.1	半导体	43
3.1.1	能带	43
3.1.2	载流子密度	46
3.1.3	载流子复合	50
3.1.4	载流子注入	53
3.2	异质结构	55
3.2.1	异质结	55
3.2.2	双异质结构	57
3.2.3	晶格匹配	59
3.3	发光性质	61
3.3.1	$k$ 选择条件	61
3.3.2	$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ 微扰近似	62
3.3.3	爱因斯坦系数	65
3.3.4	振子状态密度分布	67
3.3.5	发射光谱	68
3.3.6	辐射复合系数	70
	参考文献	71
<b>第 4 章</b>	<b>光波导</b>	<b>73</b>
4.1	阶跃折射率平板波导	73
4.1.1	横向波函数	73
4.1.2	TE 波	75
4.1.3	TM 波	78
4.2	渐变折射率平板波导	79
4.2.1	等效波导厚度	80
4.2.2	平方波导分析	82

4.2.3 线性波导分析	85
4.3 光波导性质	88
4.3.1 光波横向限制	88
4.3.2 光波端面反射	90
4.3.3 光波端面出射	92
参考文献	97
<b>第 5 章 谐振腔</b>	<b>98</b>
5.1 水平谐振腔	98
5.1.1 积蓄能量	98
5.1.2 光放大效应	100
5.1.3 光振荡效应	102
5.2 锁模谐振腔	105
5.2.1 耦合波分析	105
5.2.2 分布反馈	110
5.2.3 锁模效应	112
5.3 垂直谐振腔	114
5.3.1 分布布拉格反射器	114
5.3.2 垂直谐振腔设计	117
5.3.3 径向单模条件	120
参考文献	123
<b>第 6 章 速率方程分析</b>	<b>125</b>
6.1 速率方程	125
6.1.1 单模速率方程	125
6.1.2 多模速率方程	126
6.1.3 自发发射因子	127
6.1.4 微腔效应	128
6.2 稳态分析	129
6.2.1 单模分析	129
6.2.2 多模分析	132
6.3 瞬态分析	135
6.3.1 小信号调制	135
6.3.2 弛豫振荡	139
6.4 激光谱线宽度	142
6.4.1 肖洛-汤斯展宽	142
6.4.2 自然展宽	142



6.4.3	相位涨落和强度涨落 .....	143
6.4.4	噪声展宽 .....	145
	参考文献 .....	148
<b>第 7 章</b>	<b>半导体激光器</b> .....	<b>149</b>
7.1	双异质结构激光器 .....	149
7.1.1	电学特性 .....	149
7.1.2	转换特性 .....	152
7.1.3	光学特性 .....	155
7.1.4	调制特性 .....	158
7.2	量子阱激光器 .....	159
7.2.1	能带分裂 .....	160
7.2.2	载流子密度 .....	162
7.2.3	水平矩阵元 .....	164
7.2.4	量子阱半导体发光 .....	165
7.2.5	阈值电流密度 .....	166
7.2.6	应变层量子阱 .....	168
7.3	垂直腔表面发射激光器 .....	170
7.3.1	阈值电流密度 .....	170
7.3.2	横向光限制因子 .....	172
7.3.3	发热和散热 .....	174
7.4	外腔激光器 .....	176
7.4.1	光注入锁模 .....	177
7.4.2	外腔反馈锁模 .....	180
7.4.3	激光谱线变窄 .....	182
	参考文献 .....	185

# 第 1 章 光增益经典理论

## 1.1 电 磁 波

光波的本质是电磁波. 在电磁光学理论中, 光波由两个相关的矢量波函数  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  来描述,  $\mathbf{E}$  是电场,  $\mathbf{H}$  是磁场,  $\mathbf{r}$  和  $t$  分别是空间变量和时间变量. 将波矢记作  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{k}$  相互垂直, 与右旋直角坐标系一致. 平面波的电场和磁场如图 1.1 所示.

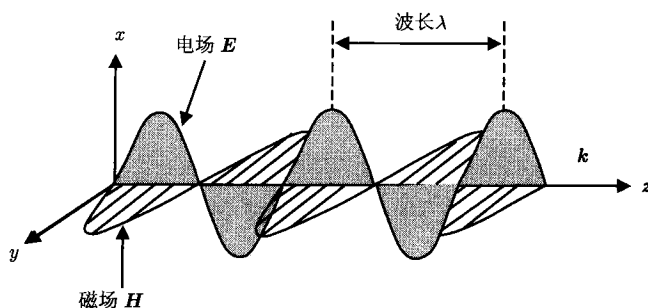


图 1.1 平面波的电场和磁场

### 1.1.1 波动方程

在共振介质中,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  满足麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0(\varepsilon + \tilde{\chi}) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.4)$$

其中  $\mu_0$  和  $\varepsilon_0$  分别是真空的磁导率和电容率,  $\varepsilon$  和  $\tilde{\chi}$  分别是介质的介电常数和复电极化率. 由(1.1)式得到:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})\end{aligned}\quad (1.5)$$

将(1.2)和(1.3)式代入(1.5)式中, 求出电场的波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon + \tilde{\chi}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (1.6)$$

由(1.2)式得到:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} \\ &= \varepsilon_0 (\varepsilon + \tilde{\chi}) \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})\end{aligned}\quad (1.7)$$

将(1.1)和(1.4)式代入(1.7)式中, 求出磁场的波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon + \tilde{\chi}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0 \quad (1.8)$$

(1.6)和(1.8)式表明, 电场的波动方程和磁场的波动方程在形式上是完全相同的.  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  各有 3 个分量, 这 6 个分量均满足波动方程:

$$\nabla^2 \lambda - \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon + \tilde{\chi}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \lambda = 0 \quad (1.9)$$

其中  $\lambda$  代表任何一个分量.

### 1.1.2 光学常数

经典波动方程是:

$$\nabla^2 \lambda - \left(\frac{\tilde{n}}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \lambda = 0 \quad (1.10)$$

其中  $c$  是真空的光速,  $\tilde{n}$  是介质的复折射率.

由(1.9)和(1.10)式求出:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1.11)$$

$$\tilde{n}^2 = \varepsilon + \tilde{\chi} \quad (1.12)$$

将  $\tilde{n}$  和  $\tilde{\chi}$  分别写作:

$$\tilde{n} = n - in' \quad (1.13)$$

$$\tilde{\chi} = \chi - i\chi' \quad (1.14)$$

$n$  和  $\chi$  分别称为折射率和电极化率,  $n'$  和  $\chi'$  均表示光吸收.

将(1.13)和(1.14)式代入(1.12)式中求出:

$$n = \sqrt{\varepsilon} + \frac{\chi}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.15)$$

$$n' = \frac{\chi'}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.16)$$

注意, 在以后的分析和计算中, 我们取近似:

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad (1.17)$$

$$n' = \frac{\chi'}{2n} \quad (1.18)$$

### 1.1.3 平面波

$$\text{令} \quad \lambda(\mathbf{r} \cdot t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (1.19)$$

其中  $\omega$  是圆频率, 以后简称为频率. 将(1.19)式代入(1.10)式中, 得到亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + \tilde{k}^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.20)$$

$$\text{其中} \quad \tilde{k} = k_0 \tilde{n} \quad (1.21)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.22)$$

$k_0$  是真空的波数,  $\tilde{k}$  是介质的复波数.

将  $\tilde{k}$  写作:

$$\tilde{k} = k - ik' \quad (1.23)$$

$k$  是介质的波数,  $k'$  表示光吸收.

由(1.13), (1.21)和(1.23)式求出:

$$k = k_0 n \quad (1.24)$$

$$k' = k_0 n' \quad (1.25)$$

(1.20)式的平面波解是:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \lambda_0 e^{-k' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \lambda_0 e^{-k' z} e^{-ikz} \end{aligned} \quad (1.26)$$

代入(1.19)式中求出:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{r} \cdot t) &= \lambda_0 e^{-k' z} e^{i(\omega t - kz)} \\ &= \lambda_0 e^{-k' z} \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (1.27)$$

注意, 这里的波函数只取实部(下同), 因为虚部没有物理意义.

#### 1.1.4 光强度

坡印亭矢量是:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.28)$$

其方向和幅度分别表示光波的传播方向和功率密度. 光强度是功率密度对时间取平均值, 写作:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[H^* E] \quad (1.29)$$

根据(1.27)式写出:

$$E = E_0 e^{-k' z} e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.30)$$

$$H = H_0 e^{-k' z} e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.31)$$

代入(1.1)式中求出:

$$\frac{H_0}{E_0} = \frac{k}{\omega \mu_0} = n c \epsilon_0 \quad (1.32)$$

将(1.30)和(1.31)式代入(1.29)式中求出:

$$I(z) = \frac{1}{2} E_0 H_0 e^{-\alpha z} \quad (1.33)$$

其中 
$$\alpha = 2k' = 2k_0 n' \quad (1.34)$$

$\alpha$  是介质的光吸收系数.

由(1.18)和(1.34)式求出:

$$\alpha = k_0 \frac{\chi'}{n} \quad (1.35)$$

由(1.32)和(1.33)式求出:

$$E_0^2 = 2I(0)/(cn\epsilon_0) \quad (1.36)$$

### 1.1.5 相速度和群速度

前面讲的是单色波, 而理想的单色波是不存在的. 实际上,  $\omega$  总有一定的宽度,  $k$  也总有一定的宽度.

我们考虑  $\alpha = 0$  的介质. 若将光波视为由振幅相同而频率和波数分别为  $\omega \pm \Delta\omega$  和  $k \pm \Delta k$  的两个平面波组成的波群, 则根据(1.27)式写出:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \lambda_0 \left\{ e^{i[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)z]} + e^{i[(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)z]} \right\} \\ &= \lambda_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k z) e^{i(\omega t - k z)} \end{aligned} \quad (1.37)$$

根据(1.37)式, 写出等相位面方程和等能量面方程:

$$\Phi = \omega t - k z = \text{常数} \quad (1.38)$$

$$\bar{\Phi} = \Delta\omega t - \Delta k z = \text{常数} \quad (1.39)$$

由(1.38)式得到:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega - k \frac{dz}{dt} = 0 \quad (1.40)$$

因此 
$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (1.41)$$

$v$  是光波的相位或波面沿  $z$  方向传播的速度, 简称相速度. 由(1.22), (1.24)和(1.41)式求出:

$$v = \frac{c}{n} \quad (1.42)$$

由(1.39)式得到:

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \Delta\omega - \Delta k \frac{dz}{dt} = 0 \quad (1.43)$$

因此

$$\bar{v} = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.44)$$

$\bar{v}$  是光波的能量或波群沿  $z$  方向传播的速度, 简称群速度.

若  $n$  是  $\omega$  的函数, 则由(1.22), (1.24)和(1.44)求出:

$$\bar{v} = \frac{c}{\bar{n}} \quad (1.45)$$

其中

$$\bar{n} = n + \frac{dn}{d\omega} \omega \quad (1.46)$$

这里, 将  $n$  和  $\bar{n}$  分别称为相折射率和群折射率.

注意, 在以后的分析和计算中, 我们取近似:

$$\bar{v} = v \quad (1.47)$$

$$\bar{n} = n \quad (1.48)$$

## 1.2 介质电极化

就晶格原子的电极化而言, 洛伦茨的电偶极子模型是一个形象的简单正确的模型, 如图 1.2 所示.

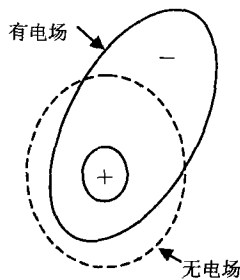


图 1.2 原子电极化的示意图

在电磁波内, 电场能量比磁场能量高两个量级以上. 因此, 只考虑电场对电子的作用, 而磁场对电子的作用可以忽略. 电场的作用造成原子内的束缚电子产

生位移, 形成了电偶极子, 这就是原子的电极化.

### 1.2.1 洛伦茨模型

电场对电子的作用存在于原子内部, 而原子的线度比光波的波长小三个量级以上. 因此, (1.30)式简化为:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (1.49)$$

将原子内的束缚电子视为阻尼振子, 讨论它在电场作用下的受迫振荡, 束缚电子的运动方程是牛顿方程:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_e + F_r + F_d \quad (1.50)$$

其中  $F_e$ 、 $F_r$  和  $F_d$  分别是作用在电子上的电场力、反弹力和阻尼力,  $m$  是电子的质量,  $r$  是电子沿电场方向的位移.

电场力是:

$$F_e = -qE = -qE_0 e^{i\omega t} \quad (1.51)$$

其中  $q$  是电子的电荷.

反弹力正比于电子的位移, 阻尼力正比于电子的速度, 二者分别写作:

$$F_r = -m\omega_0^2 r \quad (1.52)$$

$$F_d = -m\gamma \frac{dr}{dt} \quad (1.53)$$

其中  $\omega_0$  和  $\gamma$  分别是振子的本征频率和阻尼系数.

将(1.51), (1.52)和(1.53)式代入(1.50)式中得到:

$$\frac{d^2}{dt^2} r + \gamma \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{q}{m} E_0 e^{i\omega t} \quad (1.54)$$

该式的解是:

$$r = -\frac{q}{m} \frac{E_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \quad (1.55)$$

### 1.2.2 复电极化率

介质的复电极化强度是:



$$\tilde{P} = \tilde{\chi}\varepsilon_0 E = -qrNf \quad (1.56)$$

其中  $N$  是振子密度,  $f$  是振子强度.

由(1.49), (1.55)和(1.56)式求出:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{q^2 N f}{m\varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \quad (1.57)$$

由(1.14)和(1.57)式求出:

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 N f}{m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad (1.58)$$

$$\chi'(\omega) = \frac{q^2 N f}{m\varepsilon_0} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad (1.59)$$

在  $\omega_0$  附近,  $\omega \approx \omega_0$ , (1.58)和(1.59)式分别简化为:

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 N f}{2m\varepsilon_0\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (1.60)$$

$$\chi'(\omega) = \frac{q^2 N f}{2m\varepsilon_0\omega_0} \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (1.61)$$

图 1.3 是  $\chi(\omega)$  谱线和  $\chi'(\omega)$  谱线.  $\chi(\omega)$  在  $\omega_0$  左右各有一个转折点. 在这两个转折点之外,  $d\chi/d\omega > 0$ , 是正常色散; 在这两个转折点之内,  $d\chi/d\omega < 0$ , 是反常色散. 令  $d\chi/d\omega = 0$ , 由(1.60)式求出转折点的位置:

$$\omega_k = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2} \quad (1.62)$$

由(1.60)和(1.62)式求出:

$$\chi(\omega_k) = \pm \frac{q^2 N f}{2m\varepsilon_0\omega_0\gamma} \quad (1.63)$$

$\chi'(\omega_0)$  呈对称分布, 在  $\omega_0$  处有最大值. 显然, 本征频率  $\omega_0$  也是电子共振跃迁的中心频率. 由(1.61)式得到:

$$\chi'(\omega_0) = \frac{qNf}{m\varepsilon_0\omega_0\gamma} \quad (1.64)$$