奥数题库

竞赛数学问题解答

朱华伟　编著

科学出版社

奥数题库

竞赛数学问题解答

朱华伟　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书给出了《从数学竞赛到竞赛数学》第3章“竞赛数学的问题与方法”中全部习题（共335道题）的详解. 本书对部分试题还作了点评，试题的点评不拘形式，或是问题的引申和推广，或是类题、似题的分析比较，或是多种解法的优化点评，或是试题的来源、背景. 点评目的是使读者开阔眼界，加深对问题的理解，培养举一反三的能力.

本书可供高中数学资优生、准备参加高中数学竞赛的选手、中学数学教师、高等师范院校数学教育专业本科生、研究生及高师院校数学教师，数学爱好者及数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

竞赛数学问题解答 / 朱华伟编著. —北京：科学出版社，2011
(奥数题库)
ISBN 978-7-03-030892-4

Ⅰ. 竞…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. 中学数学课－教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第073462号

责任编辑：李　敏　赵　鹏 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：黄华斌

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011年5月第一版　开本：B5（720×1000）
2011年5月第一次印刷　印张：15 1/4　插页：2
印数：1—6 000　字数：302 000

定价：36.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分. 这个看法是言之成理的. 数学要解题，要发现问题、创造方法. 年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态. 早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题. 竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑.

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话. 有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒. 我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧. 再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训. 就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动. 这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五. 从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可. 对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流. 发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了.

摘自《走进教育数学》丛书总序

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

本书是针对作者编著的《从数学竞赛到竞赛数学》所编写的一本习题指导书.《从数学竞赛到竞赛数学》的第3章“竞赛数学的问题与方法”深入研究了IMO及国内外高层次数学竞赛的试题，把竞赛数学涉及的内容归为数列、不等式、多项式、函数方程、平面几何、数论、组合数学、组合几何等8节，每一节内容包括背景知识、基本问题、方法技巧、概念定理、经典赛题、习题. 由于篇幅有限，我们没有在《从数学竞赛到竞赛数学》中给出相应习题的解答，而这些习题的详细解答构成了本书的主要内容. 内容以章为单位，每一章依次对应《从数学竞赛到竞赛数学》的第3章的每一节.

作者在《从数学竞赛到竞赛数学》的第3章中试图对数学竞赛所涉及的内容、方法、技巧作一系统总结和界定，并通过典型的赛题进行阐述. 所以这些习题也是从浩如烟海的试题中精心挑选出来的，它们是例题的补充和拓展. 读者可以通过这些习题进一步了解和掌握数学竞赛所涉及的内容、方法、技巧，也可以通过这些习题来锻炼自己的思维. 当您对某些问题百思不得其解的时候，书中的解答也许能够让您豁然开朗、拍案叫绝；当您为自己能够独立解决这些问题而感到兴奋的时候，也不妨看看其他人的解法，正所谓集思广益.

本书也可以作为独立的竞赛数学习题集. 但是，如果能够结合《从数学竞赛到竞赛数学》所讲的内容来思考这些习题，读者将会取得更多的收获. 正如美国著名数学家G. 波利亚在他的著作《数学的发现》的序言中所说：“如果你希望从自己的努力中取得最大的收获，就要从已经解决了的问题中找出那些对处理将

来的问题可能有用的特征.”在《从数学竞赛到竞赛数学》中，作者比较全面地总结了竞赛数学中各类问题的基本特征，从而有助于读者在思考这些习题时作更深入的分析和更全面的概括.

本书对部分习题还作了点评. 这些习题的点评不拘形式，或是问题的引申和推广，或是类题、似题的分析比较，或是问题的多种解法，或是问题的来源、背景. 问题的解答呈现给读者的往往是经过提炼的思维过程. 从问题的解答中我们可以感受到数学方法的巧妙和解题高手运用知识的深厚功力. 而问题的点评在一定程度上还原了命题者或解题者对问题火热的思考过程. 从问题的点评中我们可以感受到解决数学问题也是有血有肉的. 问题的点评可以使读者开阔眼界，加深对问题的理解，也可以培养读者举一反三的能力.

在本书的编写过程中，参阅了众多的文献资料，并得到付云皓、郑焕、邹宇、张传军、周弋林等同学的协助. 在此一并表示感谢. 对于本书存在的问题，热忱希望读者不吝赐教.

朱华伟

2011 年元月

目　录

第1章 数 列

1.1 问 题

1. 设 n 是正整数,定义:

$$f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

例如,$f(1)=1$,$f(2)=1+\frac{1}{2}$,$f(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. 求证:

$$n+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)=nf(n),$$

其中 $n=2,3,4,\cdots$.

2. 证明:存在数 A 和 B,使得对每个 $n\in\mathbf{N}^+$,有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=A\tan n+B_n,$$

其中 $a_k=\tan k\cdot\tan(k-1)$.

3. 已知 $\alpha^{2005}+\beta^{2005}$可表示成以 $\alpha+\beta,\alpha\beta$ 为变元的二元多项式,求这个多项式的系数之和.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=3,a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n\in\mathbf{N}^+)$.

(1) 证明:数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

5. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根为 S_n-1,$n=1,2,3,\cdots$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

6. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:$a_1=2,a_{n+1}=a_n^2-a_n+1,n=1,2,\cdots$. 证明:

$$1-\frac{1}{2003^{2003}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1.$$

7. 设非负等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq0$,记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 证明:

(1) 若 $m,n,p\in\mathbf{N}^+$,且 $m+n=2p$,则$\frac{1}{S_m}+\frac{1}{S_n}\geqslant\frac{2}{S_p}$;

(2) 若 $a_{503} \leqslant \frac{1}{1005}$,则 $\sum_{n=1}^{2007} \frac{1}{S_n} > 2008$.

8. 设 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)}$. 求证:当正整数 $n \geqslant 2$ 时,$a_{n+1} < a_n$.

9. 对任意正整数 n,设 a_n 是方程 $x^3 + \frac{x}{n} = 1$ 的实数根. 求证:

(1) $a_{n+1} > a_n$;

(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^2 a_i} < a_n$.

10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为大于等于 1 的实数,$n \geqslant 1$,$A = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 定义

$$x_0 = 1, \quad x_k = \frac{1}{1 + a_k x_{k-1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

证明:$x_1 + x_2 + \cdots + x_n > \frac{n^2 A}{n^2 + A^2}$.

11. 正整数序列 $\{a_n\}$ 按如下方式构成:a_0 为某个正整数,如果 a_n 可以被 5 整除,则 $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$;如果 a_n 不能被 5 整除,则 $a_{n+1} = [\sqrt{5} a_n]$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数). 证明:数列 $\{a_n\}$ 自某一项开始递增.

12. 正数数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 满足条件:x_1, x_2, y_1, y_2 都大于 1,且对一切正整数 n,有

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2, \quad y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}.$$

证明:存在正整数 n,使得 $x_n > y_n$.

13. 把 n 个数的严格递增数列放在第一行,将这 n 个数的位置作某种调整后放在第二行,然后把这两行的对应元素相加,把所得到的新数列放在第三行,已知第三行的 n 个数仍然是严格递增的. 求证:第一行和第二行是相同的.

14. 设 $a_i = \min\left\{k + \frac{i}{k} \,\middle|\, k \in \mathbf{N}^+\right\}$,试求 $S_{n^2} = [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_{n^2}]$ 的值, 其中 $n \geqslant 2$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

15. 设正实数的数列 $x_0, x_1, \cdots, x_{1995}$ 满足以下两条件:

(1) $x_0 = x_{1995}$;

(2) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, $i = 1, 2, \cdots$.

求所有满足上述条件的数列中 x_0 的最大值.

16. 试求最小的正整数 n，使得对于满足条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2007$ 的任一具有 n 项的正整数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，其中必有连续的若干项之和等于 30.

17. 设正整数 a 不是完全平方数，求证：对每一个正整数 n，

$$S_n = \{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \cdots + \{\sqrt{a}\}^n$$

的值都是无理数. 这里 $\{x\} = x - [x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

18. 是否存在着这样的正整数 n 使等差数列 $n+1, 2n+1, 3n+1, 4n+1, \cdots$ 中不含有正整数的立方在内？

19. 求证：存在奇数数列 $\{x_n\}_{n\geqslant 3}$，$\{y_n\}_{n\geqslant 3}$，使得对所有 $n \geqslant 3$，

$$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n.$$

20. 证明：对任意整数 n，$n \geqslant 3$，存在 n 个呈算术级数递增的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；n 个呈几何级数递增的正整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，满足

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_n < a_n.$$

并给出 $n=5$ 时满足要求的一组正整数.

21. 数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 的定义为，$a_1 = a_2 = 1$，$a_3 = 199$，对所有 $n \geqslant 3$，

$$a_{n+1} = \frac{1989 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}},$$

求证：数列中所有的项都是正整数.

22. 令 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 为一个数列满足 $a_0 = a_1 = 5$，且对所有正整数 n 有

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}.$$

证明：对所有非负整数 n 有

$$\frac{a_n + 1}{6}$$

是一个完全平方数.

23. 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个正整数的递增数列，使得

(1) 对所有 $n \geqslant 1$，$a_{2n} = a_n + n$；

(2) 如果 a_n 是一个素数，那么 n 是一个素数.

求证：对所有 $n \geqslant 1$，$a_n = n$.

24. 数列 $a_1, a_2, \cdots$ 定义如下：

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

求与此数列的每一项都互质的所有正整数.

25. 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个整数数列，其中既有无穷多项是正整数，又有无穷多

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

项是负整数．如果对每一个正整数 n，整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同．证明：每个整数恰好在数列 $a_1,a_2,\cdots$ 中出现一次．

26. 对于正整数 n，令 $f_n=[n\sqrt{2008}]+[n\sqrt{2009}]$．求证：数列 $f_1,f_2,\cdots$ 中有无穷多个奇数和无穷多个偶数（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

27. 数列 $a_0,a_1,\cdots$ 满足

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+(a-1)a_{n-1},\tag{1-1}$$

其中 $n\in\mathbf{N}^+$，且 $a\in\mathbf{N}^+$ 是参数．$p_0>2$ 是给定的素数，求满足下面两个条件的 a 的最小值：

（1）如果 p 是素数，且 $p\leqslant p_0$，则 a_p 被 p 整除；

（2）如果 p 是素数，且 $p>p_0$，则 a_p 不被 p 整除．

28. 设正整数 $k>1$，$a_0=4$，$a_1=a_2=(k^2-2)^2$，且对所有的 $n\geqslant 2$，

$$a_{n+1}=a_na_{n-1}-2(a_n+a_{n-1})-a_{n-2}+8.$$

求证：对所有的正整数 n，$2+\sqrt{a_n}$是完全平方数．

1.2 解　　答

1.
$$\begin{aligned}
&n+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)\\
=&n+1+1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\\
&+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}\\
&+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\\
=&n+(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot\frac{1}{2}+(n-3)\cdot\frac{1}{3}\\
&+\cdots+2\cdot\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\\
=&n+(n-1)+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{3}-1\right)\\
&+\cdots+\left(\frac{n}{n-2}-1\right)+\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\\
=&n+n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)
\end{aligned}$$

$$=1+n\left(f(n)-\frac{1}{n}\right)=nf(n).$$

点评 一般的,若 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,n=1,2,3,\cdots$,则

$$\sum_{r=1}^{n-1}S_r=\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{r}a_t=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=t}^{n-1}a_t=\sum_{t=1}^{n-1}(n-t)a_t$$
$$=n\sum_{t=1}^{n-1}a_t-\sum_{t=1}^{n-1}ta_t=nS_{n-1}-\sum_{t=1}^{n-1}ta_t.$$

特殊地,取 $a_t=\frac{1}{t}$即为本题.

2. 应用公式

$$\tan 1=\frac{\tan k-\tan(k-1)}{1+\tan k\cdot\tan(k-1)}$$

(注意,因为 π 为无理数,所以上式对所有 $k\in\mathbf{N}$ 有意义)得:对每一个 $n\in\mathbf{N}^+$,有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}\tan k\tan(k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\tan k-\tan(k-1)}{\tan 1}-1\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\tan k}{\tan 1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\tan k}{\tan 1}-n=\frac{\tan n}{\tan 1}-n.$$

于是,只要取 $A=\frac{1}{\tan 1},B=-n$ 即满足题中要求.

3. 在 $\alpha^k+\beta^k$ 的展开式中,令 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=1$,其所求系数之和为 S_k. 由 $(\alpha+\beta)(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})=(\alpha^k+\beta^k)+\alpha\beta(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})$,有 $S_k=S_{k-1}-S_{k-2}$. 从而 $S_k=(S_{k-2}-S_{k-3})-S_{k-2}=-S_{k-3}$. 同理,$S_{k-3}=-S_{k-6}$. 所以,$S_k=S_{k-6}$.

于是,数列 $\{S_k\}$ 是周期为6的周期数列. 故 $S_{2005}=S_1=1$.

4. (1) 因为 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$,所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$. 又因为 $a_1=1,a_2=3$,所以

$$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2,\quad n\in\mathbf{N}^+.$$

所以$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 $a_2-a_1=2$ 为首项,2 为公比的等比数列.

(2) 由(1)得 $a_{n+1}-a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^+)$,所以

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$
$$= 2^n - 1, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

点评 数列$\{a_n\}$的特征方程为$x^2 - 3x + 2 = 0$,它的两根分别为1和2,故数列的通项可设为$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n$,由题设知$a_1 = 1, a_2 = 3$,所以$c_1 = -1, c_2 = 1$,从而$a_n = 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^+)$.

5. 本题可以首先求出a_1, a_2, a_3, a_4,猜想出a_n的表达式,然后用数学归纳法证明猜想是正确的. 这里我们利用函数的不动点求解.

因为$a_n = S_n - S_{n-1}$,根据题目条件易得$S_nS_{n-1} - 2S_n + 1 = 0$,可以写成

$$S_n = \frac{-1}{S_{n-1} - 2}.$$

首先解方程$x = \frac{-1}{x-2}$,解得$x = 1$. 故$f(x) = \frac{-1}{x-2}$只有一个不动点. 于是

$$\frac{1}{S_n - 1} = \frac{1}{\frac{-1}{S_{n-1} - 2} - 1} = -1 + \frac{1}{S_{n-1} - 1},$$

即$\frac{1}{S_n - 1} - \frac{1}{S_{n-1} - 1} = -1$. 因此$\frac{1}{S_n - 1}$是首项为$\frac{1}{S_1 - 1}$,公差为$-1$的等差数列,解得$S_n = \frac{n}{n+1}$. 从而

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

6. 由题设得:$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$,所以$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2003}} = \left(\frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1}\right) + \left(\frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1}\right)$$
$$+ \cdots + \left(\frac{1}{a_{2003} - 1} - \frac{1}{a_{2004} - 1}\right)$$
$$= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{2004} - 1} = 1 - \frac{1}{a_{2004} - 1},$$

易知数列$\{a_n\}$是严格递增的,所以$a_{2004} > 1$,故

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2003}} < 1.$$

为了证明左边不等式,只要证明$a_{2004} - 1 > 2003^{2003}$.

由已知用归纳法可得$a_{n+1} = a_na_{n-1}\cdots a_1 + 1$, 及$a_n \cdots a_1 > n^n, n \geqslant 1$. 从而结

论成立.

7. 设非负等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 \geqslant 0$,公差为 $d \geqslant 0$.

(1)因为 $m+n=2p$,所以 $m^2+n^2 \geqslant 2p^2, p^2 \geqslant mn, a_m+a_n=2a_p$.

从而有 $(a_p)^2 \geqslant a_m \cdot a_n$. 因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,所以有

$$
\begin{aligned}
S_n+S_m &= (m+n)a_1+\frac{n(n-1)+m(m-1)}{2}d \\
&= 2pa_1+\frac{n^2+m^2-2p}{2}d \\
&\geqslant 2pa_1+\frac{2p^2-2p}{2}d = 2S_p, \\
S_n \cdot S_m &= \frac{n(a_1+a_n)}{2}\frac{m(a_1+a_m)}{2} \\
&= \frac{mn}{4}(a_1{}^2+a_1(a_m+a_n)+a_ma_n) \\
&\leqslant \frac{p^2}{4}(a_1{}^2+2a_1a_p+a_pa_p) \\
&= \left(\frac{p(a_1+a_p)}{2}\right)^2 = (S_p)^2.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{1}{S_m}+\frac{1}{S_n}=\frac{S_m+S_n}{S_mS_n} \geqslant \frac{2S_p}{S_pS_p}=\frac{2}{S_p}.
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2007}\frac{1}{S_n} &= \left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_{2007}}\right)+\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_{2006}}\right) \\
&\quad +\cdots+\left(\frac{1}{S_{1003}}+\frac{1}{S_{1005}}\right)+\frac{1}{S_{1004}} \\
&\geqslant \frac{2\times 1003+1}{S_{1004}}=\frac{2007}{S_{1004}}.
\end{aligned}
$$

又因为 $S_{1004}=1004a_1+\frac{1004\cdot 1003}{2}d \leqslant 1004(a_1+502d)=1004a_{503} \leqslant \frac{1004}{1005}$,

所以有

$$
\sum_{n=1}^{2007}\frac{1}{S_n} \geqslant \frac{2007}{S_{1004}} \geqslant \frac{2007}{1004}1005 \geqslant 2008.
$$

8. 由于 $\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$,因此 $a_n=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,于是,对任意的正整数 $n\geqslant 2$,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\\&=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)>0,\end{aligned}$$

即 $a_{n+1}<a_n$.

9. (1) 由 $a_n{}^3+\frac{a_n}{n}=1$,得 $0<a_n<1$.

$$\begin{aligned}0&=a_{n+1}^3-a_n^3+\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}<a_{n+1}^3-a_n^3+\frac{a_{n+1}}{n}-\frac{a_n}{n}\\&=(a_{n+1}-a_n)\left(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

因为 $a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2+\frac{1}{n}>0$,故 $a_{n+1}-a_n>0$,即 $a_{n+1}>a_n$.

(2) 因为 $a_n\left(a_n^2+\frac{1}{n}\right)=1$,所以

$$a_n=\frac{1}{a_n^2+\frac{1}{n}}>\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1},$$

从而

$$\frac{1}{(n+1)^2a_n}<\frac{1}{n(n+1)},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2a_i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<a_n.\end{aligned}$$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2a_i}<a_n$.

10. 令 $y_i=\frac{1}{x_i}(i=0,1,2,\cdots,n)$,则 $y_k=1+\frac{a_k}{y_{k-1}}$. 由此可知 $y_k>1$,并且由题

目条件可知 $a_k \geqslant 1(k=1,2,\cdots,n)$,从而有$\left(\frac{1}{y_{k-1}}-1\right)(1-a_k)\geqslant 0$,这等价于

$$\frac{1}{y_{k-1}}+a_k \geqslant 1+\frac{a_k}{y_{k-1}}=y_k. \tag{1-2}$$

对(1-2)取 $k=1,2,\cdots,n$ 相加,有

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{y_k}+\sum_{k=1}^{n}a_k=A+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{y_k},$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}<A+\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$(请思考为什么只取不等号).

由柯西不等式,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\geqslant n^2.$$

记 $S=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,则 $S+A>\frac{n^2}{S}$,即 $S^2+SA>n^2$,从而

$$S>\sqrt{n^2+\frac{A^2}{4}}-\frac{A}{2}=\frac{n^2A}{\sqrt{A^2n^2+\frac{A^4}{4}}+\frac{A^2}{2}}$$

$$>\frac{n^2A}{\sqrt{n^4+A^2n^2+\frac{A^4}{4}}+\frac{A^2}{2}}=\frac{n^2A}{n^2+A^2}.$$

11. 题目的结论等价于“自某个 n 开始,a_n 都不是5的倍数”.我们来证明这一点.

首先证明,数列中存在两个相邻项都不是5的倍数.否则,对任何 n 都有:或者 $a_{n+1}=\frac{a_n}{5}$,或者 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{5}$.注意到对任何 k,都有 $a_{k+1}\leqslant\sqrt{5}a_k$,所以恒有 $a_{n+2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{5}a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}a_n<a_n$.这样一来,数列 $a_1,a_3,a_5,\cdots$ 严格单调下降,此为不可能.于是,可以找到某两个相邻项 a_k 和 a_{k+1} 都不是5的倍数.

其次证明 a_{k+2} 也不是5的倍数,那么将可以断言 $a_{k+3},a_{k+4},\cdots$ 都不是5的倍数.由题意知 $a_{k+1}=[\sqrt{5}a_k]$.记 $a_k=m$,于是,

$$a_{k+1}=\sqrt{5}m-\alpha,\ 其中\ 0<\alpha<1,且$$

$$a_{k+2}=[\sqrt{5}(\sqrt{5}m-\alpha)]=5m+[-\sqrt{5}\alpha].$$

注意到 $0<\sqrt{5}\alpha<3$,故知 $5m-3\leqslant a_{k+2}<5m$.所以 a_{k+2} 也不是5的倍数.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com