HZ BOOKS
华章教育

高等院校精品课程系列教材·省级

离散数学

冯伟森 栾新成 石 兵 ◎等编著

精品课程

Discrete Mathematics

机械工业出版社
China Machine Press

高等院校精品课程系列教材·省级

离散数学

冯伟森 栾新成 石 兵 ◎等编著

精品课程

Discrete Mathematics

机械工业出版社
China Machine Press

"离散数学"是现代数学的一个重要分支，也是计算机科学与技术、电子信息技术、生物技术等专业的理论基础。本书由六部分组成，首先将离散数学的体系结构分为以下五个主要部分：数理逻辑、集合与关系、数论与组合论、图论、代数结构，第六部分介绍离散数学在计算机科学中的一些典型应用。

本书在每章后面配备了相当数量的难易程度不同的练习题，并在附录中给出了几套模拟试题，供读者进行自测。

本书内容丰富，条理清晰，层次分明，逻辑性强，阐述深入浅出，适合作为高等院校计算机和软件工程专业及相关专业离散数学课程的本科生教材，也可供计算机科学工作者和科技人员阅读与参考。

封底无防伪标均为盗版
版权所有，侵权必究
本书法律顾问　北京市展达律师事务所

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／冯伟森，栾新成，石兵等编著．—北京：机械工业出版社，2011.3
（高等院校精品课程系列教材）

ISBN 978-7-111-33183-4

Ⅰ．离…　Ⅱ．①冯…　②栾…　③石…　Ⅲ．离散数学－高等学校－教材　Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 012336 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：白　宇
北京京师印务有限公司印刷
2011 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
185mm×260mm·16.75 印张
标准书号：ISBN 978-7-111-33183-4
定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991；88361066
购书热线：（010）68326294；88379649；68995259
投稿热线：（010）88379604
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

前言

“离散数学”是现代数学的一个重要分支，也是计算机科学与技术、电子信息技术、生物技术等专业的核心基础课程。它是研究离散量（如整数、有理数、有限字母表等）的数学结构、性质及关系的学问。它一方面充分地描述了计算机科学离散性的特点，为学生进一步学习算法与数据结构、程序设计语言、操作系统、编译原理、电路设计、软件工程与方法学、数据库与信息检索系统、人工智能、网络、计算机图形学等专业课打好数学基础；另一方面，通过学习离散数学课程，学生在获得离散问题建模、离散数学理论、计算机求解方法和技术知识的同时，还可以培养和提高抽象思维能力和严密的逻辑推理能力，为今后处理离散信息以及用计算机处理大量的日常事务和科研项目、从事计算机科学和应用打下坚实基础。特别是对于那些从事计算机科学与理论研究的高层次计算机人员来说，离散数学更是必不可少的基础理论工具。

本书是在四川大学老一辈名师吴子华、张一立、唐常杰所编《离散数学教程》和本书作者编写的“离散数学”讲义的基础上，结合计算机科学和现代数学发展的最新成果，以及作者多年从事“离散数学”精品课程的教学经验，充分听取广大学生对该课程的意见编写而成的。全书由六部分组成，首先将离散数学的体系结构分为五个主要部分：数理逻辑、集合与关系、数论与组合论、图论、代数结构。第六部分是离散数学在计算机科学中的一些典型应用。本书内容丰富，条理清晰，层次分明，逻辑性强，阐述深入浅出，每章后都配有大量难易程度不同的练习题，不仅适合作为普通高等院校计算机和软件工程专业及相关专业离散数学课程的本科生教材，也可供计算机科学工作者和科技人员阅读与参考。

根据我们的经验，使用本书可在 110 学时内完成全部教学任务（第六部分除外）。

本书的第 1 章至第 6 章、第 18 章的 18.2 节和 18.3 节由冯伟森编写；第 7 章至第 9 章、第 14 章至第 17 章由栾新成编写；第 10 章至第 13 章由石兵编写；第 18 章的 18.1 节、18.4 节、18.5 节、18.6 节和部分习题由陈瑜编写；最后，全书由冯伟森统稿。

在本书的编写过程中，我们参阅了大量的离散数学书籍和资料，在此向有关作者表示衷心的感谢。本书的编写得到了四川大学计算机

学院、软件学院各级领导和课程组各位老师的关心和大力支持，特别是朱敏副院长一直以来对本教材的关心和支持，在此向他们表示诚挚的感谢。感谢使用本教材的四川大学2008级和2009级计算机科学与技术专业、软件工程专业的同学们，他们对本教材提出了不少宝贵意见。同时，感谢机械工业出版社华章分社的王璐和白宇两位编辑对本书顺利出版的大力支持。

编　者

2010年11月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目 录

第一部分 数理逻辑

在人类的思维活动中，判断和推理是最基本的行为。逻辑学的目的就是要从理论的高度发现思维过程所遵循的规律，并用以指导人们更好地进行思维活动。数理逻辑则是用数学的方法去描述这种规律，也就是使用抽象的符号系统形式化地表达演绎推理过程。

在使用逻辑法则进行推理或做出判断时，总要从某些公认的基本事实（命题）出发，利用公认的有效规则一步一步地导出最终结论。推理过程中的每一个中间命题要么是一个公认的事实，要么是前面一些命题的必然结果。这些基本的过程在中学进行数学定理证明时就已经做过。由于数学证明的优势在于形式化推导，讨论的对象被表示成符号化的命题，这种抽象过程使得我们可以不必理会对象的具体内涵，因而得出的结论也具有更普遍的意义。

下面，通过一个例子来说明数理逻辑在日常生活中的应用。

一个土耳其商人想找一个十分聪明的助手协助他经商，有两个人前来应聘，这个商人为了证明哪个更聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开灯后说："这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的，现在，我把灯关掉，而且把帽子摆放的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在自己头上，在我开灯后，请你们尽快说出自己头上戴的帽子是什么颜色的。"说完后，商人将电灯关掉，然后三人都摸了一顶帽子戴在头上，同时商人将余下的两顶帽子藏了起来，接着把灯打开。这时，两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子，其中一个人便喊道："我戴的是黑帽子。"请问这个人说的对吗？他是怎么推导出来的呢？

要回答这样的问题，实际上就是看由一些诸如"商人戴的是红帽子"这样的前提能否推出"猜出答案的应试者戴的是黑帽子"这样的结论来。这又需要经历如下过程：

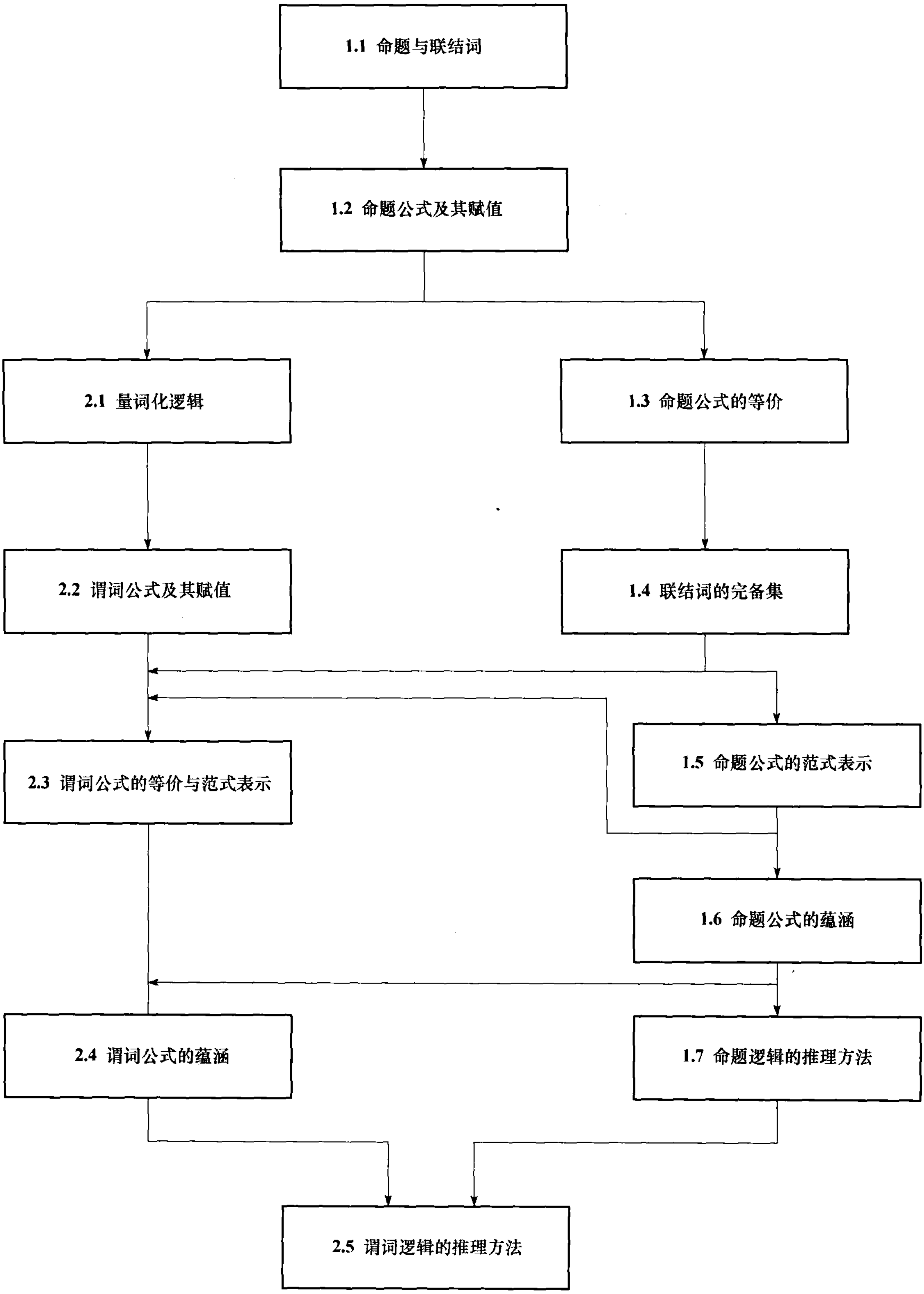
①什么是前提？有哪些前提？

②结论是什么？

③根据什么进行推理？

④怎么进行推理？

以下是本部分知识体系图。



数理逻辑部分的知识体系图

第1章

命题逻辑

本章介绍的主要内容包括命题的数学表达法、逻辑联结词的功能定义、命题公式的等价与蕴涵、命题公式的范式表示，以及作为逻辑学核心内容的推理理论。

1.1 命题与逻辑联结词

命题是逻辑学研究的出发点，因此，首先要分清什么是命题，什么不是命题，以及如何来表示命题。

定义 1.1 *能够确切判断其结论是真或假的陈述句称为***命题**。

定义中强调了命题的两个方面，一是真和假两种结果有且仅有一种出现，二是讨论的对象必须是可以进行判断的陈述句，这些是命题概念的基本内涵。下面看一些具体例子。

【例 1.1】 判断下面的句子是否是命题。

①孔夫子是我国古代伟大的思想家和教育家。

②$4+3=7$。

③白天比夜晚时间长。

④$x+y<0$。

⑤多么好的天气啊！

⑥小明明天回来吗？

⑦两个三角形全等，当且仅当它们的对应角相等。

⑧微软公司是世界上最大的计算机软件厂商。

⑨$1+101=110$。

⑩10 月 1 日是晴天。

⑪让我们一起走吧！

⑫本句不是命题。

【解】 在这些句子中，根据定义可知：

①和②是结论为真的命题。

③的真值依赖于地域和季节，但它有确定的真值，所以它是命题。

④由于公式中的 x 和 y 是变元，对 x 和 y 赋予不同的值，其公式可以为真，也可能为假，真值无法确定，因而不是命题。

⑤是感叹句，⑥是疑问句，⑪是祈使句，它们都不符合命题为陈述句的基本要求，因而不是命题。

⑦是结论为假的命题。

⑧的断言从目前看是真的，但是过若干年后是否还正确，就难以确定了。对这种类型的判断句，一般采用当前实效的原则来对待，因此它是命题。

⑨的真值则取决于采用哪种数制，若采用二进制，则取值为真，其他数制则取值为假，但它有确定的真值，所以它是命题。

⑩虽然现在我们不知道它的真值是真还是假，但它的真值客观存在，而且是唯一的，到10月1日就真相大白了，所以，它是命题。

⑫的判别最需要留意，要说这个陈述句是命题，它自身却明明白白说明不是命题；要说它不是命题，然而它又明确地表达了这一事实，按理又应该看作命题。这种句子的外在描述与内涵是相互矛盾的，在逻辑学上称之为悖论。在逻辑学和集合论中还可以举出若干悖论的著名例子。悖论当然不在命题之列。 ■

对于命题，在形式逻辑中主要关心它（的值）是真还是假，而不特别注意它的实际内容。使用自然语言来表达命题，一般不利于形式化讨论，也难于探索规律，因此第一步就要考虑命题的逻辑形式，即建立命题相应的抽象符号系统。

习惯上，命题的逻辑意义以**真**和**假**来描述，在逻辑描述上通常用英文字母 T 和 F 来表示；但是这种表示法不便于采用强有力的数学演算方法去讨论命题。为了突出数学演算的优点，采用等价的数字系统去表示命题的值更易于进行逻辑演算。为此，我们约定，逻辑值的真用 1 表示，假用 0 表示，1 和 0 通常称为命题的**真值**。一般来说，用除字母 T 和 F（有专门的意义）以外的，以大写字母开始的字母数字串作为**命题标识符**。用符号来表示一个具体命题，就是为这个命题指定逻辑形式，通常称为翻译，翻译是抽象化的第一步。在翻译中要特别留意命题各个成分之间的关系，即注意自然语言中的关联词，如“并且”、“或者”、“不是”、“如果……则……”、“当且仅当”等最常用的关联词形式化。我们约定用逻辑符号“$\sim$”、“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\rightarrow$”、“$\leftrightarrow$”分别表示关联词“非”、“且”、“或”、“如果……则……”、“当且仅当”。应该注意，在自然语言中，这些词的意义可以有很多种表达的方式，在翻译时要考虑准确的对应关系。

【例 1.2】 将下面各个命题翻译成它的逻辑形式。

①$4+3=7$。

②中国人民既勤劳又勇敢。

③如果 $x^2>0$，则 $x\neq0$。

④他不可能一边跑步，一边游泳。

⑤这件事不是小王干的，就是小李干的。

⑥他要么在打乒乓球，要么在读书。

【解】 ①可翻译为 P：$4+3=7$，其逻辑形式就是 P。

②注意命题中用关联词表达的两层迭加意义。令 P：中国人民是勤劳的；Q：中国人民是勇敢的；$\wedge$ 表示“既……又……”。这个命题的逻辑形式是 $P\wedge Q$。

③令 P：$x^2>0$；Q：$x\neq0$；$\rightarrow$表示“如果……则……”。这个命题的逻辑形式是 $P\rightarrow Q$。

④令 P：他跑步；Q：他游泳；$\wedge$ 表示“一边……一边……”；$\sim$表示“不能”。这个命题的逻辑形式是$\sim(P\wedge Q)$。

⑤令 P：这件事是小王干的；Q：这件事是小李干的；$\vee$ 表示“不是……就是……”。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

这个命题的逻辑形式是 $P \vee Q$。

⑥令 P：他打乒乓球；Q：他读书。这个命题的逻辑形式是 $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$。■

对于上面的翻译，要说明以下几点：因为各个句子互不相干，因而翻译时使用的标识符都是 P 和 Q，当然也可以使用其他标识符。如果各个命题合在一起构成一个复杂的命题，那么这些子命题的标识符应该互相区别开。在翻译时还要注意命题中各逻辑成分的关系，要用相应的联结词准确地表示出来。例如比较⑤和⑥的翻译，从字面上看，这两个命题都是表达选择性的，翻译的逻辑形式应该相同，但是实际上两个逻辑命题的涵义不同，命题⑤含有两人同时干这件事的可能性，而命题⑥中的打乒乓球和读书却不可能同时发生。又如④和⑥，表面上都是对同时干两件事的否定，但是命题④中的跑步与游泳不能同时进行，并没有必须干其中一项的意思；而命题⑥中的打乒乓球和读书两件事既不能同时发生，又不能都不发生，翻译所得的逻辑形式就完全表达了这种内涵。

命题⑥中的联结词也可以用一个逻辑符号"$\triangledown$"来表示（称为"不可兼或"），命题可相应地翻译成 $P \triangledown Q$。

还要强调一点，命题标识符是对命题的抽象，但它并不是命题而只是一个符号，只有在把它说明为某一个具体的命题时，这个抽象符号才变成确定的**命题常量**。因此，命题标识符就是一个**命题变元**。

定义 1.2　*用一个具体的命题代入命题标识符 P 的过程，称为对 P 的***解释**或**赋值**。

对命题标识符的解释虽然是抽象化的反过程，但解释却可以是任意的。例如对于 $P \rightarrow Q$，既可以把 P 解释成 $x^2>0$，把 Q 解释成 $x \neq 0$，也可以把 P 解释成"大象长翅膀"，把 Q 解释成"猫吃鱼"。这两种解释都得到了值为真的命题。

很多命题（如数学定理等）都具有层次性的逻辑结构，整个命题是利用联结词把一些最基本的子逻辑命题有机地联合起来得到的复合命题。例 1.2 中后面 5 个命题都是复合命题，当然，这些复合命题既可以用一个单独的标识符表示，也可以引入联结词来表示，我们把这两种表示看成是等同的。

定义 1.3　*凡是不能用联结词分解出更简单的子命题的命题称为***原子命题**，*反之称为***复合命题**。*与原子命题对应的命题标识符叫做***原子命题变元**。

例 1.2 中命题①是一个原子命题，翻译后得到的命题标识符 P 就是原子命题变元。

使用逻辑联结词可以由比较简单的命题构造出复杂的命题，联结词的这种功能也可以看成是一类运算，它们在计算机程序设计语言中被广泛地使用以构造复杂的逻辑表达式。现在，从运算功能的角度严格定义逻辑联结词。

定义 1.4　*设 P 是一个命题，称 $\sim P$ 为 P 的***否命题**。

联结词"$\sim$"的运算功能可用如表 1-1 所示的真值表表示。

这个联结词又被称为逻辑非，是一个一元逻辑运算符。在自然语言中，它对应于关联词"不是"表达的逻辑意义。

定义 1.5　*设 P 和 Q 是两个命题，称 $P \wedge Q$ 为 P 和 Q 的***合取命题**。

联结词"$\wedge$"的运算功能可用表 1-2 的真值表表示。

从真值表可以看出，$P \wedge Q$ 取值 1（真）当且仅当 P 和 Q 同时取值 1，其余情况取值 0。这个联结词又称为逻辑与，是一个二元逻辑运算符。$P \wedge Q$ 可以读做"P 并且 Q"，"既 P 又 Q"，"一边 P，一边 Q"等。

求 $P \wedge Q$ 的值可以简单地记忆为"取小"。注意 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 的取值情况完全相同，即运算 $\wedge$ 具有可换性。

定义 1.6 设 P 和 Q 是两个命题，称 $P \vee Q$ 为 P 和 Q 的**析取命题**。

联结词"∨"的运算功能可以用如表 1-3 所示的真值表表示。

表 1-1

P	$\sim P$
0	1
1	0

表 1-2

P Q	$P \wedge Q$	P Q	$P \wedge Q$
0 0	0	1 0	0
0 1	0	1 1	1

表 1-3

P Q	$P \vee Q$	P Q	$P \vee Q$
0 0	0	1 0	1
0 1	1	1 1	1

从真值表可以看出，$P \vee Q$ 取值 0(假) 当且仅当 P 和 Q 同时取值 0，其余情况取值 1。这个联结词又称为逻辑或，是一个二元逻辑运算符。$P \vee Q$ 可以读做"或 P，或 Q"，"要么 P，要么 Q"，"不是 P，就是 Q"等。

求 $P \vee Q$ 的值可以简单地记忆为"取大"。注意，运算 ∨ 也具有可换性。

需要注意的是，这个或是**可兼或**，即允许 P 和 Q 同时成立，例如例 1.2 中的命题⑤；但常常也有不可兼或的情况出现，例如例 1.2 中的命题⑥。**不可兼或**对应的联结词为 ▽，其运算功能可用如表 1-4 所示的真值表表示：

"不可兼或"是对同时性的否定，翻译时要注意区别。

定义 1.7 设 P 和 Q 是两个命题，称 $P \to Q$ 为 P 和 Q 的**条件命题**，P 是命题的**前件**，Q 是命题的**后件**。

条件联结词"→"的运算功能可以用如表 1-5 所示的真值表表示。

表 1-4

P Q	$P \triangledown Q$	P Q	$P \triangledown Q$
0 0	0	1 0	1
0 1	1	1 1	0

表 1-5

P Q	$P \to Q$	P Q	$P \to Q$
0 0	1	1 0	0
0 1	1	1 1	1

从真值表可以看出，$P \to Q$ 取值 0(假) 当且仅当 P 取值 1 时 Q 取值 0，其余情况取值为 1。

$P \to Q$ 在自然语言中有多种表达方式，如"如果 P，则 Q"，"P 是 Q 的充分条件"，"Q 是 P 的必要条件"等。一般表示条件关系，并且要求前后语句有某种逻辑联系（因果、包含、实质），这种条件命题称为形式条件命题；不要求前后语句有内在联系的条件命题称为实质条件命题（善意推定）。一般后者包含前者，数理逻辑中的→一般为后者。

如　　P：我买到鱼；Q：我吃鱼。

$P \to Q$：如果我买到鱼，则我吃鱼。(有因果关系)　　合理，T

$\sim P \to Q$：如果我没买到鱼，则我吃鱼。　　不合理，T

(强调买到鱼，不一定有因果关系)

在实质条件命题中，当前件是假时，则不管后件是真是假，条件命题一定为真。即只有在前件成立的情况下，才考虑条件命题的真假，至于前件不成立的情况，不予考虑。此时，不管后件是真是假均可认为是真。(前件和结论之间有无因果、实质关系，难以区分。)

一些文献中把条件关系看成是蕴涵关系，把 $P \to Q$ 与 P 蕴涵 Q 完全等同，这里将蕴涵另作定义。

求 $P \to Q$ 的值可以简单地记忆为"只有 Q 假 P 真才取假"。注意 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 的取值情况是不相同的，即运算"→"不具有可换性。

给定命题 $P \to Q$，把 $Q \to P$、$\sim P \to \sim Q$、$\sim Q \to \sim P$ 分别叫作 $P \to Q$ 的逆命题、反命题、逆反命题。(注意：$P \to Q \Leftrightarrow \sim Q \to \sim P$，$Q \to P \Leftrightarrow \sim P \to \sim Q$。)

定义 1.8　设 P 和 Q 是两个命题，称 $P\leftrightarrow Q$ 为 P 和 Q 的**双条件命题**。

双条件联结词"$\leftrightarrow$"的运算功能可以用如表 1-6 所示的真值表表示。

从真值表可以看出，$P\leftrightarrow Q$ 取值 1（真）当且仅当 P 和 Q 取值相同。

$P\leftrightarrow Q$ 在自然语言中可以表述为"P 当且仅当 Q"，"P 是 Q 的充分必要条件"等。求 $P\leftrightarrow Q$的值可以简记为"P、Q 同值才取真"。注意运算"$\leftrightarrow$"具有可换性。

至此，定义了"～"、"∧"、"∨"、"▽"、"→"、"↔"共 6 个逻辑联结词，还有几个联结词将在后面定义。在全部联结词中"～"、"∧"、"∨"是最基本的，也是使用最普遍的。事实上其他联结词的功能都可以用这三种联结词表示出来。

表 1-7 中列出了这三种联结词在常用程序设计语言中对应的逻辑运算符。

表　1-6

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表　1-7

	BASIC	Pascal	C 语言	Foxpro	Lisp	PROLOG
～	NOT	not	!	! 或 .NOT.	NOT	not
∧	AND	and	&&	.AND.	AND	,
∨	OR	or	||	.OR.	OR	;

小结：

1）联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结。

2）联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何的内在联系。

3）联结词"～"是自然语言中的"非"、"不"和"没有"等的逻辑抽象。

4）联结词"∧"是自然语言中的"并且"、"既……又……"、"但"、"和"等的逻辑抽象。

5）联结词"∨"是自然语言中的"或"、"或者"等的逻辑抽象；但"或"有"可兼或∨"、"不可兼或▽"、"近似或"三种，前两种是联结词，后一种是非联结词。

6）联结词"→"是自然语言中的"如果……则……"、"若……才能……"、"除非……否则……"等的逻辑抽象。在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件 P 为假时，不管 Q 的真假如何，则 $P\rightarrow Q$ 都为真，此时称为"善意推定"。这里要特别提醒一下"→"的含义，在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在数理逻辑中可以允许两者无必然因果关系，也就是说，并不要求前件和后件有什么联系。

7）双条件联结词"↔"是自然语言中的"充分必要条件"、"当且仅当"等的逻辑抽象。

8）联结词"∧"、"∨"、"～"同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的，因而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。

1.2　命题公式及其赋值

下面讨论含有多个联结词的命题表达式的取值问题。

定义 1.9　由命题变元、逻辑联结词和括号按照下述规则构成的表达式称为（**命题**）**合适公式**。

①原子命题变元是合适公式。

②如果 P，Q 是合适公式，则 $(\sim P)$，$(P\wedge Q)$，$(P\vee Q)$，$(P\triangledown Q)$，$(P\rightarrow Q)$，$(P\leftrightarrow Q)$ 都是合适公式。

③只有经过有限次使用①或②得到的命题表达式才是合适公式。

这里采用了递归的方式为合适公式进行定义。递归定义方法是计算机科学中常用的方法，它主要由出发点（初始元素）和规则两部分组成，以形成有关讨论对象的公理体系。

按定义，$((((\sim P)\wedge Q)\vee(P\wedge R))\wedge Q)$，$((\sim(P\vee Q))\rightarrow R)$都是合适公式，要是写成$(\sim P\wedge Q)\vee P\vee R\wedge Q$，$(\sim P\vee Q\rightarrow R)$则不是合适公式。

定义 1.10 如果合适公式甲的一个子串乙也是合适公式，则称乙是甲的**子合适公式**。

例如，$(P\vee Q)$是合适公式$((\sim(P\vee Q))\rightarrow R)$的子合适公式。

为简单起见，以后称合适公式为**公式**，将子合适公式称为**子公式**。

在书写一个合适公式时，不可避免地要出现一大堆括号，使表达式显得繁冗，为书写简便起见，约定公式的最外层括号可以省去。例如，当“～”后紧跟的是原子公式 P 时，$(\sim P)$的括号可以省去；当相继的几个子公式是用同一联结词$\vee$（或$\wedge$）连接起来的，可以去掉由这个联结词构成的子公式的外层括号。这样，公式$((((\sim P)\wedge Q)\vee(P\vee R))\wedge Q)$就可以简写为$((\sim P\wedge Q)\vee P\vee R)\wedge Q$。

一个命题公式只能取 0 和 1 为其值，取什么值完全取决于对公式中各原子公式的解释，以及公式中联结词的功能。这一情况与函数相同。事实上，可以把命题公式看成以各原子变元为自变量的**命题函数**。

公式中每个原子变元都可以独立地取 0 和 1 为其值，全部原子变元的一次取值可以称为对公式的一个解释，对应于这个解释，公式本身产生一个值。把对公式的全部解释构造成一张表（类似定义联结词的表），称为该公式的**真值表**。

在构造公式的真值表时，一般把公式分成三栏，最左边一栏是公式中原子变元的取值情况，中间一栏是各中间结果的子公式的取值情况，右边一栏是公式的取值情况。

【例 1.3】 构造公式$\sim P\vee Q$的真值表。

【解】 公式中的原子变元是 P 和 Q，位于表的最左栏，排成两列，中间结果$\sim P$的值排在中间栏，命题公式取值则排在最后一栏。按这种方式，公式$\sim P\vee Q$对应的真值表如表1-8所示。

对比$\sim P\vee Q$和$P\rightarrow Q$的真值表，可以发现它们完全一致。 ■

【例 1.4】 构造公式$(\sim P\wedge Q)\vee(P\wedge\sim Q)$的真值表。

【解】 公式包含的子公式较多，因此中间结果也多些。与例 1.3 中的处理办法相似，得到的真值表如表 1-9 所示。

表 1-8

P	Q	$\sim P$	$\sim P\vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

表 1-9

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P\wedge Q$	$P\wedge\sim Q$	$(\sim P\wedge Q)\vee(P\wedge\sim Q)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

从表中可以看出，公式取值 0 当且仅当 P 和 Q 取值相同。这正反映了不可兼或的意义，因此这个公式的取值情况与 $P\bigtriangledown Q$ 的取值情况是完全一致的。 ■

下面是一个含 3 个原子变元的公式例子。

【例 1.5】 构造$\sim(P\vee Q)\rightarrow R$的真值表。

【解】 公式中含有 3 个原子变元 P，Q 和 R。根据各自取值的情况得到公式的真值表如表1-10所示。

表 1-10

P	Q	R	$P\vee Q$	$\sim(P\vee Q)$	$\sim(P\vee Q)\to R$	P	Q	R	$P\vee Q$	$\sim(P\vee Q)$	$\sim(P\vee Q)\to R$
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1

不难发现，这个公式的取值情况与 $P\vee Q\vee R$ 的取值情况完全一致。 ■

【例 1.6】 构造公式 $(P\to Q)\wedge(P\wedge\sim Q)$ 的真值表。

【解】 其真值表如表 1-11 所示。

这个公式对任何解释取值均为 0。 ■

【例 1.7】 构造公式 $(P\to Q)\vee P$ 的真值表。

【解】 其真值表如表 1-12 所示。

表 1-11

P	Q	$P\to Q$	$P\wedge\sim Q$	$(P\to Q)\wedge(P\wedge\sim Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

表 1-12

P	Q	$P\to Q$	$(P\to Q)\vee P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

这个公式对任何解释都取值 1。 ■

由上面几个例子可以看出，公式的取值方式数目取决于它包含的原子命题数目。当它含 2 个原子变元时，有 4 种解释公式的方式；当它含 3 个原子变元时，有 8 种解释公式的方式。一般地，如果公式含有 n 个原子变元，就有 2^n 种解释公式的方法，其真值表的值域部分应有 2^n 行。

观察公式的真值表，也可以发现公式的某些性质，按照性质可以对命题公式进行一些大的分类。

定义 1.11 *如果对命题公式的任何解释，公式均取值 1(或 0)，则称这个公式为***永真式***(或***矛盾式***)。若存在解释使公式取值 1，则称这个公式为***可满足公式***。*

永真式又称重言式，记为 T(Ture)；矛盾式又称为不可满足公式，记为 F(False)。自然，永真式是可满足公式中的特殊类别，有着重要作用。

根据真值表的构成方式，容易得到以下定理。

定理 1.1 *两个永真式（或矛盾式）的合取式或析取式仍是一个永真式（或矛盾式）。*

【证明】 因为这两个公式对应的两列值完全相同，根据合取与析取运算定义，其结果对应的值列与原来公式相同，因此性质保持不变。 ■

构造一个公式的真值表，对于理解公式的性质很有帮助，它是公式的另一种表现方式。在实际应用中，只要掌握了一个公式的真值表，就等于掌握了公式本身。

1.3 命题公式的等价

从上节的例子和习题看到，有些命题公式尽管表面形式不同，但是它们的真值表却完全一致，这种现象产生于命题表达方式的多样性。例如“5＞3”与“3＜5”是完全一致的命

题；“如果小王不来，小李就来”的另一种表述法是“要么小王来，要么小李来”，或者“如果小李不来，小王就来”等。从这些不同表述方式翻译而得的命题公式尽管外表有区别，但本质上并无不同。

定义 1.12 设 A 和 B 是命题公式，如果对 A 和 B 的任何解释（即对原子变元的任何赋值）都导致 A 和 B 有相同的真值，则称 A 和 B 是**等价**的，记为 $A \Leftrightarrow B$。

判断两个命题公式是否等价的方法之一，是比较它们的真值表。

【例 1.8】 判定公式 $\sim(P \wedge Q)$ 和 $\sim P \vee \sim Q$ 的等价性。

【解】 列出真值表如表 1-13 所示。

表 1-13

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

两个公式的真值表完全相同，因此 $\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$。与此对应的另一等价式为 $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$。这两个等价式便是著名的 De Morgan 律。 ■

利用真值表判别公式间的等价性有其直观明了的优点。但当公式中的原子变元数目增加时，真值表的行数将以指数级的规模增长，以致难以操作。因此，证明公式的等价性通常采用等价变换方法，即利用一些已知的等价式，将欲证明的公式进行变换后得到所需要的结果。下面列出一些最基本的等价式（它们都有特定的名称），作为证明一般等价性的出发点。

E_1：$\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$	（双重否定律）	E_{13}：$\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$。 E_{14}：$\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$	（De Morgan 律）
E_2：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$	（蕴涵律）		
E_3：$P \vee P \Leftrightarrow P$ E_4：$P \wedge P \Leftrightarrow P$	（幂等律）	E_{15}：$P \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$ E_{16}：$P \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$	（同一律）
E_5：$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ E_6：$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	（交换律）	E_{17}：$P \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ E_{18}：$P \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$	（零律）
E_7：$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ E_8：$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	（结合律）	E_{19}：$P \wedge \sim P \Leftrightarrow \mathrm{F}$ E_{20}：$P \vee \sim P \Leftrightarrow \mathrm{T}$	（矛盾律）
E_9：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ E_{10}：$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	（分配律）	E_{21}：$P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$	（排中律）
		E_{22}：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	（等价律）
E_{11}：$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ E_{12}：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	（吸收律）	E_{23}：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$	（逆反律）

利用上面这些定律，就可以把一个公式变成等价的另一个公式。

定理 1.2 设 A 是公式 X 的一个子公式，并且 $A \Leftrightarrow B$。用公式 B 替换 X 中的子公式 A 后得到新公式 Y，则必有 $X \Leftrightarrow Y$。

【证明】 因为 $A \Leftrightarrow B$，在 X 中 A 用 B 取代后，在任何解释下原值不变，即 Y 和 X 有相同的真值，因此是等价的。 ■

【例 1.9】 证明 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$。

【证明】 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ （蕴涵律）

$\Leftrightarrow Q \vee \sim P$ （交换律）

$\Leftrightarrow \sim(\sim Q) \vee \sim P$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$ （蕴涵律） ■

这个等价式实际上是反证法的逻辑依据，称为**逆反律**。

【例 1.10】 证明 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow Q \rightarrow R$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com