初中几何解题指南

郝雨淋 主编

农村读物出版社

初中几何解题指南

主编　翟连林　贾士代
编者　贾　磊　赵用金　李登印　常克峰
　　　张　戈　刘东河　代修锰　赵丙戌

1989年·北京

内 容 简 介

本书紧扣新颁布的初中数学教学大纲和全国通用的初中数学课本，以教材内容为序，系统地归纳和总结了平面几何的基本概念、定理和公式，通过对历年来全国各省市高中招生和初中竞赛的优秀数学试题的分析、解答、评注，揭示解题规律，总结思路方法，有利于读者扎扎实实地学好数学、开拓思路、发展思维、提高解题的应变能力。

本书可作为初中学生配合教材同步学习和全面复习几何用书，也可供初中数学教师和中专师生参考。

初中几何解题指南

翟连林 主编

责任编辑 王炜琨

•

农村读物出版社 出版

密云双井印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

•

787×1092毫米 1/32 8.1875印张 184千字

1989年2月第1版 1989年2月北京第1次印刷

印数：1—22000 定价：2.90元

ISBN 7-5048-0514-9/G.168

前　言

为了帮助初中学生和自学青少年扎扎实实地学好数学、开拓思路、发展思维、提高解题的应变能力，我们编写了《初中代数解题指南》和《初中几何解题指南》两本书。

这套书紧扣新颁布的初中数学教学大纲和全国通用的初中数学课本，以教材内容为序，通过对历年来全国各省市高中招生和初中竞赛的优秀数学试题的分析、解答、评注，阐明基础知识和基本技能的综合与灵活运用，总结思路方法，揭示解题规律。

为了使这套"解题指南"名符其实，我们特别从下面两个方面做了努力：

1.精选例题

在选题时，我们把注意力集中在最能体现概念、公式、法则的活用和解题的方法与技巧上，尽量使题目的解法耐人寻味，有较大的魅力，以利增进学生的浓厚兴趣。在题目编写的顺序上，以题组为主，由易到难，构成阶梯，便于读者循序渐进，逐级提高。

2.总结规律

为了使学生养成良好的学习习惯，注意解题后的反思，我们在每一节中都设有"解题方法小结"专栏，着重归结解题思路、方法与技巧，在《初中几何解题指南》的末一章，全面系统地总结了初中数学的各种思维与解题方法。这样，利于读者抓住数学的实质，早日从机械模仿，照搬例题的低层

次上升到举一反三，触类旁通的较高层次。

这套书可作为初中学生、自学青少年配合教材的同步读物和初中三年级学生全面复习的综合读物，也可供初中数学教师和中专师生参考。

由于我们的水平有限，书中错误难免，敬请广大读者斧正。

编　者

1988年6月30日

目　录

第一章　平行线与三角形

第一节　平　行　线

基　础　知　识

1. 平行线的基本性质

(1) 平行公理

过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

(2) 三线平行定理

若两条直线都与第三条直线平行，则这两条直线平行.

2. 平行线的判定定理

(1) 两条直线被第三条直线所截，若同位角相等，则这两条直线平行；

(2) 两条直线被第三条直线所截，若内错角相等，则这两条直线平行；

(3) 两条直线被第三条直线所截，若同旁内角互补，则这两条直线平行。

3. 平行线的性质定理

(1) 若两条平行线被第三条直线所截，则同位角相等；

(2) 若两条平行线被第三条直线所截，则内错角相等；

(3) 若两条平行线被第三条直线所截，则同旁内角互补.

典 型 例 题

例1 已知：$\angle BCD=\angle ABC+\angle CDE$ （如图1-1）.

求证：$BA \parallel DE$.

【思路】 用三线平行定理，证明BA、DE都平行于第三条直线.

【证明】 过C作直线$FC \parallel BA$，则$\angle ABC=\angle BCF$.

$\because \angle BCD=\angle ABC+\angle CDE$,

$\angle BCD=\angle BCF+\angle FCD$,

则$\angle ABC+\angle CDE=\angle BCF+\angle FCD$.

而$\angle ABC=\angle BCF$,

$\therefore \angle FCD=\angle CDE$. 于是$FC \parallel DE$.

$\because BA$、DE都平行于FC， $\therefore BA \parallel DE$.

【评注】 上述证明利用了平行公理，三线平行定理，平行线的判定定理和性质定理，体现了“$a=b+c$”型问题作辅助线的方法.

例2 求证：三角形三个内角之和等于180°.

已知：$\triangle ABC$ （如图1-2）.

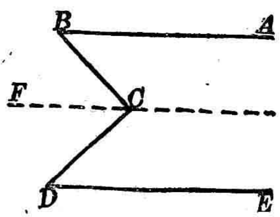

图 1-1

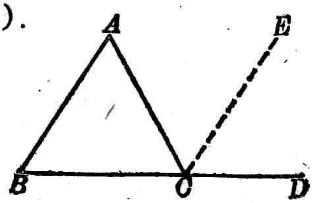

图 1-2

求证：$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$.

【思路】问题可转化为证 $\angle A+\angle B=180°-\angle ACB$.由图1-2知，$180°-\angle ACB=\angle ACD$,

从而只需证$\angle A+\angle B=\angle ACD$. 这可利用平行线把$\angle ACD$分成两个角，使其中的一个角 $\angle ACE=\angle A$，另一个角$\angle ECD=\angle B$。

【证明】 过C作直线$CE\parallel BA$，延长BC到D，则

$\angle A=\angle ACE$，$\angle B=\angle ECD$.

$\because$ $\angle BCA+\angle ACE+\angle ECD=180°$，

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$.

【评注】 本题的结论是三角形内角和定理，它也可用过点A且平行于BC的直线证得. 这个定理的证明虽然简单，但其思路非常典型，它体现了：

(1) 平行线的作用——移等角；

(2) 证一个量等于几个量的和，例如$a=b+c+d$，可用数与形相结合的思想方法，先在a中分出一个量使之等于b，证余下的量 $e=a-b$等于$c+d$；再在e中分出一个量使之等于c，证剩下的量$e-c$等于$c+d$.

例3 已知：$AB\parallel CD$，$\angle BAC$与$\angle ACD$的平分线相交于点H(如图1-3). 求证：$AH\perp CH$.

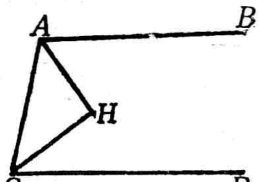

图1—3

【思路】 由三角形内角和定理知，只需证

$\angle HAC+\angle ACH=90°$，

两边乘以2，得

$2\angle HAC+2\angle ACH=180°$，

即证 $\angle BAC+\angle ACD=180°$，

这可由$AB\parallel CD$得到.

【证明】 $\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle BAC+\angle ACD=180°$.

$\because AH$、CH分别是$\angle BAC$和$\angle ACD$的平分线，

$\therefore \angle HAC+\angle HCA=90^\circ$.

$\because \angle HAC+\angle ACH+\angle AHC=180^\circ$,

$\therefore \angle AHC=90^\circ$　　　　即$AH\perp HC$.

【评注】 (1)本题的图形是平面几何的一个基本图形，希望读者注意；

(2) 本题体现了证两条直线垂直的一种方法.

方　法　小　结

本节学习的解题方法如下：

1. 证两条直线平行

(1) 利用三线平行公理；

(2) 利用平行线的判定定理.

2. 平行线的作用

由平行线的性质定理知，利用平行线可进行角的等量代换，即平行线的作用是移等角. 因此，辅助平行线在证明角的关系式时，起着极其重要的作用.

3. 证两条直线垂直

(1) 利用定理"若两条平行线中的一条垂直于一条直线，则另一条也垂直于这条直线"；

(2)如图1-4，证$AB\perp BC$，即证$\angle ABC=90^\circ$或$\angle BAC+\angle ACB=90^\circ$.

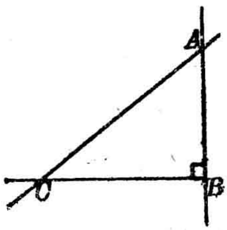

图 1-4

4. 关于"$a=b+c+d$ 型"问题的解题思路，可用代数中的数与几何中的图形相结合的方法(参看例 1 和例2). 一般地说"数形结合"是一种重要的解题方法.

习 题 精 荟

1. 若一个角等于它的余角的2倍，则这个角是它的补角的(　　)倍.

(A) 2; (B) $\frac{1}{2}$; (C) 5; (D) $\frac{1}{5}$.

2. 若两条直线被第三条直线所截，则(　　)

(A) 内错角的平分线互相平行;

(B) 同位角的平分线所在直线一定相交;

(C) 同旁内角的平分线一定垂直;

(D) 以上结论都不对.

3. 下列诸命题中，错误的一个是(　　).

(A) 同一平面内，若两条直线不相交，则它们必平行;

(B) 若两条直线都和同一条直线平行，则它们必平行;

(C) 若两个锐角的两边分别平行，则这两个角相等;

(D) 过一点可作一条直线与已知直线平行.

4. 如图 1-5，$AB\parallel CD$，$\angle ABE=150°$，$\angle CDE=120°$，则$\angle BED$的大小为______.

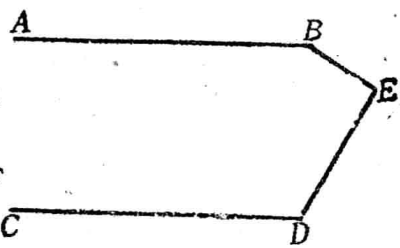

图 1-5

5. 已知：$AB\parallel CD$，$AEFGC$是折线(如图1-6)．求证：$\angle AEF+\angle FGC=\angle BAE+\angle EFG+\angle GCD$.

6. 已知：$\angle ADC=\angle ABC$，DE、BF分别是$\angle ADC$、

$\angle ABC$的平分线，且$\angle AED=\angle ABF$(如图1-7)．求证：$DE \parallel FB$．

7 在$\triangle ABC$中，BD是角平分线，过A作$AE \parallel DB$交CB的延长线于E．求证：$AB=BE$．

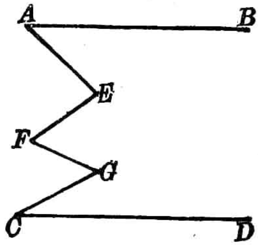

图 1-6

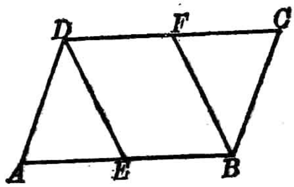

图 1-7

习题答案或提示

1．(B)．

2．(D)．

3．(C)．

4．$90°$．

5．分别过E、F、G作AB的平行线．

6．证$\angle AED=\angle EDF$．

7．证$\angle BAE=\angle BEA$．

第二节　全等三角形

1．三角形的基本性质

(1) 三角形任意两边之和大于第三边；

(2) 三角形任意两边之差的绝对值小于第三边；

(3) 三角形三个内角之和等于180°；

(4) 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角之和；

(5) 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角；

(6) 凸n边形n个内角之和等于$(n-2)\cdot180°$；

(7) 凸多边形的外角之和等于360°；

(8) 三角形的面积等于它的底与高之积的一半.

2. 全等三角形

(1) 全等三角形的判定

边角边公理　两边及其夹角对应相等的两个三角形全等

角边角公理 两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.

边边边公理　三边对应相等的两个三角形全等.

(2) 全等三角形的性质

全等三角形的对应边相等、对应角相等.

典 型 例 题

例1　若凸n边形的n个内角与某一个外角的总和为1350°，则n等于(　　).

(A) 6；　　(B) 7；　　(C) 8；　　(D) 9.

【思路】用凸n边形的内角和公式$(n-2)\times180°$和凸n边形的任一个外角大于0°且小于180°求解.

【解】　设已知的外角的大小为x，则

$(n-2)\times180°+x=1350°$.

从而　$x=1350°-(n-2)\times180°=(19-2n)\times90°$.

$\because$　$0°<x<180°$，n是正整数，

$\therefore$　$n=9$.　　　　故选 (D).

【评注】 本解法中的方程含有两个未知数，叫做不定方程，解此类方程要注意用不等式知识和n是正整数.

例2 如图1-8是一个五角星的每一个角剪去一部分所成，求$\angle M_1+\angle M_2+\angle M_3+\ldots+\angle M_{10}$的值

【解】 如图1-8.

$\because \angle M_1+\angle M_2+\angle 6+\angle 7=(4-2)\times 180=360^\circ$，

$\angle 1+\angle 2+\angle 6+\angle 7=2\times 180^\circ=360^\circ$，

$\therefore \angle M_1+\angle M_2+6+\angle 7$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 6+\angle 7$

从而$\angle M_1+\angle M_2=\angle 1+\angle 2$

同理$\angle M_3+\angle M_4=\angle 2+\angle 3$，

$\angle M_5+\angle M_6=\angle 3+\angle 4$，

$\angle M_7+\angle M_8=\angle_4+\angle_5$，

$\angle M_9+\angle M_{10}=\angle 5+\angle 1$，

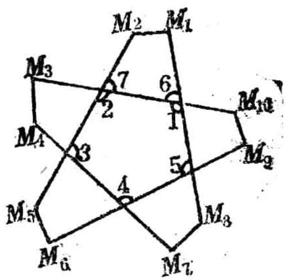

图 1-3

于是$\angle M_1+\angle M_2+\angle M_3+\ldots$

$+\angle M_{10}$

$=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5)$.

又 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=(5-2)\times 180^\circ=540^\circ$，

故$\angle M_1+\angle M_2+\angle M_3+\ldots+\angle M_{10}=1080^\circ$.

例3 在$\triangle ABC$中，已知 $AB>AC$， $BD\perp AC$ 于 D，$CE\perp AB$于E.

求证：$CE<BD$.

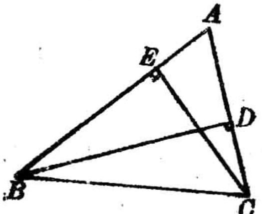

图 1-9

【思路】因涉及三角形的边与边上的高，故可用三角形的面积公式去证.

【证明】 如图1-9，

由三角形的面积公式得

$$\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BD,$$

即　$AB\cdot CE=AC\cdot BD.$

$\because$　$AB>AC$,　　$\therefore$　$CE<BD.$

【评注】　上述证法十分简明、巧妙. 一般地说，利用三角形的面积公式解证三角形边或角关系式的方法叫面积法. 在第四章中，我们将详细阐明它.

例4　已知：在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，作$\angle BAD=\angle ABE$，且AD与CB的延长线交于点D，BE与CA的延长线交于点E(如图1-10).

求证：$\angle ADB=\angle AEB.$

【思路】欲证$\angle ADB=\angle AEB$，可证$\triangle CAD\cong\triangle CBE.$

【证明】　如图1-10.

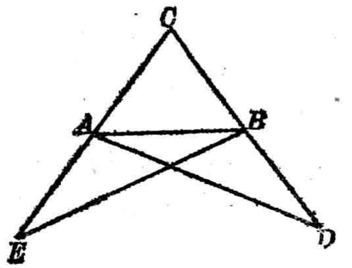

图 1-10

$\because$　$CA=CB$,

$\therefore$　$\angle CAB=\angle CBA.$

已知$\angle BAD=\angle ABE$,

$\therefore$　$\angle CAD=\angle CBE.$

又　$AC=BC$，$\angle ACD=\angle BCE$,

$\therefore$　$\triangle CAD\cong\triangle CBE.$

于是　$\angle ADB=\angle AEB.$

【评注】　证两个角相等，可考虑证它们是两个全等三角形的对应角.

例5　已知：AM是$\triangle ABC$的中线.

求证：$AM<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

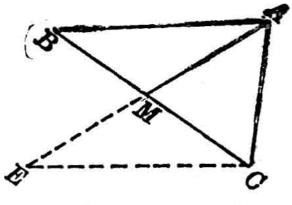

图 1-11

【思路】 要证原不等式成立，即证$2AM<AB+AC$.联想到三角形两边之和大于第三边，需要构造一个三角形，它的三边长分别等于AB、AC、$2AM$的长.

【证明】 如图1-11.

延长AM到E，使$ME=AM$，连结CE.

$\because$ $BM=MC$，$AM=ME$；

$\angle AMB=\angle EMC$，

$\therefore$ $\triangle AMB\cong\triangle EMC$.

从而 $CE=AB$.

在$\triangle ACE$中，

$\because$ $AC+CE>AE$，$AE=2AM$，

$\therefore$ $AC+AB>2AM$.

即$AM<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

【评注】 本证法体现了三角形的中线（或三角形一边的中点）作辅助线的方法，即把中线延长到原来的2倍.

例6 （1）已知：在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中，

$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=100°$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$；

（2）在上题中，若把条件100°改为40°，其余不变，则原结论仍然成立吗？为什么？

【解】 （1）如图1-12(1)和1-12(2).

作$BD\perp AC$，