普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

高等数学（上）

闫德明 主 编
张建林 董留栓 副主编

清华大学出版社

普通高校“十二五”规划教材
公共基础课系列

高等数学（上）

闫德明　主　编
张建林　董留栓　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要包括适合理工科专科学生和本科少学时学生学习的内容和习题，并对一些习题给出提示和求解思路。编者针对教学的特点，在内容的论述上力求详细、严谨，清楚易懂，还配置了足够数量的习题，供学生课内外练习，并在书末附有习题答案，便于教学。内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程。

本书除可作为高等工科院校本科少学时学生的教材外，还可以供大专性质的专科班、进修班，以及工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/闫德明主编. —北京：清华大学出版社，2012.1
(普通高校"十二五"规划教材·公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-27122-2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①闫…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 222687 号

责任编辑：梁云慈
责任校对：王荣静
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：19.75　**字　数**：467 千字
版　次：2012 年 1 月第 1 版　**印　次**：2012 年 1 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：33.00 元

产品编号：044317-01

前言

本书内容主要包括理工科专科学生和本科少学时学生所必须掌握的高等数学基本知识及其相应的习题，并对一些习题给出提示和求解思路。作者针对教学的特点，在内容的论述上力求详细、严谨，清楚易懂，还配置了足够数量的习题，供学生课内外练习，并在书末附有习题答案，便于教学。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程。

本书由闫德明任主编，张建林、董留栓任副主编。本书分工如下：闫德明编写第一章，董李娜编写第二章，刘海玲编写第三章，董留栓编写第四章，刘彩侠编写第五章，张建林编写第六章，赵恒军编写第七章。其中，用* 标示的教材内容供学有余力的学生选学。

本书可供高等院校理工类本科专业少学时学生使用，还可以供高职高专理工类专业学生使用。

在本书编写的过程中，我们参考了很多专家学者的相关教材，在此特向这些教材的编委致谢，谢谢你们积累的宝贵知识财富。另外由于编者水平有限，在编写的过程中难免出现错误或不妥之处，敬请各位专家学者、广大教师和学生批评指正，提出宝贵意见。

编　者

2011 年 6 月

目录

第一章

函数与极限

高等数学研究的对象是函数，使用的方法是极限. 本章我们讨论这两个重要概念.

第一节　映射与函数

一、集合

1. 集合概念

集合是数学中的一个重要概念，它在现代数学的发展中起着非常重要的作用.

集合是指具有某种特定性质的事物的总体，常用大写拉丁字母 A、B、C、X、Y 等表示. 组成集合的事物称为集合的**元素**，常用小写拉丁字母 a、b、c、x、y 等表示.

a 是集合 M 的元素表示为 $a \in M$，读作 a 属于 M. 如果 a 不是集合 M 的元素表示为 $a \notin M$ 或 $a \overline{\in} M$，读作 a 不属于 M.

由有限个元素构成的集合，称为有限集；由无限多个元素构成的集合，称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种.

列举法：把集合的全体元素一一列举出来.

例如，由 a,b,c,d,e,f,g 七个元素组成的集合 A，可表示为

$$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$$

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如，设 M 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合，可表示为

$$M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

下面是几个常见的数集：

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集：

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}, \quad \mathbf{N}^+ = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合，称为实数集.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合，称为整数集：

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合,称为有理数集:

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$$

若 $x\in A$,则必有 $x\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集,$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$. 例如,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**. 空集记作 $\varnothing$,规定空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

设 A、B 是两个集合,由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**),记作 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时,我们称集合 I 为**全集**或**基本集**. 称 $I\backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^{C}.

集合的运算满足下列法则:

设 A、B、C 为任意三个集合,则

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$,$(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$.

$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$ 的证明:

$x\in(A\cup B)^{C}\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^{C}$ 且 $x\in B^{C}\Leftrightarrow x\in A^{C}\cap B^{C}$,所以 $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$.

设 A、B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**(或**笛卡儿乘积**),记为 $A\times B$,即

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}$即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. **区间和邻域**

设 $a<b$，称数集$\{x|a<x<b\}$为**开区间**，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

类似地有

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**，

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

称为**半开区间**. 其中 a 和 b 称为区间(a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$的端点，$b-a$ 称为区间的**长度**.

以上这些区间都称为**有限区间**.

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，

$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$.

区间$(-\infty,+\infty)$即全体实数的集合.

这些区间都称为**无限区间**.

区间可以在数轴上表示出来，如图 1-1 所示.

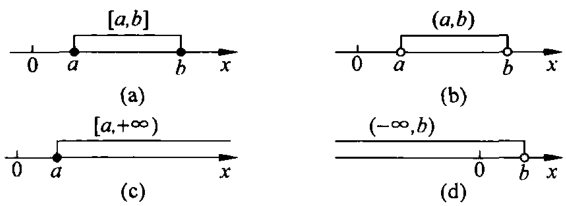

图　1-1

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(图 1-2).

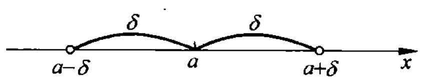

图　1-2

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

二、映射

1. 映射的概念

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f: X \to Y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的**像**，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x)$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个**原像**；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即

$$D_f=X$$

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记为 R_f，或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$$

需要注意的问题：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围 $R_f \subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

例 1-1 设 f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x)=x^2$.

显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y \mid y \geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的. 如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个.

例 1-2 设 $X=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$，$Y=\{(x,0) \mid |x| \leqslant 1\}$，$f: X \to Y$，对每个 $(x,y) \in X$，有唯一确定的 $(x,0) \in Y$ 与之对应.

显然 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$. 在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1,1]$ 上.

例 1-3 f: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$，对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$.

f 是一个映射，定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 **X 到 Y 上的映射**或**满射**；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像

$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射(或双射)**.

上述三例各是什么映射？

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f \to X$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射. 上述三例中哪个映射存在逆映射？

设有两个映射

$$g: X\to Y_1,\quad f: Y_2\to Z$$

其中 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f[g(x)]\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g: X\to Z$$
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)],\quad x\in X$$

注意：映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，$R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合映射. 由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义. 即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

例 1-4 设有映射 g：$\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 f：$[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$. 则映射 g 和 f 构成复映射 $f\circ g$：$\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$$

三、函数

1. 函数概念

定义 1-1 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 f：$D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，通常简记为

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

注意：记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，

$x\in D$”或“$y=f(x),x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“F”，“φ”等. 此时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；二是取使运算式子有意义的自变量值的全体.

例 1-5 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须 $x\neq0$，且 $x^2-4\geqslant0$.

解不等式得 $|x|\geqslant2$.

所以函数的定义域为 $D=\{x\,|\,|x|\geqslant2\}$，或 $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数.

对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“$y\leqslant0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant0$”作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法(公式法)，这在中学里大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的**图形**(图 1-3). 图 1-3 中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

下面是几个特殊函数的例子.

例 1-6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**(图 1-4). 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=[0,+\infty)$.

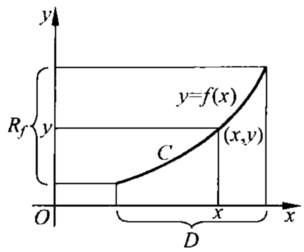

图　1-3

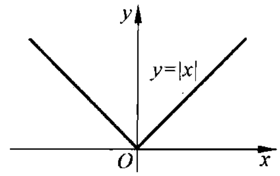

图　1-4

例 1-7　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**(图 1-5). 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$.

例 1-8　设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**,记作 $[x]$. 函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**(图 1-6). 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

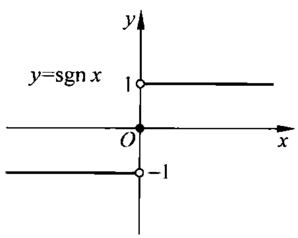

图　1-5

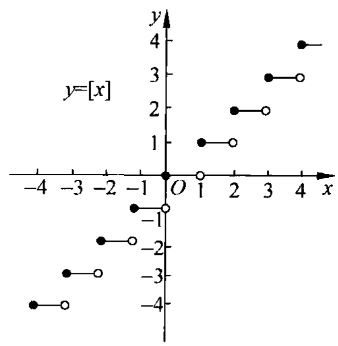

图　1-6

例如,$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-3.5]=-4$.

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数**.

例 1-9　函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

这是一个分段函数,其定义域为 $D=[0,1]\cup(0,+\infty)=[0,+\infty)$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=2\sqrt{x}$；当 $x>1$ 时，$y=1+x$.

例如，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$f(1)=2\sqrt{1}=2$；$f(3)=1+3=4$. 这个函数的图形如图 1-7 所示.

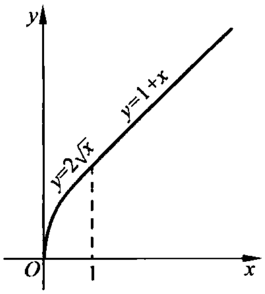

图 1-7

2. 函数的几种特性

1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x)|>M$.

例如

(1) $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的：$|\sin x|\leqslant 1$.

(2) 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的. 或者说它在 $(0,1)$ 内有下界，无上界.

这是因为，对于任一 $M>1$，总有 x_1：$0<x_1<\frac{1}{M}<1$，使

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}>M$$

所以函数无上界.

函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的.

2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(图 1-8).

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少**的(图 1-9).

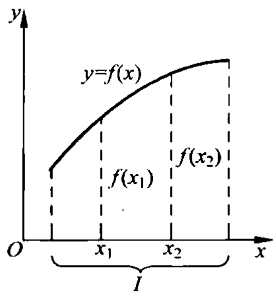

图　1-8

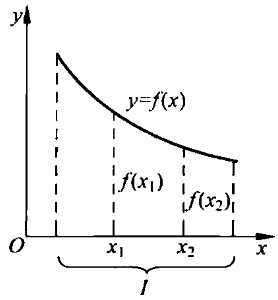

图　1-9

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调增加的,在区间$[0,+\infty)$上是单调减少的,在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的.

3）函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则$-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为**偶函数**(图 1-10).

如果对于任一 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$为**奇函数**(图 1-11)

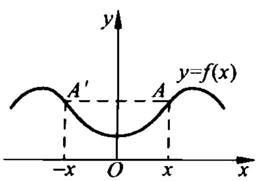

图　1-10

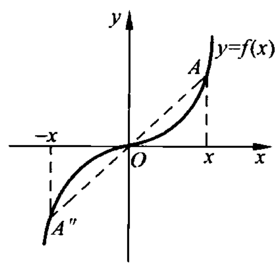

图　1-11

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,$y=x^2$,$y=\cos x$ 都是偶函数. $y=x^3$,$y=\sin x$ 都是奇函数,$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**(图 1-12),l 称为 $f(x)$ 的**周期**.

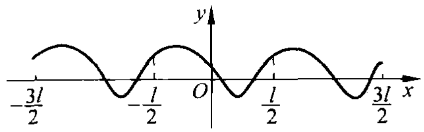

图 1-12

周期函数的图形特点:在函数的定义域内,每个长度为 l 的区间上,函数的图形有相同的形状.

例 1-10 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

3. 反函数与复合函数

设函数 $f: D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$,称此映射 f^{-1} 为函数 f 的**反函数**.

按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有

$$f^{-1}(y)=x$$

这就是说,反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

一般地,$y=f(x), x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x), x\in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数,则 $f: D\to f(D)$ 是单射,于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在,而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数.

把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-13). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点,则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义,有 $a=f^{-1}(b)$,故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点;反之,若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的.

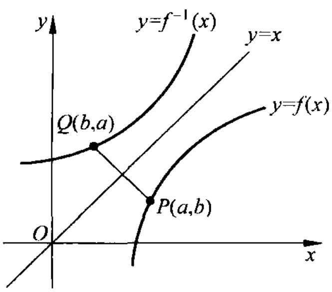

图 1-13

复合函数是复合映射的一种特例,按照通常函数的记号,复合函数的概念可如下表述.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数