学科精英大视野系列丛书

精英数学

七年级

黄东坡◎著

大视野

◎历史钩沉　文化积淀

◎问题览胜　思维锤炼

◎人文关怀　审美引领

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

学科精英大视野系列丛书

精英数学

七年级　黄东坡◎著

大视野

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

鄂新登字 01 号
图书在版编目(CIP)数据

精英数学大视野·七年级/黄东坡著.
武汉:湖北人民出版社,2011.5

ISBN 978-7-216-06659-4

Ⅰ.精…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 237480 号

精英数学大视野
七年级

黄东坡 著

出版发行:湖北长江出版集团
湖北人民出版社
地址:武汉市雄楚大道 268 号
邮编:430070

印刷:仙桃市新华印务有限公司
经销:湖北省新华书店
开本:880 毫米×1230 毫米 1/16
印张:15.5
字数:432 千字
定价:25.00 元
版次:2011 年 5 月第 1 版
印次:2011 年 7 月第 2 次印刷
印数:20 001-30 000
书号:ISBN 978-7-216-06659-4

本社网址:http://www.hbpp.com.cn

前言

俱怀逸兴壮思飞 欲上青天揽明月

——文化视野下的精英数学

一

拿破仑曾说:“百分之二十的法国精英是法兰西民族前进的火车头。”

美国国家研究委员会发表的《人人关心数学教育未来》一书中强调:“国与国之间的竞争是高新技术的竞争,而高新技术竞争的背后是具有创造力的拔尖人才的竞争,很少有人知道,高新技术的本质是数学化的技术。”

本书为有志于升入重点中学的学生而著,为未来学科带头人、各行业领军人而作。追求在广阔的文化背景下,用思想方法武装头脑,用历史名题开启心智,用问题解决锤炼思维,用人文精神滋养心灵,用审美视角引领鉴赏。旨在打造未来精英的核心能力构成:专业素养、理性思维、人文情怀、审美眼光。

二

本书展现了隽永的图景,或数学大师的风采展示,或数学成果的呈现,或数学名著的介绍,或数学重大事件的再现,把抽象的数学化为视觉化的形象,通过图示形象地渗透数学思想方法精神,直观地反映数学与自然、数学与现实、数学与其他学科的联系。在阅读本书过程中,重温厚重而曲折的数学历史,领略数学的力量、神韵、美丽。

本书收录了历史上经典数学名题、趣题,或来自民间传说,或文化名流编撰,或数学大师的研究成果,它们是数学大花园中的奇葩,因内涵丰富、匠心独具而流传千古。在思考这些名题、趣题过程中,从惊讶到思考而开启心智,品鉴经典名题的醇香韵味。

本书汇集了近年国内外中考、竞赛的优秀试题,或引而不发的点拨,或深入浅出的分析,或刨根究底的探索,或开放思维的发散,或言简意赅的总结,或直抵心灵的感悟。在解决这些问题的过程中,感受解题之道、思维之美,体会由一筹莫展、冥思苦想到茅塞顿开、悠然心会的巨大乐趣。

前言

三

潮平两岸阔，风正一帆悬。

走进《大视野》，身临数学文化场景：既有情境，又有历史；既有方法，又有思想；既有真知，又有顿悟；既有趣味，又有哲思。蕴万壑于胸，纳百川于怀。

走进《大视野》，收获的是技巧与方法，激活的是质疑与想象，提升的是意识与美感，生成的是智慧与能力。高远而蔚蓝，广袤而深远。

愿你早日成为未来科技英才、文化精英。

黄东坡

二〇一一年四月于武汉

目录
CONTENTS

知识技能篇

目录
CONTENTS

从远古时代开始，人类就需要记数和测量周围物体，早期的记数方法包括实物分堆、结绳记数、刻痕记数、手指记数等.

结绳而治，屈指可数，手指记数孕育了现在我们熟悉而普遍使用的十进制系统.

广角镜

如果一个学生要成为完全合格的、多方面武装的科学家，他在其发展初期必定来到一座大门，并且必须通过这座门. 在这座大门上用每一种人类语言刻着同样的一句话：这里使用数学语言.

——Q. Hogg

第1讲　质数、合数与因数分解

知能概述

一个大于1的正整数，若除了1与它自身，再没有其他的约数，这样的正整数叫做质数；一个大于1的正整数，除了1与它自身，若还有其他的约数，这样的正整数称为合数. 这样，我们可以按约数个数将正整数分为三类：

$$\text{正整数}\begin{cases}\text{整数 }1\\ \text{质数}\\ \text{合数}\end{cases}$$

质数、合数有下面常用的性质：

1. 1不是质数，也不是合数；2是唯一的偶质数.
2. 若质数 $p|ab$，则必有 $p|a$ 或 $p|b$.
3. 若正整数 a，b 的积是质数 p，则必有 $a=p$ 或 $b=p$.
4. 算术基本定理：任意一个大于1的整数 N 能分解成 k 个质因数的乘积，若不考虑质因数之间的顺序，则这种分解是唯一的，从而 N 可以写成分解形式：

$$N=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{a_k}$$

其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，p_i 为质数，a_i 为非负整数，$(i=1,2,\cdots,k)$.

正整数 N 的正约数的个数为 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)$，所有正约数的和为 $(1+p_1+\cdots+p_1^{a_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{a_2})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{a_k})$.

质数个数

欧基里德在其名著《几何原本》提出并证明了下列命题：

质数有无穷多个.

这个命题证明的关键思路如下：

假设 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 是给定的几个质数，考察将这几个质数之积加上1而得到的新数：

$p_1p_2\cdots p_n+1$

由此展开推理.

问题解决

例1　已知三个不同的质数 a、b、c 满足 $ab^bc+a=2000$，那么 $a+b+c=$________.

（江苏省竞赛题）

解题思路 运用乘法分配律、算术基本定理，从因数分解入手，突破 a 的值.

例 2 一个两位数的个位数字和十位数字变换位置后，所得的数比原来的数大 9，这样的两位数中，质数有（ ）.

A. 1 个 B. 3 个 C. 5 个 D. 6 个

（“希望杯”邀请赛试题）

解题思路 字母示数，从分析这样的两位数的特征入手.

例 3 求这样的质数，当它加上 10 和 14 时，仍为质数.

（上海市竞赛题）

解题思路 由于质数的分布不规律，不妨从最小的质数进行实验，但这样的质数唯一吗？还需按剩余类的方法进行讨论.

例 4 证明对于每一个 n，数$\underbrace{11\cdots1}_{n个}2\underbrace{11\cdots1}_{n个}$是合数.

（全俄数学奥林匹克试题）

解题思路 通过分拆变形，把原数分解为有一个大于 1 又不是自身的因数即可.

广角镜

“万物皆数.”

早在古希腊，毕达哥拉斯学派相信世界是可知的，它有某种固有的结构秩序，而这种秩序和结构又服从数的规律. 数学在古希腊及近代欧洲，都被认为是表现人类理性思维的最典型的科学.

实验只是探索解题思路的一种手段，不能代替证明. 要证明一个正整数是否为质数，其基本方法是利用因数分解，设法指出它的一个异于 1 及自身的正约数.

例5　如果 p 与 $p+2$ 都是大于3的质数，那么请证明：6是 $p+1$ 的约数.

（加拿大数学奥林匹克试题）

解题思路　每一整数可以写成 $6n,6n-1,6n+1,6n-2,6n+2,6n+3$（$n$ 为整数）的一种，其中 $6n,6n-2,6n+2,6n+3$ 在 $n\geqslant1$ 时都是合数，分别被6，2，2，3整除，故质数 p 是 $6n-1$ 或 $6n+1$ 的形式.

例6　在1，0交替出现且以1打头和结尾的所有整数（如101，10101，1010101……）中有多少质数？并请证明你的论断.

（北京市竞赛题）

分析与解　显然，101是个质数，下面证明 $N=\underbrace{101010\cdots01}_{k个1}$ 当 $k\geqslant3$ 时都是合数，注意到 N 是由 k 个1与 $k-1$ 个0组成的 $2k-1$ 位数，则 $11N=11\times\underbrace{10101\cdots01}_{k个1}=\underbrace{111\cdots11}_{2k个1}=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\cdot(10^k+1)(k\geqslant3)$，即 $11N$ 是一个由 $2k$ 个1组成的 $2k$ 位数.

（1）当 k 为不小于3的奇数时，$11\nmid\underbrace{11\cdots11}_{k个1}$，因此必有 $11\mid10^k+1$，即 $\dfrac{10^k+1}{11}=M_1>1$，所以 $N=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times M_1$ 是个合数.

（2）当 k 是不小于3的偶数时，$11\mid\underbrace{11\cdots11}_{k个1}$，即 $\dfrac{\overbrace{11\cdots11}^{k个1}}{11}=M_2>1$，所以 $N=M_2\times(10^k+1)$ 是个合数.

综合（1）、（2），当 $k\geqslant3$ 时，$N=\underbrace{10101\cdots01}_{k个1}$ 必为合数，所以，在101、10101、1010101…中只有101是一个质数.

广角镜

质数被2除，除2外，只能是 $2k+1$ 型的数；质数被3除，除3外，只能是 $3k\pm1$ 型数；依此类推，特别的，质数被6除只能是 $6k\pm1$ 型的数.反之，并不一定成立.

17世纪费马猜想：$F_n=2^{2^n}+1$，当 $n=0,1,2,3,\cdots F_n$ 都是素数，但半个世纪后，欧拉把 F_5 分解为两个因数之积：

$F_5=4294967297$
$=641\times6700417.$

人们至今只找到5个费马质数，即3，5，17，257和65537，尚不知是否有更大的费马质数.

例 7 若一个质数的各位数码经任意排列后仍然是质数，则称它是一个“绝对质数”(如 2,3,5,7,11,13(31),17(71),37(73),79(97),113(131,311),199(919,991),337(373,733),…都是绝对质数). 求证: 绝对质数的各位数码不能同时出现数码 1、3、7 与 9.

（青少年国际城市邀请赛试题）

分析与解 正难则反. 假设一个绝对质数如果同时含有数字 1、3、7、9，由此导出矛盾，这是解题的关键.

一个绝对质数如果同时含有数字 1、3、7、9，则在这个质数的十进制表示中，不可能含有数字 0、2、4、5、6、8，否则，通过适当排列后，这个数能被 2 或 5 整除.

设 N 是一个同时含有数字 1、3、7、9 的绝对质数.

因为 $k_0=7931, k_1=1793, k_2=9137, k_3=7913, k_4=7193, k_5=1937, k_6=7139$ 被 7 除所得的余数分别是 0、1、2、3、4、5、6，所以，如下 7 个正整数

$N_0=\overline{c_1\cdots c_{n-4}7931}=L\cdot 10^4+k_0$,

$N_1=\overline{c_1\cdots c_{n-4}1793}=L\cdot 10^4+k_1$,

……

$N_6=\overline{c_1\cdots c_{n-4}7139}=L\cdot 10^4+k_6$ 中，一定有一个能被 7 整除，这个数就不是质数，矛盾.

刻意练习

1. **炎黄骄子** 菲尔兹奖被誉为“数学界的诺贝尔奖”，只奖励 40 岁以下的数学家. 华人数学家丘成桐、陶哲轩分别于 1982 年、2006 年荣获此奖. 我们知道正整数中有无穷多个质数(素数)，陶哲轩等证明了这样一个关于质数分布的奇妙定理: 对任何正整数 k，存在无穷多组含有 k 个等间隔质数(素数)的数组. 例如，$k=3$ 时，3,5,7 是间隔为 2 的 3 个质数; 5,11,17 是间隔为 6 的 3 个质数; 而________，________，________是间隔为 12 的 3 个质数(由小到大排列，只写一组 3 个质数即可).

（《时代学习报》数学文化节试题）

2. 若质数 m、n 满足 $5m+7n=129$，则 $m+n=$________.

（河北省竞赛题）

广角镜

1963 年，美国数学家乌拉姆在参加一个学术会议时，为消磨时间，他就在笔记本上随手画了一个坐标轴，把 1 放在中心，把 2、3、4、…顺序按逆时针方向螺旋方式一层一层地分布在 1 的周围，然后把质数圈了出来，结果使他十分惊奇，这些带圈的质数都集中在一些斜线上，如图，这就是著名的质数分布的乌拉姆现象.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	30	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	52	85
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

美国教育家杰夫·科尔文在《哪来的天才: 练习中的平凡与伟大》一书中指出: 非凡的成就不取决于天赋，而是坚持不懈的刻意练习.

刻意练习不同于普通练习，普通练习是重复性和无意识的，而刻意练习需要

3. 一个两位质数,如果将它的十位数字与个位数字交换后,仍是一个两位质数,这样的质数可称为“特殊质数”. 这样的“特殊质数”有________个.

(2010 年“希望杯”邀请赛试题)

4. 写出 10 个连续自然数,它们个个都是合数,这 10 个数是________.

(上海市竞赛题)

5. 已知三个质数 m、n、p 的乘积等于这三个质数的和的 5 倍,则 $m^2+n^2+p^2$ 的值为________.

(武汉市竞赛题)

6. 著名的哥德巴赫猜想指出,任何大于 7 的偶数可以恰好写为两个不同素数之和,用这种方法表示偶数 126,两个素数之间最大的差是(　　).

A. 112　　B. 100　　C. 92　　D. 88　　E. 80

(美国高中数学考试题)

7. 若 p 为质数,p^3+5 仍为质数,则 p^5+7 为(　　).

A. 质数　　B. 可为质数也可为合数

C. 合数　　D. 既不是质数也不是合数

(湖北省黄冈市竞赛题)

8. 若 a、b 均为质数,且满足 $a^{11}+b=2089$,则 $49b-a=$(　　).

A. 0　　B. 2007　　C. 2008　　D. 2010

(“五羊杯”竞赛题)

9. 若 $n=20\times30\times40\times50\times60\times70\times80\times90\times100\times110\times120\times130$,则不是 n 的因数的最小素数是(　　).

A. 19　　B. 17　　C. 13　　D. 非上述答案

(上海市竞赛题)

10. 有两个两位数的质数,它们的差等于 6,且它们的平方的个位数字相同,这样的两位质数的组数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2010 年“希望杯”邀请赛试题)

11. 已知 p,$p+2$,$p+6$,$p+8$,$p+14$ 都是质数,则这样的质数 p 共有多少个?

(“五羊杯”竞赛题)

12. 已知正整数 p、q 都是质数,且 $7p+q$ 与 $pq+11$ 也都是质数,试求 p^q+q^p 的值.

(湖北省荆州市竞赛题)

13. 已知 x,y,z 是 3 个小于 100 的正整数,且 $x>y>z$,$x-y$,$x-z$ 及 $y-z$ 均是质数,求 $x-z$ 的最大值.

(“华罗庚金杯”少年数学邀请赛试题)

14. 41 名运动员所穿运动衣号码是 1,2,…,40,41 这 41 个自然数,问:

(1) 能否使这 41 名运动员站成一排,使得任意两个相邻运动员的号码之和都是质数?

(2) 能否让这 41 名运动员站成一圈,使得任意两个相邻运动员的号码之

广角镜

打破习惯,需要更大的专注力,并在名师的指点下,使技能、方法、思想、境界迈向更高的层次.

如图,是早在公元前 3 世纪,古希腊数学家兼哲学家埃拉托色尼为了研究素数在自然数列中的分布而造出的世界上第一张素数表,这种造素数表的方法称为埃拉托色尼的筛选法.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

判断一个正整数是否为质数的方法是:

正整数 a,若所有不大于 $\sqrt{a}$ 的质数都不能整除 a,则 a 一定是质数.

和都是质数？

若能办到，请举一例；若不能办到，请说明理由.

（北京市竞赛题）

15. 已知 p、$3p+2$、$5p+4$、$7p+6$、$9p+8$、$11p+10$ 均为质数，求证：$6p+11$ 是合数.

（捷克和斯洛伐克数学奥林匹克试题）

16. 设 p_1、p_2、p_3、p_4 是 4 个互不相同的质数，且满足

$$\begin{cases}2p_1+3p_2+5p_3+7p_4=162 & ①\\ 11p_1+7p_2+5p_3+4p_4=162 & ②\end{cases}$$

求所有乘积 $p_1p_2p_3p_4$ 的可能值.

（爱尔兰数学奥林匹克试题）

参考答案 问题解决

例 1 $a(b^bc+1)=2^4\times5^3$，因 a、b、c 为质数，故 $a=2$ 或 $a=5$.

当 $a=2$ 时，$b^bc=999=3^3\times37$，得 $b=3$，$c=37$，$a+b+c=42$；

当 $a=5$ 时，$b^bc=399=3\times133=3\times7\times19$（舍去）.

故 $a+b+c=42$.

例 2 选 B 设满足条件的两位数是 $\overline{ab}$，由 $\overline{ba}-\overline{ab}=9$，得 $10b+a-(10a+b)=9$，$b=a+1$，满足 $b=a+1$ 的两位数有 12,23,34,45,56,67,78,89，其中质数有 23,67,89，共 3 个.

例 3 3 符合要求. 当 $p=3k+1$ 时，$p+10=3k+11$，$p+14=3(k+5)$，$p+14$ 是合数；当 $p=3k+2$ 时，$p+10=3(k+4)$ 为合数；当 $p=3k$ 时，只有 $k=1$ 才符合题意.

例 4 原式 $=\underbrace{11\cdots1}_{n+1个}\underbrace{00\cdots0}_{n个}+\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}=\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}(1\underbrace{00\cdots0}_{n个}+1)=\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}(10^n+1)$

故该数是合数.

例 5 若 $p=6n+1(n\geqslant1)$，则 $p+2=6n+3=3(2n+1)$ 为 3 的倍数，且大于 3，故 $p+2$ 不是质数，与已知条件矛盾.

因此，$p=6n-1(n\geqslant1)$，此时，$p+1=6n$ 是 6 的倍数.

参考答案 刻意练习

1. 5,17,29 或 29,41,53，答案不唯一

2. 19 或 25

3. 9 11,13,17,31,37,71,73,79,97 是"特殊质数".

4. 设 10 个连续合数为 $k+2$，$k+3$，$k+4$，…，$k+10$，$k+11$，这里 k 为正整数，则只要取 k 是 2,3,4,…,11 的倍数即可.

5. 78 由 $mnp=5(m+n+p)$ 及 m、n、p 均为质数，则 m、n、p 中必有一个为 5，不妨设 $m=5$，则 $np=5+n+p$，$(n-1)(p-1)=6$，得 $n-1=1$ 或 $n-1=2$，$p-1=6$ 或 $p-1=3$，适合条件的只有 $n=2$，$p=7$，$m^2+n^2+p^2=78$.

6. B $126=113+13, 113-13=100$.

7. C

8. B $a=2, b=2089-2^{11}=2089-2048=41$为质数，符合题意.

9. B 原数$=2^{22}\times3^5\times5^{14}\times7\times11\times13$.

10. D 两位质数共有21个，它们的个位数字只有1，3，7，9，符合条件的个位数字是3和7这一组.

11. $p=5$

12. 由$pq+11>11$且$pq+11$是质数知$pq+11$必为正奇数，从而$p=2$或$q=2$.

(1) 若$p=2$，此时$7p+q$与$2q+11$均为质数，设$q=3k+1$，则$q+14=3(k+5)$不是质数；设$q=3k+2$，则$2q+11=3(2k+5)$不是质数，因此，q应为$3k$型的质数，当然只能是$q=3$.

(2) 若$q=2$，此时$7p+q$与$2p+11$均为质数，设$p=3k+1$，则$7p+2=3(7k+3)$不是质数；设$p=3k+2$，则$2p+11=3(2k+5)$不是质数，因此，p应为$3k$型的质数，$p=3$.

综合(1)、(2)知$p=3, q=2$或$p=2, q=3$，故$p^q+q^p=17$.

13. 因$(x-z)-(x-y)=y-z$，故不可能$x-y$、$x-z$、$y-z$都是奇数，但它们都是质数，故它们当中必有一个是2，显然不可能$x-z=2$，若$x-y=2$，则$x-z$和$y-z$是孪生质数对；若$y-z=2$，则$x-z$和$x-y$是孪生质数对. 而100以内最大的孪生质数对是71和73，$x-z=73$可以实现. 取$x=99, y=97, z=26$或$x=99, y=28, z=26$均可. 故所求$x-z$的最大值为73.

14. (1) 能办到 注意到41与43都是质数，据题意，要使相邻两数的和都是质数，显然，它们只能都是奇数，因此，在这排数中只能一奇一偶相间排列，不妨先将奇数排成一排：1，3，5，7，…，41，在每两数间留有空档，然后将所有的偶数依次反序插在各空档中，得1，40，3，38，5，36，7，34，…，8，35，6，37，4，39，2，41，这样任何相邻两数之和都是41或43，满足题目要求.

(2) 不能办到 若把1，2，3，…，40，41排成一圈，要使相邻两数的和为质数，这些质数都是奇数，故圆圈上任何相邻两数必为一奇一偶，但现有20个偶数，21个奇数，总共是41个号码，由此引出矛盾，故不能办到.

15. (1) 当$p=5k$(k为正整数)时，若p为质数，则$k=1$. 而此时$11p+10=65$不是质数，矛盾.

(2) 当$p=5k+1$时，若$3p+2=5(3k+1)$为质数，则$k=0$，而此时$p=1$，矛盾.

(3) 当$p=5k+2$时，$7p+6=5(7k+4)$必为合数.

(4) 当$p=5k+3$时，$9p+8=5(9k+7)$也必为合数.

因此，p必为$5k+4$的形式，此时，$6p+11=5(6k+7)$必为合数.

16. 由于p_1、p_2、p_3、p_4互不相同，则其中至多有一个为偶数. 若全为奇数，则方程①的左端为奇数. 因此，p_2、p_3、p_4其中之一是偶质数2.

由方程②知$p_4\neq2$，得$p_2=2$或$p_3=2$.

(1) 当$p_2=2$时，原方程变为$\begin{cases}2p_1+5p_3+7p_4=156,\\11p_1+5p_3+4p_4=148.\end{cases}$

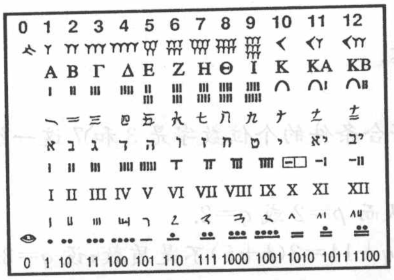
相减得$9p_1-3p_4=-8$，不成立.

(2) 当$p_3=2$时，原方程变为$\begin{cases}2p_1+3p_2+7p_4=152,\\11p_1+7p_2+4p_4=152.\end{cases}$

相减得$9p_1+4p_2-3p_4=0$. 因此，$p_2=3$.

进一步得$p_1=5, p_4=19$.

因此，方程组的唯一解为$(p_1, p_2, p_3, p_4)=(5,3,2,19)$，故$p_1p_2p_3p_4=570$.



印度—阿拉伯数字·巴比伦数字·希腊数字·埃及象形文数字·中国手写体数字·希伯来数字·中国筹算数码·罗马数字·埃及僧侣文数字·玛雅数字·二进制数码

数学的历史并不是具体的历史，而是抽象的历史，是创造思想、发现模式的历史.

这就是数学：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命，她唤起心神、澄清智慧，她涤尽我们与生俱来的蒙昧与无知.

广角镜

整数的简单构成，若干世纪以来一直是使数学获得新生的源泉.

——伯克霍夫

第2讲　奇数、偶数与奇偶分析

知能概述

整数按能否被2整除分为两大类：奇数和偶数，奇数与偶数有下列基本性质：

1. 奇数≠偶数.
2. 两个整数相加(减)或相乘，结果的奇偶性如下表所示：

±	奇	偶
奇	偶	奇
偶	奇	偶

×	奇	偶
奇	奇	偶
偶	偶	偶

3. 若干个奇数之积是奇数，偶数与任意整数之积是偶数；偶数个奇数的和为偶数，若干个偶数的和为偶数.
4. 设 m、n 是整数，则 $m\pm n$，$|m\pm n|$ 的奇偶性相同.
5. 设 m 是整数，则 m 与 $|m|$、m^n 的奇偶性相同.

奇偶性是整数的固有属性，通过分析整数的奇偶性来解决问题的方法叫奇偶分析法.

问题解决

例1　已知三个质数 a、b、c 满足 $a+b+c+abc=99$，那么 $|a-b|+|b-c|+|c-a|$ 的值等于________.

（"希望杯"邀请赛试题）

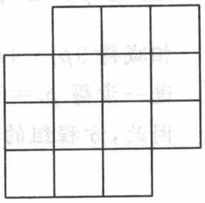
解题思路　运用奇数偶数、质数合数性质，不断简化已知等式.

涂色解题

高莫端，当代应用数学家，美国国际商业机器公司(IBM)的研究人员. 20世纪60年代，在运筹学"线性整数规划"问题研究上，因提出"割平面法"而闻名.

他曾对下面问题感兴趣.

下图是由14个边长为1的小方格组成的残棋图，你能否把它剪成七块 1×2 的小长方形？



例 2　已知 a、b、c 三个数中有两个奇数、一个偶数，n 是整数，如果 $s=(a+n+1)(b+2n+2)(c+3n+3)$，那么(　　).

A. s 是偶数　　B. s 是奇数

C. s 的奇偶性与 n 的奇偶性相同　　D. s 的奇偶性不能确定

（江苏省竞赛题）

解题思路　从和的奇偶性来研究积的奇偶性.

例 3　假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数 $1, 2, \cdots, n$ 的某种排列. 证明：如果 n 是奇数，那么乘积 $(a_1-1)\times(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 是偶数.

（匈牙利数学奥林匹克试题）

解题思路　转换角度思考问题，化积的奇偶性为和的奇偶性来研究.

例 4　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $+1$ 或 -1，并且 $x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_6+\cdots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1+x_{n-1}x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3=0$. 证明：$n$ 能被 4 整除.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题）

解题思路　分两步证明：先证明 n 是偶数 $2k$，再证明 k 是偶数，证明的关键是从整数入手，挖掘隐含的一个等式.

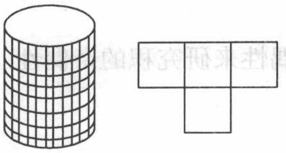
广角镜

对同一个数学对象，从两个方向考虑（n 项和与积），再将这两个方向合在一起整体考虑，得出结论，这叫计算两次原理，通过计算两次可以建立方程，证明恒等式等.

应用整数的奇偶性解题，常需变换角度去考察问题，从而化难为易.

例 5 高为 50 cm，底面周长为 50 cm 的圆柱，在此圆柱的侧面上划分（如图所示）边长为 1 cm 的正方形，用四个边长为 1 cm 的小正方形构成“T”字形，用此图形是否能拼成圆柱侧面？试说明理由.

（汉城国际数学竞赛题）



解 不能，理由如下：因为圆柱侧面是 50×50 的正方形，将其黑白相间染色，则黑格与白格各有偶数个，又因为每个“T”字形含有 3 个或 1 个黑格，若能用“T”字形纸片拼成 50×50 的正方形，则需要 $(50\times50)\div4=625$ 个“T”字形，而 625 个“T”字形含有奇数个黑格，矛盾，因此，不可能拼成.

广角镜

奇数偶数，是用整数的两种状态来研究整数.

奇偶性与二值状态相应，如电灯开与关、亮与灭，面向南或北，杯口向上与向下，都是两种状态，皆可用奇、偶来描述，用奇偶性来分析.

用染色法或赋值法进行奇偶分析，有时使解题更为直观、简洁.

例 6 有 1997 枚硬币，其中 1000 枚国徽朝上，997 枚国徽朝下. 现要求每一次翻转其中任意 6 枚，使它们的国徽朝向相反，问能否经过有限次翻转之后，使所有硬币的国徽都朝上？给出你的结论，并给予证明.

（太原市竞赛题）

解 不能，理由如下：将国徽朝上赋予“+1”，朝下赋予“−1”，则 1997 枚硬币的国徽朝向情况可用 1997 个数乘积表示，若这些数之积为 −1（或 +1），表明有奇数（或偶数）枚国徽朝下，开始时，其乘积为 $(+1)^{1000}\cdot(-1)^{997}=-1$，每次翻转 6 枚硬币，即每次改变 6 个数的符号，其结果是 1997 个数之积仍为 −1，经有限次翻转后，这个结果总保持不变，即国徽朝下的硬币永远有奇数枚，故回答是否定的.

例 6 通过赋值法，把实际问题转化为数学问题，把抽象的推理转化为具体的计算.

所谓赋值法，就是在解题时，将问题中的某些元素用适当的数表示，然后利用这些数值的大小、正负性、奇偶性等进行推理论证的一种解题方法.

例 7 开始时，5×5 方格表中的每个方格中都填有一个 0，每一步选取两个具有公共边的方格，将其中的数同时加 1 或同时减 1. 若干步后，各行、各列之数的和彼此相等. 求证：所经过的步数为偶数.

（俄罗斯数学奥林匹克试题）

证明 若一步中所选的两个方格在同一行，则称为“水平步”，若在同一列，则称为“竖直步”.