普通高等教育“九五”国家级重点教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

SIGNALS & SYSTEMS

信号与系统

第三版

下 册

郑君里 应启珩 杨为理

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"九五"国家级重点教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

信号与系统

Xinhao yu Xitong

第三版

下　册

郑君里　应启珩　杨为理

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书第一、二版分别于1981年和2000年与读者见面。第三版与前两版之研究范围、结构层次大体相同，仍然是讨论确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时域到变换域，从连续到离散，从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

第三版保持了前两版之特色：注重结合基本理论融入各类工程应用实例，新版对这些例子进行了修订和更新，使全书具有强烈的时代感；保留了第六章信号矢量空间分析的内容，并有适当修订与补充，从而突显本书与国内、外同类教材的重要区别；全书结构有较大灵活性，可适用于通信电子类和非通信电子类的多种理工科专业的本科生教学。

全书共十二章，分两册装订，上、下册各六章，各章目与第二版基本一致。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统．下册/郑君里，应启珩，杨为理编著．—3版．
北京：高等教育出版社，2011.3
ISBN 978-7-04-031518-9

Ⅰ．①信… Ⅱ．①郑… ②应… ③杨… Ⅲ．①信号系统-高等学校-教材 Ⅳ．①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第262026号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1981年10月第1版
开　　本	787×960　1/16		2011年3月第3版
印　　张	26	**印　　次**	2011年3月第1次印刷
字　　数	480 000	**定　　价**	37.70元

物料号　31518-00

作 者 声 明

郑重声明

策划编辑　杜　炜

责任编辑　曲文利

封面设计　于文燕

责任绘图　宗小梅

版式设计　马敬茹

责任校对　胡晓琪

责任印制　尤　静

目　录

第七章 离散时间系统的时域分析

7.1 引　言

离散时间系统的研究源远流长。17 世纪发展起来的经典数值分析技术奠定了这方面的数学基础。20 世纪 40 和 50 年代，抽样数据控制系统的研究取得了重大进展。60 年代以后，计算机科学的进一步发展与应用标志着离散时间系统的理论研究和实践进入了一个新阶段。1965 年，库利（J.W.Cooley）与图基（J.W.Tukey）在前人工作的基础上发表了计算傅里叶变换高效算法的文章，这种算法称为快速傅里叶变换，缩写为 FFT。FFT 算法的出现引起了人们的巨大兴趣，迅速地得到了广泛应用。与此同时，超大规模集成电路研制的进展使得体积小、重量轻、成本低的离散时间系统有可能实现。在信号与系统分析的研究中，人们开始以一种新的观点——数字信号处理的观点来认识和分析各种问题。

20 世纪末期，数字信号处理技术迅速发展，应用日益广泛，例如在通信、雷达、控制、航空与航天、遥感、声呐、生物医学、地震学、核物理学、微电子学等诸多领域已卓见成效。随着应用技术的发展，离散时间信号与系统自身的理论体系逐步形成，并日趋丰富和完善。

离散时间系统的分析方法在许多方面与连续时间系统的分析方法有着并行的相似性。我们熟知，对于连续时间系统，其数学模型是用微分方程描述的。与之相应，离散时间系统是由差分方程表示的。差分方程与微分方程的求解方法在相当大的程度上一一对应。在连续时间系统中，卷积方法的研究与应用有着极其重要的意义；与此类似，在离散时间系统的研究中，卷积和（简称卷积）的方法具有同样重要的地位。在连续时间系统中，广泛地应用变换域方法——拉普拉斯变换与傅里叶变换方法，并运用系统函数的概念来处理各种问题；在离散时间系统中也同样普遍地运用变换域方法和系统函数的概念，这里的变换域方法包括 z 变换、离散傅里叶变换以及其他多种离散正交变换（如沃尔什变换、离散余弦变换等）。

在第三章和第五章曾讨论连续信号的抽样，这仅仅是给出离散时间信号的方式之一，作为离散时间信号源更为一般的例子如数字计算机系统的输出、输入信号以及各种直接给出的时间序列。通常，这里产生的各种数据流不一定与连

续信号有某种依从关系,因此,不能把离散时间信号狭隘地理解为连续信号的抽样或近似。

参照连续时间系统的某些方法学习离散时间系统理论的时候,必须注意它们之间存在着一些重要差异,这包括数学模型的建立与求解、系统性能分析以及系统实现原理等。正是由于差异的存在,才使得离散时间系统有可能表现出某些独特的性能。

与连续时间系统相比较,离散时间系统具有下列优点:容易做到精度高、可靠性好,便于实现大规模集成,从而在重量和体积方面显示其优越性。一般的数字系统中都包括有存储器,存储器的合理运用可以使系统具有灵活的功能,这些功能在连续时间系统中往往难以实现。此外,对于连续时间系统,通常只注重一维变量的研究,而在离散时间系统中,二维或多维技术得到广泛应用。近年来,由于可编程器件制作技术日趋成熟,对于数字系统容易利用可编程技术,借助于软件控制,适应用户设计与修改系统的各种需求,大大改善了设备的灵活性与通用性,在连续系统中这是难以实现的。

离散时间系统具有如此显著的优点,因而,离散时间系统(主要是数字信号处理系统)的应用几乎涵盖了国民经济建设与科学技术的所有领域,数字化技术逐步渗透到人类工作与生活的每个角落。近年来,人们提出了“数字地球”、“数字化世界”以及“数字化生存”等概念,以数字化的观念认识我们生存的这颗星球,充分利用数字信息技术推动社会的进步与发展。有人认为:在今天的孩童眼中,以数字化技术形成的光盘和信息网络就好像成年人眼中的空气和水一样平常。数字化生存如同一条鸿沟横亘于两代人之间,年长者必须迎头赶上。数字化浪潮正在席卷全球,数字信号处理技术正在使人类生产和生活质量提高到前所未有的新境界。

另一方面,不能认为数字化技术将取代一切连续时间系统的应用。实际上,人类在自然界中遇到的待处理信号相当多的部分都是连续时间信号,借助离散时间系统对其处理时,需经 A/D、D/A 转换,转换部分及其前后往往不能避免连续时间系统的出现;此外,当工作频率较高时,直接采用数字集成器件尚有一些困难,有时,用连续时间系统处理或许比较简便。因此,模拟信号处理与传输系统仍在一定范围内发挥作用。

在许多通信与电子设备中,经常遇到连续时间系统与离散时间系统组合构成的“混合系统”。例如,“软件无线电”(software radio)是继模拟通信、数字通信之后的最新一代通信技术。它是充分数字化的无线电通信系统,其 A/D、D/A 转换器尽可能靠近天线,在射频端与终端最低限度保留了部分连续时间系统。因而可将此系统看成一台带有天线的“超级”计算机。它充分发挥了数字系统的优点,利用可编程技术选择多种功能和体制,在通用化、模块化、兼容性、灵活性

诸方面使无线电通信设备的面貌焕然一新。软件无线电显示了当代数字化技术发展的最新特征，也说明了适当利用连续时间系统的必要性。实际上，在研究与开发新产品过程中，最佳地协调模拟与数字部件的组合已成为系统设计师的首要职责。

本章和第八章介绍离散时间系统的基本概念和基本分析方法，仍然是从时间域到变换域。第九章将连续与离散时间系统的某些问题交叉并行讨论，包括反馈及系统的状态空间分析。

7.2 离散时间信号——序列

在绪论中曾定义，表示离散信号的时间函数，只在某些离散瞬时给出函数值。因此，它是时间上不连续的“序列”。通常，给出函数值的离散时刻之间隔是均匀的。若此间隔为 T，以 $x(nT)$ 表示此离散时间信号，这里，nT 是函数的宗量，n 取整数（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。在离散信号传输与处理设备中，有时将信号寄放在存储器中，可以随时取用。离散时间信号的处理也可能是先记录、后分析（即所谓“非实时”的），短时间存入的数据要在较长时间内才能完成分析。因此，考虑到这些因素，对于离散时间信号来说，往往不必以 nT 作为宗量，可以直接以 $x(n)$ 表示此序列。这里，n 表示各函数值在序列中出现的序号。也可以说，一个离散时间信号就是一组序列值的集合 $\{x(n)\}$。为书写简便，以 $x(n)$ 表示序列，不再加注外面的括号。$x(n)$ 可写成一般闭式的表达式，也可逐个列出 $x(n)$ 值。通常，把对应某序号 n 的函数值称为在第 n 个样点的“样值”。

离散时间信号也常用图解（即波形）表示，线段的长短代表各序列值的大小，有时，可将它们的端点连接起来。例如，图 7-1 示出某序列 $x(n)$ 的波形。虽然在此图中横轴绘成一条连续的直线，但是必须认识到，$x(n)$ 仅对 n 的整数值才有定义，对于 n 的非整数值，$x(n)$ 没有意义。

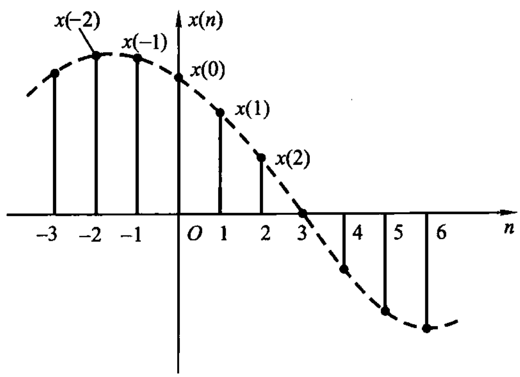

图 7-1 离散时间信号的图形

与连续时间系统的研究类似，在离散系统分析中，经常遇到离散时间信号的运算，包括两信号的相加、相乘以及序列自身的移位、反褶、尺度倍乘以及差分、累加等。

序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 相加是指两序列同序号的数值逐项对应相加构成一个新

序列 $z(n)$

$$z(n)=x(n)+y(n) \tag{7-1}$$

类似地，二者相乘表示同序号样值逐项对应相乘构成一个新的序列 $z(n)$

$$z(n)=x(n)y(n) \tag{7-2}$$

序列延时 $x(n-m)$ 是指原序列 $x(n)$ 逐项依次右移（后移）m 位后给出一个新序列

$$z(n)=x(n-m) \tag{7-3}$$

若向左移位（向前移位），其表达式为

$$z(n)=x(n+m) \tag{7-4}$$

序列的反褶表示将自变量 n 更换为 $-n$，表达式为

$$z(n)=x(-n) \tag{7-5}$$

序列的尺度倍乘将波形压缩或扩展，若将自变量 n 乘以正整数 a，构成 $x(an)$ 为压缩，而 $x\left(\frac{n}{a}\right)$ 则为波形扩展。必须注意，这时要按规律去除某些点或补足相应的零值。因此，也称这种运算为序列的“重排”。

例 7-1　若 $x(n)$ 波形如图7-2(a)所示，求 $x(2n)$ 和 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 的波形。

解

$x(2n)$ 波形如图 7-2(b)所示，这时，对应 $x(n)$ 波形中 n 为奇数的各样值已不存在，只留下 n 为偶数的各样值，波形压缩。而 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 波形如图 7-2(c)所示，图中，对于 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 的 n 为奇数值各点应补入零值，n 为偶数值各点取得 $x(n)$ 波形中依次对应的样值，因而波形扩展。

与连续时间信号的微分、积分运算相对应，离散时间信号分析过程中往往需要进行差分和累加运算。差分运算是指相邻两样值相减，其中，前向差分以符号 $\Delta x(n)$ 表示

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n) \tag{7-6}$$

而后向差分 $\nabla x(n)$ 表达式为

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1) \tag{7-7}$$

累加运算的结果表示为

$$z(n)=\sum_{K=-\infty}^{n} x(K) \tag{7-8}$$

注意对于给定的信号 $x(K)$，当指定 n 值后 $z(n)$ 为确定的数值。当然，这里已假定式中无限项取和是收敛的。

此外，有时需要论及序列的能量，序列 $x(n)$ 的能量定义为

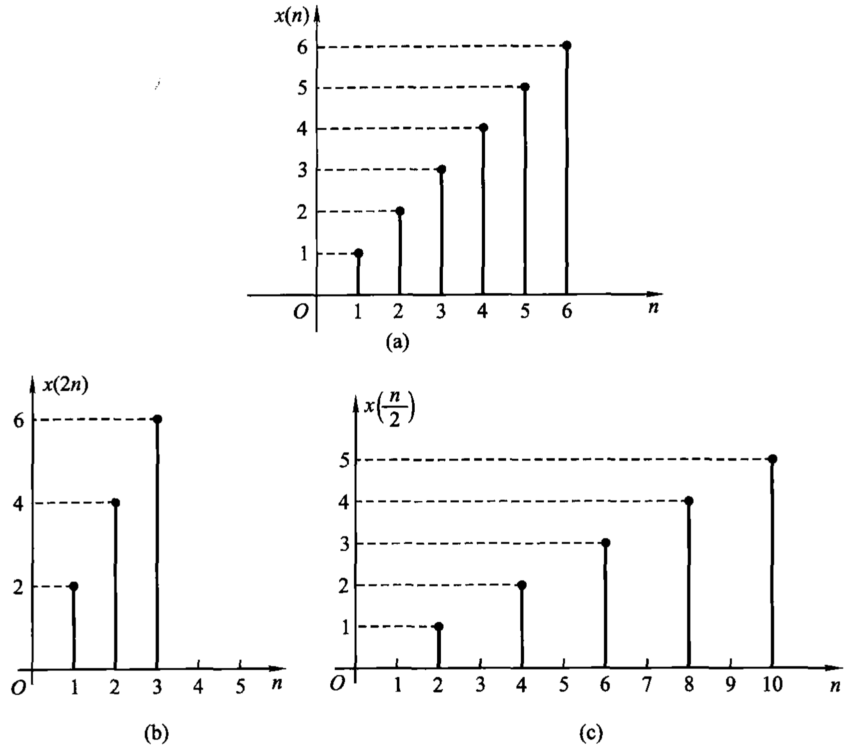

图 7-2 例 7-1 的波形

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \tag{7-9}$$

下面介绍一些常用的典型序列：

(1) 单位样值信号(unit sample 或 unit impulse)

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases} \tag{7-10}$$

此序列只在 $n=0$ 处取单位值 1，其余样点上都为零，如图 7-3 所示。也称为“单位取样”、“单位函数”、“单位脉冲”或“单位冲激”①。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$。但是，应注意它们之间的重要区别，$\delta(t)$ 可理解为在 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅度为无限大的信号，或由分配函数定义；而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 点取有限值，其值等于 1。

① 为便于读者查阅参考书，把可能遇到的几种名称都已列上。

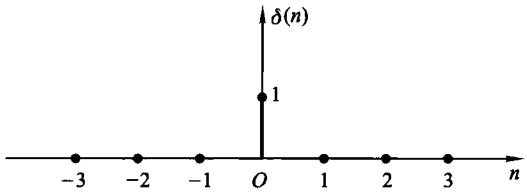

图 7－3　单位样值信号

（2）单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geqslant 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases} \tag{7-11}$$

它的图形如图 7－4 所示。类似于连续时间系统中的单位阶跃信号$u(t)$。但应注意$u(t)$在 $t=0$ 点发生跳变，往往不予定义$\left(\text{或定义为}\frac{1}{2}\right)$，而$u(n)$在 $n=0$ 点明确规定为

$$u(0)=1$$

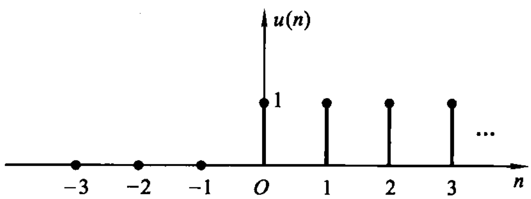

图 7－4　单位阶跃序列

（3）矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leqslant n\leqslant N-1)\\ 0 & (n<0, n\geqslant N)\end{cases} \tag{7-12}$$

它从 $n=0$ 开始，到 $n=N-1$，共有 N 个幅度为 1 的数值，其余各点皆为零（见图 7－5）。类似于连续时间系统中的矩形脉冲。显然，矩形序列取值为 1 的范围也可从 $n=m$ 到 $n=m+N-1$。这种序列可写作$R_N(n-m)$。

图 7－5　矩形序列

以上三种序列之间有如下关系

$$u(n)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(n-K) \tag{7-13}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{7-14}$$

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{7-15}$$

(4) 斜变序列

$$x(n)=nu(n) \tag{7-16}$$

见图 7-6。它与连续时间系统中的斜变函数 $f(t)=t$ 相像。类似地,还可以给出 $n^2u(n)$, $n^3u(n)$, $\cdots$, $n^ku(n)$ 等序列。

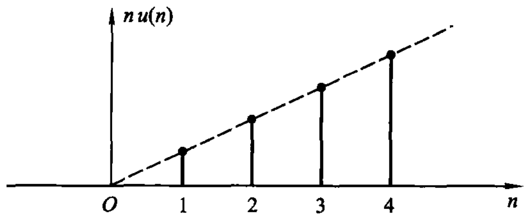

图 7-6 $nu(n)$序列

(5) 指数序列

$$x(n)=a^nu(n) \tag{7-17}$$

当 $|a|>1$ 时序列是发散的, $|a|<1$ 时序列收敛, $a>0$ 序列都取正值, $a<0$ 序列在正、负摆动。分别如图 7-7(a)~(d)所示。此外,还可能遇到 $a^{-n}u(n)$ 序列,其图形请读者练习画出。

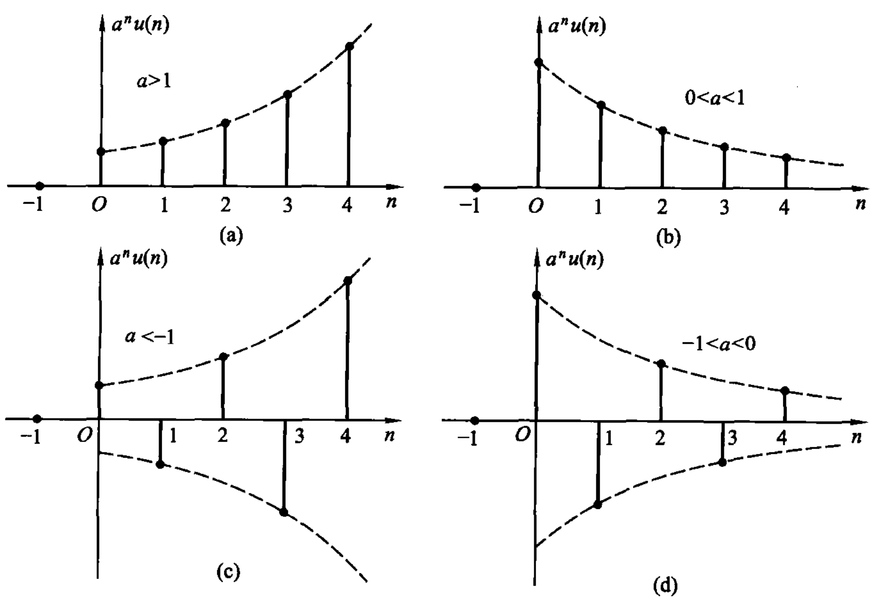

图 7-7 指数序列

(6) 正弦序列

$$x(n)=\sin(n\omega_0) \tag{7-18}$$

式中 ω_0 是正弦序列的频率，它反映序列值依次周期性重复的速率。例如 $\omega_0=\frac{2\pi}{10}$，则序列值每 10 个重复一次正弦包络的数值。若 $\omega_0=\frac{2\pi}{100}$，则序列值每 100 个循环一次。图 7-8 示出 $\omega_0=0.1\pi$ 的情形，每经 20 个序列其值循环。显然，若$\frac{2\pi}{\omega_0}$为整数时，正弦序列才具有周期$\frac{2\pi}{\omega_0}$，若$\frac{2\pi}{\omega_0}$不是整数，而为有理数，则正弦序列还是周期性，但其周期要大于$\frac{2\pi}{\omega_0}$，若$\frac{2\pi}{\omega_0}$不是有理数，则正弦序列就不是周期性的。无论正弦序列是否呈周期性，都称 ω_0 为它的频率。

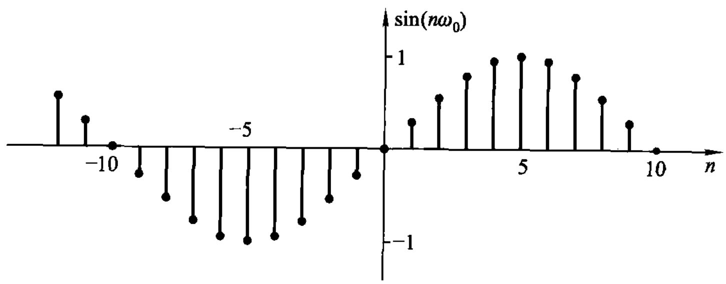

图 7-8　正弦序列 $\sin(n\omega_0)(\omega_0=0.1\pi)$

对于连续信号中的正弦波抽样，可得正弦序列。例如，若连续信号为

$$f(t)=\sin(\Omega_0 t)$$

它的抽样值写作

$$x(n)=f(nT)=\sin(n\Omega_0 T)$$

因此有

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$$

式中 T 是抽样间隔时间，f_s 是抽样频率$\left(f_s=\frac{1}{T}\right)$。为区分 ω_0 与 Ω_0，称 ω_0 为离散域的频率（正弦序列频率），而 Ω_0 为连续域的正弦频率。可以认为 ω_0 是 Ω_0 对于 f_s 取归一化之值$\frac{\Omega_0}{f_s}$。

与正弦序列相对应，还有余弦序列

$$x(n)=\cos(n\omega_0) \tag{7-19}$$

(7) 复指数序列

序列也可取复数值，称为复序列，它的每个序列值都可以是复数，具有实部与虚部。

复指数序列是最常见的复序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$$
$$=\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 n) \tag{7-20}$$

复序列也可用极坐标表示

$$x(n)=|x(n)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]} \tag{7-21}$$

对于上述复指数序列

$$|x(n)|=1$$
$$\arg[x(n)]=\omega_0 n$$

最后简要讨论离散时间信号的分解。一种常用的分解方法是将任意序列表示为加权、延迟的单位样值信号之和

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{7-22}$$

很明显,这是由于

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

$$x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n) & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

因此,式(7-22)成立。在7.6节将运用这一概念引入“卷积和”。

7.3　离散时间系统的数学模型

一个离散时间系统,其激励信号$x(n)$是一个序列,响应$y(n)$为另一序列,示意如图7-9所示。显然,此系统的功能是完成$x(n)$转变为$y(n)$的运算。

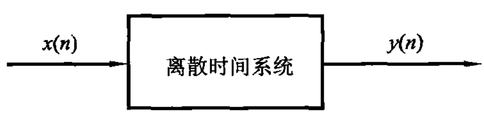

图7-9　离散时间系统

按离散时间系统的性能,可以划分为线性、非线性、时不变、时变等各种类型。目前,最常用的是“线性、时不变系统”。本书的讨论范围也限于此。

在绪论1.7节曾给出线性时不变系统的基本特性。这里,针对离散时间系统的特点再作一些说明。

线性离散时间系统应满足均匀性与叠加性。均匀性与叠加性的意义是:对于给定之系统,若$x_1(n)$,$y_1(n)$和$x_2(n)$,$y_2(n)$分别代表两对激励与响应,则当激励序列是$c_1x_1(n)+c_2x_2(n)$时(c_1,c_2分别为常数),系统的响应为$c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$。此特性示意于图7-10。

对于时不变系统(或称移不变系统),在同样起始状态之下系统响应与激励施加于系统的时刻无关。若激励$x(n)$产生响应$y(n)$,则激励$x(n-N)$产生响

应$y(n-N)$。此特性示于图 7－11，它表明，若激励位移 N，响应也延迟 N。

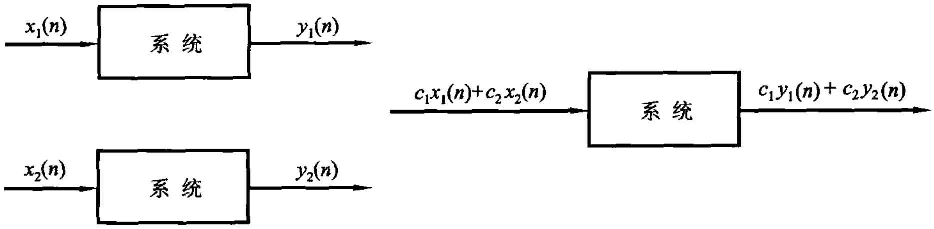

图 7－10　线性系统的均匀性与叠加性

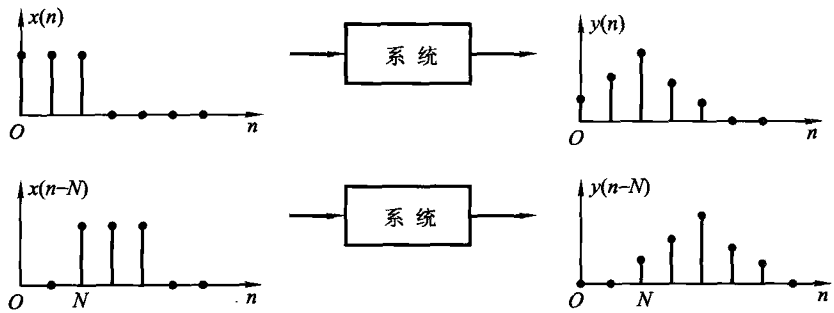

图 7－11　时不变系统特性

在连续时间系统中，信号是时间变量的连续函数，系统可用微分、积分方程式来描述。对于离散时间系统，信号的变量 n 是离散的整型值，因此，系统的行为和性能需用差分方程式来表示。

微分积分方程由连续自变量的函数 $f(t)$ 及其各阶导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)$，…或积分等项线性叠加组成。在差分方程中，构成方程式的各项包含有离散变量的函数 $x(n)$，以及此序列之序数增加或减少的移位函数 $x(n+1)$，$x(n+2)$，…，$x(n-1)$，$x(n-2)$，…。

在连续时间系统中，系统内部的数学运算关系可归结为微分（或积分）、乘系数、相加。与此对应，在离散时间系统中，基本运算关系是延时（移位）、乘系数、相加。在连续时间系统中，通常是利用 R，L，C 等基本电路元件组成网络，以完成所需的功能。但是对于离散时间系统，它的基本单元是延时（移位）元件、乘法器、相加器等。在时间域描述中，以符号 $\frac{1}{E}$ 表示单位延时（$\frac{1}{E}$ 的意义将在 7.4 节说明，也可用符号“T”或符号“D”表示单位延时）。以符号 Σ 表示两序列相加。