国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 8

大气动力学

（第二版）

下册

刘式适 刘式达 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 8

大气动力学

(第二版)

下册

刘式适 刘式达 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

下 册 目 录

第八章 波的传播理论

本章的主要内容有：

分析缓变波列的主要性质，同时引进局地波的参数和运动学关系；

介绍波能密度和波能通量矢量的概念，并建立波能密度守恒原理；

引进 Lagrange 量和波作用量，并根据波能密度守恒原理导出波作用量守恒原理；

介绍波的多尺度方法，并综合运用小参数方法，一并导出波的频率方程和波作用守恒原理；

介绍 Rossby 波传播的一些特征和对动量、热量的输送；

叙述 E-P 通量和用它来讨论东西风带和经圈环流；

分析波与基本气流间的相互作用和大气扰动演变的特征；

分析波与波之间的相互作用.

§8.1 缓变波列(slowly varying wave train)

由上一章分析知：波列与单波不同，其振幅也随空间和时间缓慢地变化，因而，不能像单波那样，仅用一个简单的正弦或余弦函数来表征. 事实上，只有在严格的均匀介质(在均匀介质中，基本参数，如 N^2，$\bar{u}$ 等均认为是常数)中，正弦函数或余弦函数才是正交模，而且在均匀介质中，波动的参数 k,l,n,ω 等也是常数；对于非均匀介质(其中基本参数 N^2，$\bar{u}$ 等均为变量)中的波动(波参数 k,l,n,ω 等也为变量)，不能再用正余弦函数来表征. 不过，波群或缓变波列的分析，为我们讨论非均匀介质中的波提供了一个很好的近似.

据波列分析，我们把非均匀介质中的波表示为下列缓变波列：

$$\psi = A(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r},t)}, \tag{8.1}$$

其中振幅函数 $A(\boldsymbol{r},t)$ 随 $\boldsymbol{r},t$ 缓慢变化；$\theta(\boldsymbol{r},t)$ 是相位函数. 由于 $A(\boldsymbol{r},t)$ 是缓变函数，在一个局部范围内，仍可视 A 为常数，所以，在局部范围内，(8.1)式也可认为是单波. 正由于此，缓变波列中的波参数(波数和圆频率等)都具有局地性. 为此，我们定义缓变波列的局地频率为

$$\omega(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial\theta}{\partial t}, \tag{8.2}$$

而缓变波列在 x,y,z 方向上的局地波数分别定义为

$$\begin{cases} k(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ l(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\partial\theta}{\partial y}, \\ n(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\partial\theta}{\partial z}. \end{cases} \tag{8.3}$$

相应，局地波矢量为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t)=k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}=\nabla\theta. \tag{8.4}$$

将(8.1)式分别对 t,x,y,z 微商有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial t}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right)\psi=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial t}-\mathrm{i}\omega\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right)\psi=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x}+\mathrm{i}k\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right)\psi=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y}+\mathrm{i}l\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial z}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)\psi=\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial z}+\mathrm{i}n\right)\psi. \end{cases} \tag{8.5}$$

因为在缓变波列中，相对于相位而言，振幅是缓变的，所以，由上式知，缓变波列意味着

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\ll|\omega|,\quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\ll|k|,\quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\ll|l|,\quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial z}\ll|n|. \tag{8.6}$$

这样，(8.5)式可近似为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t}\approx-\mathrm{i}\omega\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\approx\mathrm{i}k\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\approx\mathrm{i}l\psi, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\approx\mathrm{i}n\psi. \end{cases} \tag{8.7}$$

这实际上是把(8.1)式中的 A 近似视为常数. 或者说，在局部范围内，缓变波列仍可以用正余弦函数去近似.

由(8.2)式和(8.3)式，我们可以得到缓变波列的下述运动学关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial x}=-\dfrac{\partial k}{\partial t},\quad \dfrac{\partial\omega}{\partial y}=-\dfrac{\partial l}{\partial t},\quad \dfrac{\partial\omega}{\partial z}=-\dfrac{\partial n}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial k}{\partial y}=\dfrac{\partial l}{\partial x},\quad \dfrac{\partial k}{\partial z}=\dfrac{\partial n}{\partial x},\quad \dfrac{\partial l}{\partial z}=\dfrac{\partial n}{\partial y}. \end{cases} \tag{8.8}$$

类似，我们定义缓变波列的局地频散关系为

$$\omega=\Omega(\boldsymbol{K};\boldsymbol{r},t), \tag{8.9}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 按(8.4)式也是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数.上式通常是由扰动方程导得的.

由(8.2)式和(8.9)式,我们可以定义缓变波列的局地相速度和群速度分别是

$$\boldsymbol{c}=\frac{\omega}{\boldsymbol{K}}=\frac{\omega}{K^2}\boldsymbol{K}, \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{c}_g=\frac{\partial\Omega}{\partial K}=c_{gx}\boldsymbol{i}+c_{gy}\boldsymbol{j}+c_{gz}\boldsymbol{k}, \tag{8.11}$$

其中

$$c_{gx}=\frac{\partial\Omega}{\partial k},\quad c_{gy}=\frac{\partial\Omega}{\partial l},\quad c_{gz}=\frac{\partial\Omega}{\partial n}. \tag{8.12}$$

由(8.9)式,根据复合函数的微商法则求得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial t}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial t}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}+c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial t}+c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial t}+c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial t},\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial x}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial x}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial x}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}+c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial x}+c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial x}+c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial x},\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial y}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial y}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial y}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}+c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial y}+c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial y}+c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial y},\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial z}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial z}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\dfrac{\partial l}{\partial z}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial n}\dfrac{\partial n}{\partial z}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}+c_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial z}+c_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial z}+c_{gz}\dfrac{\partial n}{\partial z}.\end{cases} \tag{8.13}$$

利用(8.8)式,(8.13)式可改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}-\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla\omega,\\ -\dfrac{\partial k}{\partial t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla k,\\ -\dfrac{\partial l}{\partial t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla l,\\ -\dfrac{\partial n}{\partial t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla n,\end{cases} \tag{8.14}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{D}_g\omega}{\mathrm{D}t}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial t},\\ \dfrac{\mathrm{D}_g k}{\mathrm{D}t}=-\dfrac{\partial\Omega}{\partial x},\\ \dfrac{\mathrm{D}_g l}{\mathrm{D}t}=-\dfrac{\partial\Omega}{\partial y},\\ \dfrac{\mathrm{D}_g n}{\mathrm{D}t}=-\dfrac{\partial\Omega}{\partial z},\end{cases} \tag{8.15}$$

其中后三式可合写为

$$\frac{\mathrm{D_g}\boldsymbol{K}}{\mathrm{D}t}=-\nabla\Omega, \tag{8.16}$$

在上两式中

$$\frac{\mathrm{D_g}}{\mathrm{D}t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{g}}\cdot\nabla. \tag{8.17}$$

(8.15)式和(8.16)式表明：在非均匀介质的波动中，圆频率 ω 和波数(或波矢)在按群速度移动的过程中是不守恒的. 同样，波能也不会守恒(详见§8.8).

对于均匀介质中的波动，ω 与 $\boldsymbol{r}, t$ 无关，(8.9)式化为

$$\omega=\Omega(\boldsymbol{K}). \tag{8.18}$$

这样，(8.15)式和(8.16)式分别写为

$$\frac{\mathrm{D_g}\omega}{\mathrm{D}t}=0,\quad\frac{\mathrm{D_g}k}{\mathrm{D}t}=0,\quad\frac{\mathrm{D_g}l}{\mathrm{D}t}=0,\quad\frac{\mathrm{D_g}n}{\mathrm{D}t}=0, \tag{8.19}$$

$$\frac{\mathrm{D_g}\boldsymbol{K}}{\mathrm{D}t}=0. \tag{8.20}$$

这些都表明：在均匀介质的波动中，圆频率 ω 和波数(或波矢)在按群速度移动的过程中是守恒的. 所以，在均匀介质中，群速度 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{g}}$ 也是波矢 $\boldsymbol{K}$ 的传播速度. 事实上，若介质在空间和时间上都是均匀的，则圆频率和波数都是常量.

§8.2 波能密度及其守恒原理

下面，我们以正压模式为例，说明波能密度的概念和波能密度守恒原理.

一、惯性-重力外波

线性的正压模式方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-f_0 v=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial x},\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+f_0 u=-\dfrac{\partial\phi'}{\partial y},\\[2mm]\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{cases} \tag{8.21}$$

对于惯性-重力外波，f 为常数；就写为 f_0. 将方程组(8.21)的前两式化为涡度方程和散度方程，则方程组(8.21)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+f_0 D=0,\\ \dfrac{\partial D}{\partial t}-f_0\zeta=-\nabla_h^2\phi',\\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+c_0^2 D=0.\end{cases}\tag{8.22}$$

方程组(8.22)通过消元很易求得

$$\mathscr{L}D=0,\tag{8.23}$$

其中

$$\mathscr{L}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_0^2\nabla_h^2+f_0^2.\tag{8.24}$$

因由方程组(8.22)的第三式，$D=-\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}$，则对 ϕ' 也有方程

$$\mathscr{L}\phi'=0.\tag{8.25}$$

方程(8.23)或(8.25)即是 Klein-Gordon 方程. 以单波解代入方程(8.25)求得惯性-重力外波的频散关系为

$$\omega^2=K_h^2c_0^2+f_0^2.\tag{8.26}$$

相应求得群速度在 x,y 方向上的分量是

$$c_{gx}\equiv\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{kc_0^2}{\omega},\quad c_{gy}\equiv\frac{\partial\omega}{\partial l}=\frac{lc_0^2}{\omega}.\tag{8.27}$$

为了方便，令

$$\psi=\phi'/f_0,\tag{8.28}$$

则方程(8.25)化为

$$\mathscr{L}\psi=0.\tag{8.29}$$

以$\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$乘方程(8.29)的两端，注意

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{1}{2c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}(-c_0^2\nabla_h^2\psi)&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h\psi)^2-\nabla_h\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla_h\psi\right),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}(f_0^2\psi)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\lambda_0^2\psi^2,$$

则方程(8.29)化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+(\nabla_h\psi)^2+\lambda_0^2\psi^2\right]\right\}+\nabla_h\cdot\left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla_h\psi\right)=0,\tag{8.30}$$

这是惯性-重力外波的能量方程. 其中$\frac{1}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$相当于垂直运动动能，$\frac{1}{2}(\nabla_{\mathrm{h}}\psi)^2$和$\lambda_0^2\psi^2$分别是水平运动动能和重力势能.

设ψ是一缓变波列，即

$$\psi=\mathrm{Re}\{A(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,y,t)}\}=a\cos(\theta+\alpha),\tag{8.31}$$

其中

$$a=|A|,\quad \alpha=\arg A,\quad \theta=kx+ly-\omega t.\tag{8.32}$$

作为缓变波列的第一近似，忽略a和α的变化，同时忽略ω,k,l的变化.

由(8.31)式得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\omega a\sin(\theta+\alpha),\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-ka\sin(\theta+\alpha),\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-la\sin(\theta+\alpha).\end{cases}\tag{8.33}$$

因而，惯性-重力外波的总能量为

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+(\nabla_{\mathrm{h}}\psi)^2+\lambda_0^2\psi^2\right]\\&=\frac{1}{2c_0^2}(\omega^2+K_{\mathrm{h}}^2c_0^2)a^2\sin^2(\theta+\alpha)+\frac{1}{2}\lambda_0^2a^2\cos^2(\theta+\alpha);\end{aligned}\tag{8.34}$$

而能量通量矢量为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla_{\mathrm{h}}\psi=\omega\boldsymbol{K}_{\mathrm{h}}a^2\sin^2(\theta+\alpha).\tag{8.35}$$

这样，能量方程(8.30)可改写为

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla_{\mathrm{h}}\cdot\boldsymbol{F}=0.\tag{8.36}$$

因为$\cos^2(\theta+\alpha)$和$\sin^2(\theta+\alpha)$在一个周期$T=2\pi/\omega$内的平均值为$1/2$，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\theta+\alpha)\mathrm{d}t&=\frac{1}{\omega T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(kx+ly+\alpha-\omega t)\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}[1+\cos2(kx+ly+\alpha-\omega t)]\mathrm{d}\omega t=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2(\theta+\alpha)\mathrm{d}t&=\frac{1}{\omega T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2(kx+ly+\alpha-\omega t)\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}[1-\cos2(kx+ly+\alpha-\omega t)]\mathrm{d}\omega t=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因而将(8.34)式和(8.35)式在一个周期$T=2\pi/\omega$内求平均得到惯性-重力外波在

一个周期 T 内能量和能通量矢量的平均值分别为

$$\begin{cases} \mathscr{E} = \dfrac{1}{4c_0^2}(\omega^2 + K_h^2 c_0^2 + f_0^2)a^2, \\ \vec{\mathscr{F}} = \dfrac{1}{2}\omega a^2 \boldsymbol{K}_h. \end{cases} \tag{8.37}$$

以(8.26)式和(8.27)式代入,则有

$$\begin{cases} \mathscr{E} = \dfrac{1}{2c_0^2}(K_h^2 c_0^2 + f_0^2)a^2 = \dfrac{1}{2}(K_h^2 + \lambda_0^2)a^2 = \dfrac{1}{2c_0^2}\omega^2 a^2, \\ \vec{\mathscr{F}} = \mathscr{E}\boldsymbol{c}_g, \end{cases} \tag{8.38}$$

$\mathscr{E}$ 称为波能密度,$\vec{\mathscr{F}}$ 称为波能通量密度矢量. 这样,能量方程(8.36)在一个周期 T 内的平均为

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + \nabla_h \cdot \mathscr{E}\boldsymbol{c}_g = 0. \tag{8.39}$$

上式表明:波能密度的时间变化在均匀介质中完全决定于波能通量密度矢量的散度.

二、正压 Rossby 波

线性正压 Rossby 波满足方程

$$\mathscr{L}\psi = 0, \tag{8.40}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2 - \lambda_0^2) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x}. \tag{8.41}$$

以 ψ 乘方程(8.40)两端得到正压 Rossby 波的能量方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}[(\nabla_h \psi)^2 + \lambda_0^2 \psi^2]\right\} + \nabla_h \cdot \left[-\psi \nabla_h\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\beta_0}{2}\psi^2 \boldsymbol{i}\right] = 0, \tag{8.42}$$

这也就是第六章的方程(6.91).

由方程(8.40)求得正压 Rossby 波的频散关系为

$$\omega = -\beta_0 k/(K_h^2 + \lambda_0^2). \tag{8.43}$$

相应

$$c_{gx} = \frac{\beta_0(k^2 - l^2 - \lambda_0^2)}{(K_h^2 + \lambda_0^2)^2}, \quad c_{gy} = \frac{2\beta_0 kl}{(K_h^2 + \lambda_0^2)^2}. \tag{8.44}$$

类似,设 ψ 是一缓变波列:

$$\psi = a\cos(\theta + \alpha), \tag{8.45}$$

则求得正压 Rossby 波的总能量为

$$E \equiv \frac{1}{2}[(\nabla_h \psi)^2 + \lambda_0^2 \psi^2] = \frac{1}{2}K_h^2 a^2 \sin^2(\theta + \alpha) + \frac{1}{2}\lambda_0^2 a^2 \cos^2(\theta + \alpha); \tag{8.46}$$

而能量通量矢量为

$$\boldsymbol{F} \equiv -\psi\nabla_h\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\beta_0}{2}\psi^2\boldsymbol{i}=-\left(\omega\boldsymbol{K}_h+\frac{\beta_0}{2}\boldsymbol{i}\right)a^2\cos^2(\theta+\alpha). \tag{8.47}$$

E 和 $\boldsymbol{F}$ 在一个周期内的平均值，即波能密度和波能通量密度矢量分别是

$$\begin{cases}\mathscr{E}=(K_h^2+\lambda_0^2)a^2/4,\\ \vec{\mathscr{F}}=\left(\omega\boldsymbol{K}_h+\dfrac{\beta_0}{2}\boldsymbol{i}\right)a^2\Big/2.\end{cases} \tag{8.48}$$

利用(8.43)式和(8.44)式有

$$\begin{cases}\mathscr{E}=-a^2\beta_0 k/4\omega,\\ \vec{\mathscr{F}}=\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g.\end{cases} \tag{8.49}$$

因而，能量方程(8.42)在一个周期 T 内的平均值为

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\nabla_h\cdot\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g=0. \tag{8.50}$$

这与方程(8.39)在形式上完全一样.

由上两例分析可知：对于线性波动，作为缓变波列的第一近似，它有许多共同的特征. 首先，波能密度 $\mathscr{E}$ 都可以表为

$$\mathscr{E}=f(\boldsymbol{K})a^2, \tag{8.51}$$

其中 $f(\boldsymbol{K})$ 依赖于波的性质. 其次，对均匀介质中的波动，波能密度遵守守恒原理：

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g=0. \tag{8.52}$$

将(8.51)式代入(8.52)式，注意均匀介质的(8.20)式，则得

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}+\nabla\cdot a^2\boldsymbol{c}_g=0. \tag{8.53}$$

这是能量以群速度 $\boldsymbol{c}_g$ 传播的基本表达式.

§8.3　波作用量及其守恒原理

我们仍以正压模式为例，说明波作用量的概念和波作用量守恒原理.

一、惯性-重力外波

若令

$$\psi_t\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t},\quad \psi_x\equiv\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \psi_y\equiv\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \psi_z\equiv\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{8.54}$$

则惯性-重力外波的方程(8.29)可以写为

$$F(t,x,y;\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y)=0, \tag{8.55}$$

其中

$$F(t,x,y;\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y) \equiv \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial t}-\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)+\lambda_0^2\psi. \tag{8.56}$$

由变分原理知，在任意区域 R 上的泛函

$$J[\psi]=\iiiint\limits_R L(\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y,\psi_z)\delta t\delta x\delta y\delta z \tag{8.57}$$

的极值问题与 Euler 方程

$$L_\psi-\frac{\partial L_{\psi_t}}{\partial t}-\frac{\partial L_{\psi_x}}{\partial x}-\frac{\partial L_{\psi_y}}{\partial y}-\frac{\partial L_{\psi_z}}{\partial z}=0 \tag{8.58}$$

的求解等价.(8.57)式中的 $L(\psi,\psi_t,\psi_x,\psi_y,\psi_z)$称为 Lagrange 量或 Lagrange 函数. 方程(8.58)即是波动方程，其中 $L_{\psi_t},L_{\psi_x},L_{\psi_y},L_{\psi_z}$ 分别表 L 对 $\psi_t,\psi_x,\psi_y,\psi_z$ 的导数.

对于惯性-重力外波，比较方程(8.58)和方程(8.55)知，惯性-重力外波的 Lagrange 量为

$$L=\frac{1}{2c_0^2}\psi_t^2-\frac{1}{2}(\psi_x^2+\psi_y^2)-\frac{1}{2}\lambda_0^2\psi^2. \tag{8.59}$$

以(8.31)式和(8.33)式代入得到

$$L=\frac{1}{2c_0^2}\omega^2a^2\sin^2(\theta+\alpha)-\frac{1}{2}K_h^2a^2\sin^2(\theta+\alpha)-\frac{1}{2}\lambda_0^2a^2\cos^2(\theta+\alpha). \tag{8.60}$$

L 在一个周期内的平均值为

$$\mathscr{L}(\omega,\boldsymbol{K}_h,a)=\frac{1}{4c_0^2}(\omega^2-K_h^2c_0^2-f_0^2)a^2, \tag{8.61}$$

$\mathscr{L}$称为平均 Lagrange 量，它是波振幅 a 的二次函数. 而且，由上式可以很快导得

$$a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial a}=2\mathscr{L}. \tag{8.62}$$

在(8.61)式中，若令

$$\mathscr{L}=0, \tag{8.63}$$

可求得惯性-重力外波的频散关系. 又由(8.61)式有

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\omega}=\frac{1}{2c_0^2}\omega a^2,\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{K}_h}=-\frac{1}{2}a^2\boldsymbol{K}_h. \tag{8.64}$$

将上式与(8.38)式比较有

$$\mathscr{E}=\omega\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\omega},\quad \vec{\mathscr{F}}=-\omega\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{K}_h}. \tag{8.65}$$

再由 $\vec{\mathscr{F}}=\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g$ 有

$$\boldsymbol{c}_g\equiv\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{K}_h}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{K}_h}\Big/\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\omega}. \tag{8.66}$$

因而，若定义波作用量为

$$\mathscr{A} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} = \frac{\mathscr{E}}{\omega} = \frac{1}{2c_0^2}\omega a^2, \tag{8.67}$$

则波能密度守恒原理(8.39)式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathscr{A}) + \nabla_h \cdot (\omega \mathscr{A}\boldsymbol{c}_g) = 0. \tag{8.68}$$

注意均匀介质的(8.19)式,则得到

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathscr{A}\boldsymbol{c}_g) = 0, \tag{8.69}$$

它称为波作用量守恒原理.

二、正压 Rossby 波

若令

$$\begin{cases} \psi_t \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi_x \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \psi_z \equiv \dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \psi_{tt} \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \psi_{tx} \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}, \quad \psi_{ty} \equiv \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y}, \end{cases} \tag{8.70}$$

则正压 Rossby 波方程(8.40)可以写为

$$F(t, x, y, \psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y, \psi_{tx}, \psi_{ty}) = 0, \tag{8.71}$$

其中

$$F(t, x, y, \psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y, \psi_{tx}, \psi_{ty}) = \frac{\partial \psi_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{ty}}{\partial y} - \lambda_0^2 \psi_t + \beta_0 \psi_x. \tag{8.72}$$

此时,泛函(8.57)式推广为

$$J(\psi) = \iiiint\limits_R L(\psi, \psi_t, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \psi_{tt}, \psi_{tx}, \psi_{ty}, \psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy}, \cdots)\delta t \delta x \delta y \delta z. \tag{8.73}$$

相应 Euler 方程(8.58)推广为

$$L_\psi - \frac{\partial L_{\psi_t}}{\partial t} - \frac{\partial L_{\psi_x}}{\partial x} - \frac{\partial L_{\psi_y}}{\partial y} - \frac{\partial L_{\psi_z}}{\partial z} + \frac{\partial^2 L_{\psi_{tt}}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 L_{\psi_{tx}}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 L_{\psi_{ty}}}{\partial t \partial y} + \cdots = 0. \tag{8.74}$$

比较方程(8.74)和方程(8.72)知,正压 Rossby 波的 Lagrange 量为

$$L = \frac{1}{2}[(\psi_{xt})^2 + (\psi_{yt})^2 + \lambda_0^2 \psi_t^2 - \beta_0 \psi_t \psi_x]. \tag{8.75}$$

以(8.45)式代入得到

$$L = \frac{\omega^2 a^2}{2}\left[K_h^2 \cos^2(\theta + \alpha) + \lambda_0^2 \sin^2(\theta + \alpha) + \frac{\beta_0 k}{\omega} \sin^2(\theta + \alpha)\right]. \tag{8.76}$$

消去公共因子 ω^2,则求得正压 Rossby 波的平均 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}(\omega, \boldsymbol{K}_h, a) = \frac{1}{4}(K_h^2 + \lambda_0^2 + \beta_0 k/\omega)a^2. \tag{8.77}$$

类似，令 $\mathscr{L}=0$ 可求得正压 Rossby 波的频散关系，而且

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}=-\frac{\beta_0 k}{4\omega^2}a^2,\quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}=\frac{1}{2\omega}\left(\omega \boldsymbol{K}_h+\frac{\beta_0}{2}\boldsymbol{i}\right)a^2. \tag{8.78}$$

将上式与(8.49)式比较有

$$\mathscr{E}=\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega},\quad \vec{\mathscr{F}}=-\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}. \tag{8.79}$$

同样也有

$$\boldsymbol{c}_g=-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}_h}\bigg/\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}. \tag{8.80}$$

类似，可定义正压 Rossby 波的波作用量为

$$\mathscr{A}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}=\frac{\mathscr{E}}{\omega}=-\frac{\beta_0 k}{4\omega^2}a^2. \tag{8.81}$$

同样，正压 Rossby 波的波能密度守恒原理(8.50)式可改写为

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t}+\nabla_h\cdot\mathscr{A}\boldsymbol{c}_g=0, \tag{8.82}$$

这是正压 Rossby 波的波作用量守恒原理.

由上两例分析可知：对于线性波动，作为缓变波列的第一近似，波的平均 Lagrange 量可以表示为

$$\mathscr{L}(\omega,\boldsymbol{K},a)=G(\omega,\boldsymbol{K})a^2, \tag{8.83}$$

其中 G 是 ω 和 $\boldsymbol{K}$ 的函数，而且由

$$G(\omega,\boldsymbol{K})=0 \tag{8.84}$$

可确定线性波的频散关系

$$\omega=\Omega(\boldsymbol{K}). \tag{8.85}$$

又因，由(8.84)式有

$$\frac{\partial G}{\partial \omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{K}}+\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{K}}=0, \tag{8.86}$$

因而求得群速度为

$$\boldsymbol{c}_g\equiv\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{K}}=-\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{K}}\bigg/\frac{\partial G}{\partial \omega}=-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}}\bigg/\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}. \tag{8.87}$$

由平均 Lagrange 量可以求得

$$\mathscr{E}=\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega},\quad \vec{\mathscr{F}}=-\omega\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{K}}=\mathscr{E}\boldsymbol{c}_g. \tag{8.88}$$

对线性波，其波作用量一般定义为

$$\mathscr{A}\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}=\frac{\mathscr{E}}{\omega}; \tag{8.89}$$

而且，在均匀介质中，波作用量守恒，即

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathscr{A}\boldsymbol{c}_g)=0. \tag{8.90}$$

在均匀介质中，若存在常定和均匀的基本西风气流 $\bar{u}$，则引入 Doppler 频率

$$\omega_D=\omega-k\bar{u}. \tag{8.91}$$

此时，波作用量定义为

$$\mathscr{A}^*=\frac{\mathscr{E}}{\omega_D}=\frac{\mathscr{E}}{\omega-k\bar{u}}. \tag{8.92}$$

相应，波作用量守恒方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{A}^*+\nabla\cdot\mathscr{A}^*\boldsymbol{c}_g=0. \tag{8.93}$$

当然，波作用量定义方式可以不同，但一定要正比于振幅的平方.

§8.4 波的多尺度方法

前两节，我们应用缓变波列的概念导出了均匀介质的波动中波能密度和波作用量具有守恒性. 本节，我们将缓变波列的概念引申成为讨论波传播的一种渐近方法，这就是波的多尺度方法.

由上一章波列的分析知，波列由两部分构成：一部分是高频载波，其随时间、空间变化相对较快；另一部分是低频波包，其随时间、空间变化相对较慢. 这表示：波列存在两种时间和空间尺度，一是快时间、空间尺度：

$$t=t,\quad x=x,\quad y=y,\quad z=z, \tag{8.94}$$

它表征波列相位函数的变化；另一是慢时间、空间尺度：

$$T=\varepsilon t,\quad X=\varepsilon x,\quad Y=\varepsilon y,\quad Z=\varepsilon z, \tag{8.95}$$

它表征波列振幅函数的变化，其中 ε 满足

$$|\varepsilon|\ll 1, \tag{8.96}$$

称为小参数.

这样，任一缓变波列可以表示为

$$\psi=A(X,Y,Z,T)e^{i\theta(x,y,z,t)}, \tag{8.97}$$

其中振幅 A 明显表示出是 X,Y,Z,T 的缓变函数. 同样，k,l,n,ω 也可视为 X,Y,Z,T 的缓变函数. 因

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial T},\quad \frac{\partial A}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial X},\quad \frac{\partial A}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Y},\quad \frac{\partial A}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Z}, \tag{8.98}$$

则由(8.97)式得到