工科类本科

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数同步学习辅导

陈绍林 唐道远 卞兰芸 李海霞 编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

工科类本科

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数同步学习辅导

■ 陈绍林 唐道远 卞兰芸 李海霞 编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步学习辅导/陈绍林,唐道远,卞兰芸,李海霞编.—武汉:武汉大学出版社,2011.7
21 世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-08718-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①陈… ②唐… ③卞… ④李… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 077785 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:杜　枚

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:武汉理工大印刷厂
开本:787×1092　1/16　印张:9　字数:188 千字　插页:1
版次:2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-08718-7/O·452　定价:15.00 元

21世纪高等学校数学系列教材

编　委　会

内容简介

本书是作者所编的《线性代数》(武汉大学出版社 2011 年出版)的配套学习辅导书,主要面向使用该教材的读者。

全书与教材一致分为 5 章,内容涉及行列式,矩阵和矩阵的初等变换,向量组的线性相关性,线性方程组,相似矩阵与二次型。每章内容包括基本要求、内容提要、学习要点、释疑解难、习题解答五个栏目。针对学生在学习中常常遇到的问题,在“释疑解难”部分中编选出若干个问题予以分析和解答,以帮助读者加深对学习内容的理解。“习题解答”部分对教材中全部习题作出解答,注重阐明解题的思路和方法,并作出规范解答。本书相对于教材有一定的独立性,可以作为线性代数课程的学习参考书。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前　言

本书是作者所编的《线性代数》(武汉大学出版社 2011 年出版)的配套学习辅导书。全书按教材的章节顺序逐章编写，每章包括以下几部分内容：

一、基本要求，主要根据国家教育部高教司颁布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”确定，同时也根据当前的教学实际作了少量修改并细化。

二、内容提要，归纳本章的主要内容。

三、学习要点，概括地阐明本章的重点和学习的关键。

四、释疑解难，针对本章的重点内容和较难理解的内容，以及学生在学习本章时常常遇到的问题，编选出若干个问题予以分析和解答。

五、习题解答，对教材中全部习题作出解答，注重阐明解题的思路和方法，并作出规范解答。

本书由陈绍林、唐道远、卞兰芸、李海霞集体编写。其中李海霞负责第 1 章，卞兰芸负责第 2 章，陈绍林负责第 3 章、第 4 章，唐道远负责第 5 章。全书由陈绍林、唐道远统稿，刘金舜主审。

限于作者的水平，书中不足之处在所难免，恳请同行和读者批评指正。

作　者

2011 年 3 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

§1.1　基本要求

1. 会用对角线法则计算二阶行列式和三阶行列式.
2. 掌握 n 阶行列式的定义及性质.
3. 了解代数余子式的定义及性质.
4. 会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.
5. 掌握克莱姆法则.

§1.2　内容提要

1.2.1　全排列及其逆序数

1. 全排列：把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列.

2. 逆序和逆序数：在一个排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_s, i_t, \cdots, i_n)$ 中，若 $i_s > i_t$，则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记为 $t(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，若 t 为奇数，则称 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 为奇排列，若 t 为偶数，则称 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 为偶排列.

1.2.2　n 阶行列式的定义.

1. 行列式的定义

定义 1.1　n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中，$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，求和符号 $\sum\limits_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)}$ 是对所有排列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 求和.

n 阶行列式 D 中所含的 n^2 个数称为 D 的元素，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为

D 的(i,j) 元.

2. 二阶行列式和三阶行列式适用对角线法则.

3. 由 n 阶行列式的定义可以得到一些特殊行列式：

(1) 上三角形行列式、下三角形行列式等于主对角线上元素之积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 主对角行列式等于对角线元素之积，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(3) 次对角行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

1.2.3 对换

定义 1.2 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的操作称为对换，将相邻两个元素对换，称为相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 1.1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定义 1.3 n 阶行列式也可以定义为

$$D = \sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

1.2.4 行列式的性质

性质 1.1 行列式 D 与 D 的转置行列式 D^T 相等.

性质 1.2 对换行列式的两行(列)，行列式变号.

性质 1.3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘该行列式.

推论 1.2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的符号外面.

性质 1.4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则该行列式等于零.

性质 1.5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记为 c_i+kc_j),有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{c_i+kc_j}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记为 r_i+kr_j)　$(i\neq j)$

1.2.5　行列式按行(列)展开

代数余子式　把 n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称 A_{ij} 为元 a_{ij} 的代数余子式.

引理 1.1　一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零,那么该行列式等于 a_{ij} 与其代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$

定理 1.2　行列式等于该行列式的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即为行列式按行(列)展开法则,有

按第 i 行展开　$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

按第 j 列展开　$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$

推论 1.3　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,i\neq j.$$

范德蒙行列式

n 阶范德蒙行列式的形式和结果为

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

1.2.6 克莱姆法则

克莱姆法则：考虑含有 n 个方程的 n 元线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，称为齐次线性方程组，否则，称为非齐次线性方程组.

1. 如果上述方程组的系数行列式 $D\neq 0$，那么，该方程组有唯一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 i 列元素用方程组的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

2. 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，那么，该方程组只有零解，如果齐次线性方程组有非零解，那么，该方程组的系数行列式必定等于零.

§1.3 学 习 要 点

本章的中心议题是行列式的计算. 对于排列及其逆序数只需掌握最基本的计算方法、n 阶行列式的定义只需了解其大概的意思；对于行列式各条性质的证明只需了解其基本思路；对于克莱姆法则只需掌握其理论来分析方程个数和未知数相等的线性方程组是否有解的问题. 本章的重点是行列式的计算，要学会利用这些性质及按行(列) 展开等基本方法来简化行列式的计算，并掌握行列式两行(列) 交换、某行(列) 乘数、某行(列) 加上另外一行(列) 的 k 倍这三类运算.

§1.4 释 疑 解 难

1. 行列式与行列式的值有什么区别?

答 这是一个"形式"与"内涵"的问题，以二阶行列式为例，式子 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，该行列式表示一个数

$$ad-bc$$

这个数称为二阶行列式的值，并记为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

注意上式中的等号是"记为"的意思，但由于等号通常理解为两边的数相等，因此上式左边的行列式记号也就表示行列式的值，两个行列式相等是指这两个行列式的值相等.

由于行列式的记号既表示行列式，又表示行列式的值，因此教材中没有明确提出"行列式的值"这一名称，把"行列式的值"也称为"行列式".

2. 如何理解行列式的定义？

答　n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的定义

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，对于这个定义应注意三点：

(1) 和式记号 $\sum$ 是对集合 $\{p_1 p_2 \cdots p_n \mid p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1, 2, \cdots n$ 的一个排列$\}$作和，因 n 个不同元素的排列总个数是 $n!$，于是该和共有 $n!$ 项；

(2) 和式中的任一项是取自 D 中不同行、不同列的元素之积. 由排列知识知，D 中这样不同行、不同列的 n 个元素之积共有 $n!$ 个.

(3) 和式中任一项都带有符号 $(-1)^t$，其中 t 是列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，即根据该排列的逆序数为偶数或奇数，每一项依次取"+"或"−". 根据排列的性质，和式中各有 $\frac{n!}{2}$ 项取"+"和取"−".

由上所述可知，n 阶行列式 D 恰好是 D 中的不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，是一个"积和式"，其中一半带有正号，一半带有符号.

3. (1) 余子式与代数余子式有什么特点？(2) 它们之间有什么联系？

答　(1) 对于给定的 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$，(i,j) 元 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 仅与位置 (i,j) 有关，而与 D 的 (i,j) 元的数值无关.

(2) 余子式与代数余子式之间的联系是 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，因而当 $i+j$ 为偶数时，二者相同；当 $i+j$ 为奇数时，二者符号相反.

§1.5　习 题 解 答

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ x & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式 $=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

(2) 原式 $=acb+bac+cba-c^3-a^3-b^3=3abc-a^3-b^3-c^3$.

(3) 原式 $=1\cdot b\cdot c^2+1\cdot c\cdot a^2+1\cdot a\cdot b^2-1\cdot b\cdot a^2-1\cdot c\cdot b^2$
$-1\cdot a\cdot c^2=b\cdot c^2+c\cdot a^2+a\cdot b^2-b\cdot a^2-c\cdot b^2-a\cdot c^2$.

(4) 原式 $=x(x+y)y+yx(x+y)+x(x+y)y-(x+y)^3-x^3-y^3$
$=-2(x^3+y^3)$.

2. 计算下列排列的逆序数,并判断其奇偶性:

(1)(146532); (2)24513;

(3)$n(n-1)\cdots321$; (4)$(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$.

解 (1) 该排列的首位元素 1 的逆序数为 0;第 2 位元素 4 的逆序数为 0;第 3 位元素 6 的逆序数为 0;第 4 位元素 5 的逆序数为 1;第 5 位元素 3 的逆序数为 3;第 4 位元素 2 的逆序数为 4,故该排列的逆序数为 $t=0+0+0+1+3+4=8$,从而其为偶排列.

(2) 该排列的首位元素 2 的逆序数为 0;第 2 位元素 4 的逆序数为 0;第 3 位元素 5 的逆序数为 0;第 4 位元素 1 的逆序数为 3;第 5 位元素 3 的逆序数为 2,故该排列的逆序数为 $t=0+0+0+3+2=5$,从而其为奇排列.

(3) 在这 n 个数构成的排列中,首位元素 n 的逆序数为 0;$n-1$ 的逆序数为 1;依次下去,1 的逆序数为 $n-1$,故该排列的逆序数为 $t=0+1+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$,当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

(4) 在这 $2k$ 个元素构成的排列中,首位元素 $2k$ 的逆序数为 0;1 的逆序数为 1;$2k-1$ 的逆序数为 1,依次下去 $k+1$ 的逆序数为 $k-1$,k 的逆序数为 k,故该排列的逆序数为 $t=2(1+2+\cdots+k-1)+k=k^2$,当 k 为奇数时,其为奇排列,当 k 为偶数时,其为偶排列.

3. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中,下列各元素应取什么符号?

(1)$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$; (2)$a_{31}a_{42}a_{63}a_{24}a_{56}a_{15}$.

解 (1) 要判断这一项的符号,只需看其列标构成排列的奇偶性,设 t 为 162435 构成排列的逆序数,故 $t=0+0+1+1+2+1=5$,所以元素前面的符号应为 $(-1)^5=-1$.

(2) 要判断这一项的符号,只需看其列标构成排列的奇偶性,设 t 为 123465 构成排列的逆序数,故 $t=0+0+0+0+0+1=1$,所以元素前面的符号应为 $(-1)^1=-1$.

4. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;